Woche 1

Mittwoch 21.09

alg. Logik & Modelltheorie

Vorspann: • alg. Strukturen (Gruppen, Ringe, Körper, Moduln, Vektorräume, Algebren)

• math. Theorien und Modelle
Signatur, Axiome, Modelle, Gödel'scher Vollständigkeitssatz

• formale Beweise vs. math. Beweise

I GRUPPENTHEORIE

aus "Group Theory" Skript Kap. 1

0. Axiome der Gruppentheorie

GT_0 : $\forall x \forall y \forall z \, (x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z)$

GT_1 : $\forall x \, (e \circ x = x)$

GT_2 : $\forall x \exists \bar{x} \, (\bar{x} \circ x = e)$

<u>Satz 0.0</u> (a) $\forall x \forall \bar{x} \, (\bar{x} \circ x = e \rightarrow x \circ \bar{x} = e)$

(b) $\forall x \, (x \circ e = x)$

<u>Satz 0.1</u> (a) / (b) Eindeutigkeit des Neutralelements und der Inversen.

<u>Proposition 0.2</u> Eine Menge S mit assoz. Verknüpfung und einem links-neutralen Element, in dem jedes Element ein rechts-inverses hat, ist nicht notwendigerweise eine Gruppe.

Freitag 23.09

1. Beispiele von Gruppen

Kapitel 2 im Skript "Group Theory" bis und mit Diedergruppen.

(Noch keine Multiplikationstabellen und auch keine Produkte.)

Woche 2

Mittwoch 28.09

- Multiplikationstabellen
- Produkte von Gruppen

2. Untergruppen, Nebenklassen, Normalteiler

Proposition 2.1 Ist $H \leq G$, dann ist H eine Gruppe (Prp. 3.1, in Group Theory)

Proposition 2.2. [Prp. 3.2]

Theorem 2.3 [Thm. 3.5] Beweis Aufgabe 9

Lemma 2.4 [Lem. 3.6] (ohne Beweis)

Freitag 30.09

Beweis von Lemma 2.4

Lemma 2.5 [Lem. 3.8]

Korollar 2.6 [Cor. 3.10]

Theorem 2.7 [Thm. 3.11]

[Korollar 2.8 [Cor. 3.12] Beweis Aufgabe 10.(a)]

Woche 3

Mittwoch 05.10.

Korollar 2.8. mit $x^{\mathrm{ord}(x)} = e$

Faktum 2.9. [Fact 5.2]

Proposition 2.10. [Prp. 5.3]

Faktum 2.11. [Fact 5.4]

Faktum 2.12. [Fact 5.5/5.6]

Proposition 2.13. [Prp. 5.7]

Freitag 07.10.

Theorem 2.14 [Thm. 5.8 bzw. Aufgabe 15]

Proposition 2.15 [Prp. 5.9]

Faktum 2.16 [Fact 6.5]

Proposition 2.17 [Prp. 6.6]

Proposition 3.1 [Prp. 6.1]

Korollar 3.2 [Cor. 6.2]

Proposition 3.3 [Prp. 6.3]

Woche 4

Mittwoch 12.10

Theorem 3.4 [Thm. 6.4]

Lemma 3.5 [Lem. 6.7]

Korollar 3.6 [Cor. 6.8]

Theorem 3.7 [Thm. 6.9]

Theorem 3.8 [Thm. 6.10]

Theorem 3.9 [Thm. 6.11] (Beweis Aufgabe 24)

Freitag 14.10

Hauptsatz über endl. erzeugte abelsche Gruppen;
siehe Notizen "Struktursatz".

Woche 5

Mittwoch 19.10

- Kriterium für endl. erzeugte abelsche Gruppen (siehe "Höhenfkt.")
- Sylow-Theoreme: Skript bis Corollary 8.4

Freitag 21.10

Proposition 5.5 [Prp. 8.5] (Beweis in den Übungen)
Theorem 5.6 [Thm. 8.6]
Faktum 5.7 [Fct. 8.7]
Faktum 5.8 [Fct. 8.8]
Lemma 5.9 [Lem. 8.9]
Theorem 5.10 [Thm. 8.10] (erst die Formulierung und ein Beispiel)

Woche 6

Mittwoch 26.10.

- Sylow-Sätze bewiesen
- Korollar mit Normalteiler
- Mit Kapitel über Permutationsgruppen begonnen [Kap. 7]

Freitag 28.10.

- Im Skript Kap. 7 bis Prp. 7.14 (inkl. $A_n \trianglelefteq S_n$).
- Gerade und ungerade Permutationen sind aus der linearen Algebra bekannt; das habe ich nicht nochmals ausgeführt.
- Am Schluss erwähnt (und erklärt), dass gilt:

  $T \cong A_4$; $C \cong S_4$; $D \cong A_5$

Woche 7

Mittwoch 02.11.

- Semidirekte Produkte behandelt
  [nach Ch. 19 aus Humphreys: "A Course in Group Theory"]

- Beispiel: Gruppen der Ordnung 21.

Freitag 04.11.

- Operationen von Gruppen auf Mengen (standard)

- Beispiele mit $G \curvearrowright G$.

- Theorem 8.2: (a) $\forall x \in M \; (St_G(x) \leq G)$
  (b) $M = \dot{\bigcup}_{N \in M/G} N$
  (c) $\forall x \in M \; \forall a \in G \; (St_G(a \circ x) = a \, St_G(x) \, a^{-1})$
  (d) $\forall x \in M \; \left([G : St_G(x)] = |Gx| \right)$

- Fixpunkte und Beispiel $G \times UGr(G) \longrightarrow UGr(G)$.
  $(a, H) \longmapsto aHa^{-1}$

Woche 8

Mittwoch 09.11.

II Ringe & Körper

9. Definitionen und Beispiele

Def. Ringe und Körper (inkl. Schiefkörper)
Ringe mit 1 (1 ist eindeutig)

Bsp. Ringe und einige wenige Körper ($\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$)

Rechenregeln für Ringe und Körper (z.B. $(-1)\cdot a = -a$)

Def. Unterring und Ringhomom. (mit Beispielen)
$\varphi: R \to S$ Ringhomom., dann $\varphi[R]$ Unterring von S.

Def. Integritätsring (mit Beispielen) und Einheitengruppe (mit Bsp.)

Def. Direkte Summe von Ringen $R_1 \oplus \ldots \oplus R_n$.

Freitag 11.11.

- Zur Einheitengruppe von $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ (siehe Notizen "zur Einheitengruppe" in der polybox).

10. Ideale und Homomorphismen

Def. Ideal, Quotientenring, Restklasse, das von S erzeugte Ideal, Hauptideal, Hauptidealring (alles mit Beispielen und Fakten).

Woche 9

Mittwoch 16.11.

Bsp. $\mathbb{Z}$ ist Hauptidealring (mit Beweis)

Prp. 10.3 R Körper $\Leftrightarrow$ einzige Ideale (0) & R

Lem. 10.4 Summe & Produkte von Idealen

Lem. 10.5
$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"] & S \\ R/\mathfrak{a} \arrow[ur, "\bar{\varphi}"'] & \end{tikzcd}$$
für $\mathfrak{a} \subseteq \ker(\varphi)$

Folgerung:
$$\begin{tikzcd} R \arrow[r] \arrow[d, "\pi"] & \varphi[R] \subseteq S \\ R/\ker(\varphi) \arrow[ur, "\cong"'] & \end{tikzcd}$$

Thm 10.6 (1. Isomorphiesatz) $S/S\cap\mathfrak{a} \cong S+\mathfrak{a}/\mathfrak{a}$

Freitag 18.11.

Thm. 10.7 (2. Isomorphiesatz) $R/\mathfrak{a} \cong S/\varphi[\mathfrak{a}]$ für $\ker(\varphi) \subseteq \mathfrak{a}$.

Thm. 10.8 (Chinesischer Restsatz)

$\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_n \subseteq R$, $\mathfrak{a}_i + \mathfrak{a}_j = R$ (für $i \neq j$), $b_1, \dots, b_n \in R$.

$\Rightarrow$ $b \equiv b_i \pmod{\mathfrak{a}_i}$ und b eindeutig mod $\mathfrak{a}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{a}_n$.

Kor. 10.9 $R/\mathfrak{a}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{a}_n \cong R/\mathfrak{a}_1 \oplus \dots \oplus R/\mathfrak{a}_n$

Def. Primring, Charakteristik $\mathrm{char}(R)$

Prp 10.10 Primring isomorph zu $\mathbb{Z}$ oder $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Woche 10

Mittwoch 23.11.

11. Kommutative Ringe

Def. Primideal

Prp 11.1 $\mathfrak{p}$ Primideal $\Leftrightarrow$ $\mathfrak{p} \neq R \wedge \forall a,b \in R\,(a \cdot b \in \mathfrak{p} \to (a \in \mathfrak{p} \vee b \in \mathfrak{p}))$

Def. maximales Ideal

Prp 11.2 $\mathfrak{m}$ maximal $\Leftrightarrow$ $R/\mathfrak{m}$ ist Körper

Prp 11.3 $\varphi: R \to S$, $\mathfrak{p} \subseteq S$ Primideal, dann $\varphi^{-1}[\mathfrak{p}]$ Primideal.

- Quotientenkörper von R (Integritätsring)

  $\dot{R} := R \setminus \{0\}$, Äquiv.-Rel. auf $R \times \dot{R}$, Add. & Mult.

Prp 11.4 $(\mathrm{Quot}(R), 0_Q, 1_Q, +, \cdot)$ ist ein Körper.

Def. $\mathrm{Quot}(R)$ heisst Quotientenkörper von R.

Freitag 25.11.

Prp. 11.5
$$\begin{tikzcd} R \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\iota"'] & & K \\ & \mathrm{Quot}(R) \arrow[ur, "\bar{\varphi}"'] & \end{tikzcd}$$
kommutiert

Bem. · $\varphi: R \hookrightarrow S$ lässt sich fortsetzen zu $\bar{\varphi}: \mathrm{Quot}(R) \hookrightarrow \mathrm{Quot}(S)$

· $\mathrm{Quot}(R)$ kl. Körper mit $R \subseteq K$.

· K Körper: $\mathbb{Q} \hookrightarrow K$ oder $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \hookrightarrow K$ (p prim)

12. Polynomringe

Faktum 12.1 $X^k = \langle 0, \dots, 0, \underset{\uparrow k\text{-te Stelle}}{1}, 0, \dots \rangle$

Def. $R[X]$ Polynomring; $R \subseteq S$, $s_0 \in S$, dann $R[s_0]$ kl. Ring ...

Prp 12.2 $R[s_0] = \{\tilde{s} : \tilde{s} = a_0 + a_1 s_0^1 + \dots\}$; Bsp: $\mathbb{Z}[i]$, ...

Woche 11

Mittwoch 30.11.

Thm. 12.3 Universelle Eigenschaft
$$\begin{tikzcd} R \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\iota"'] & & S \\ & R[X] \arrow[ur, "\varphi_{s_0}"'] & \end{tikzcd}$$

Kor. 12.4 $R[X]/\mathfrak{a}_{s_0} \cong R[s_0]$

Def. s_0 transzendent / algebraisch über R.

Beispiele $\sqrt{2}, e, \pi, i, e^{2\pi i/n} \ldots$

Def. Grad, Leitkoeffizient, normiert

Gradformeln (ohne Beweis)

Prp 12.5 R Integ.-Ring: (a) $R[X]$ Integ.-Ring (b) $R[X]^* = R^*$

Thm. 12.6 Euklidischer Algorithmus für Polynome.

Freitag 02.12.

Def. $p \mid q$ für allg. Ringe.

Kor. 12.7 $p \in R[X]$ und $a \in R$: $p = s \cdot (X-a) + p(a)$

$(X-a) \mid p \Leftrightarrow p(a) = 0.$

Thm. 12.8. Ist K ein Körper, dann ist $K[X]$ ein Hauptidealring.

Kor. 12.9 K Körper, $\text{grad}(p) = n > 0$, dann hat p höchstens n versch. Nullstellen in K.

Beispiele und Bemerkung zu Minimalpolynome.

13. Faktorielle Ringe

→ Einschub zur Primfaktorzerlegung in $\mathbb{Z}$.

Def. irreduzibel, Primelement, assoziiert (Bsp. $\mathbb{Z}$)

Lemma 13.1 R Integritätsring

(a) Primelemente sind irreduzibel

(b) $p \in R, p \neq 0$; p Primelement $\Leftrightarrow$ (p) Primideal

Woche 12

Mittwoch 07.12.

Def. Zerlegung in irred. Faktoren. (mit Bsp. $R = \mathbb{Z}$)

Def. faktorielle Ringe (ZPE-Ringe)

Faktum 13.2 In fakt. Ringen sind irred. Elemente prim.

$\longrightarrow$ Einschub: Auswahlaxiom [Geschichte, versch. Formen, etc.]

Def. ggT

Faktum 13.3 ggT eindeutig bis auf Einheiten

Freitag 09.12.

Lem. 13.4 R Hauptidealring: $(a,b) = (d)$ mit d $ggT(a,b)$.

Kor. 13.5 R Hauptidealring: irred. Elemente sind prim.

Theorem 13.6 Jeder Hauptidealring ist faktoriell.

Def. $q \in R[X]$ primitiv

Gauss Lemma 13.7 R fakt. Ring, q primitiv, $Q := \mathrm{Quot}(R)$

Folgende Aussagen äquivalent:

(a) q irred. in $R[X]$

(b) q —"— $Q[X]$

(c) q prim in $Q[X]$

(d) q —"— $R[X]$

gezeigt: (d) $\Rightarrow$ (a) ; (b) $\Rightarrow$ (c)

(a) $\Rightarrow$ (b)

[(c) $\Rightarrow$ (d) kommt am Mittwoch]

Woche 13

Mittwoch 14.12.

Lem. 13.7 Beweis von (c) $\Rightarrow$ (d)

Thm. 13.8 R faktoriell $\Longrightarrow$ $R[X]$ faktoriell

Kriterium von Schönemann-Eisenstein 13.9 [Beweis fertig am Freitag]

Freitag 16.12.

Beweis von 13.9 fertig; Beispiele

EPILOG: [siehe Blätter] nur bis Blatt 1 gekommen,
Addition von Punkten noch nicht behandelt.