

Revolutionen in der Mathematik I

Einführung in das Thema

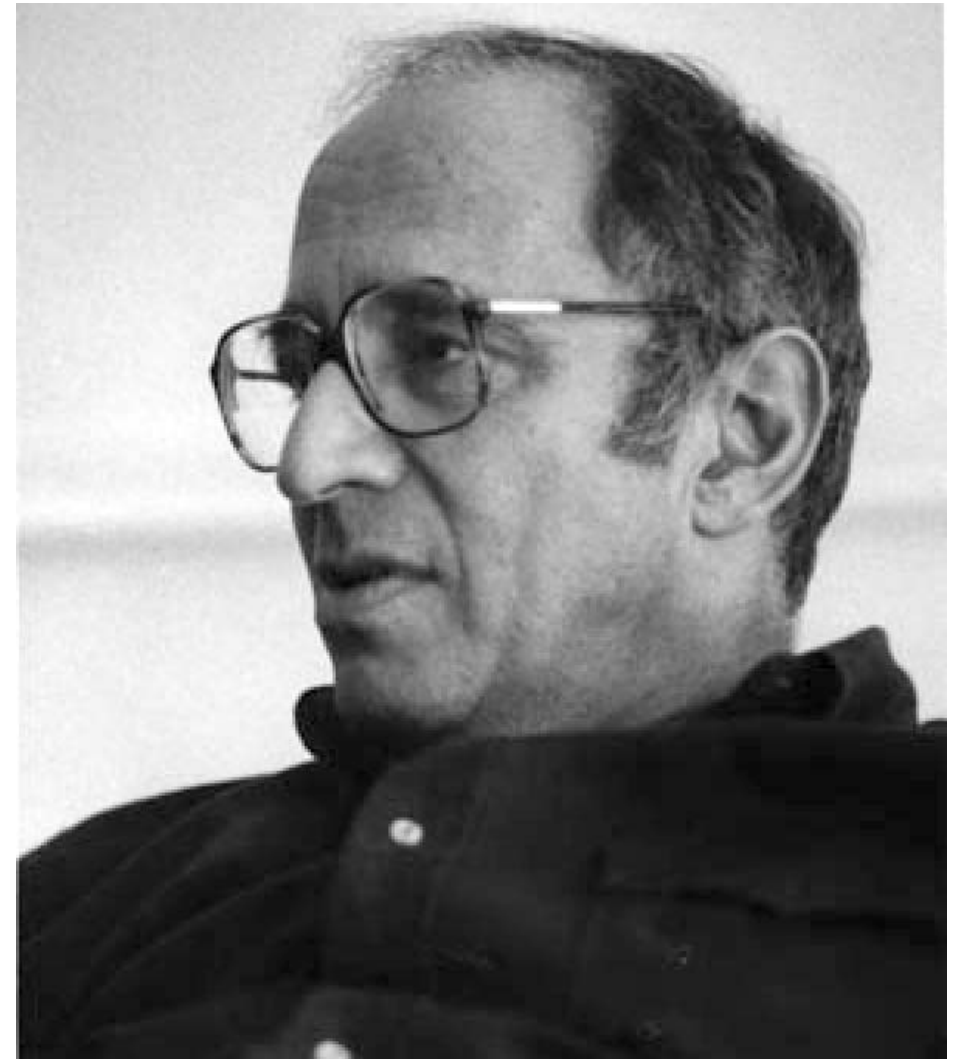
Thomas S. Kuhn (1922-1996)

Physiker und
Wissenschaftstheoretiker

Wichtigstes Werk:

The Structure of Scientific Revolutions
(1962)

Soziale Theorie des
wissenschaftlichen Fortschritts



Wissenschaftliche Community

Die Praktizierenden einer wissenschaftlichen Disziplin

Besitzen zu einem großen Ausmass ähnliche Bildung,
Erfahrungen und Wissen

Existiert auf mehreren Ebenen

Paradigmen und disziplinäre Matrix

Der gemeinsame Hintergrund einer wissenschaftlichen Community bildet ein **Paradigma**

Später wurde dieses Konzept von Kuhn zu der **disziplinären Matrix** ausgearbeitet

Frage: Was sind die Elemente der disziplinären Matrix?

Elemente der disziplinäre Matrix

1. *Symbolic generalizations*
2. Vertrauen auf bestimmte Modelle
3. Werte
4. *Exemplars* (Muster) oder Paradigmen

Die disziplinäre Matrix bildet Richtlinien für Mitglieder einer Community.

Normale Wissenschaft

Nach Vorgabe der diszipl. Matrix wählt der Wissenschaftler Probleme, die sowohl lösbar als auch als wertvoll gelten innerhalb der Matrix

Natur wird in konzeptuelle Boxen gesteckt

Misserfolg: Intelligenz oder Geduld

Revolutionäre Wissenschaft

Manchmal kommt es zu **Anomalien**, die nicht in die diszipl. Matrix passen

Können diese nicht auf 'normale' Art integriert werden, kommt es zu einer **Krise**

Diszipl. Matrix wird hinterfragt, neue Paradigmen und eine neue Matrix entsteht (**Revolution**)

Frage: Wie kam es zum ersten Paradigmenwechsel?

Frage

Was sind Beispiele einer Revolution?

Frage

Was sind Beispiele einer Revolution?

Revolutionen müssen nicht groß sein.
(Mikrorevolution)

Inkommensurabilität

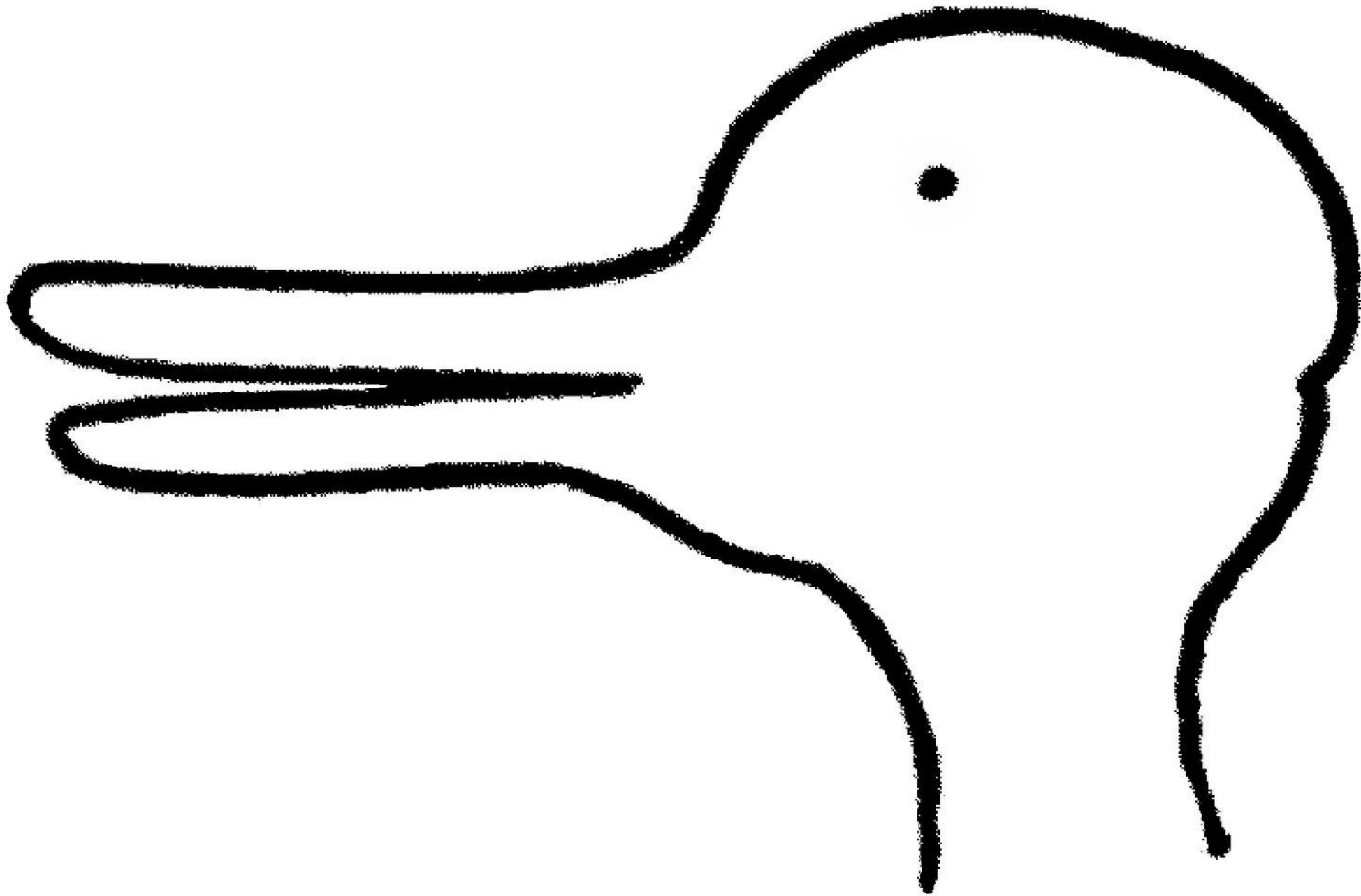
Die Perspektiven des alten Paradigma und des neuen sind fundamental anders

Das neue Paradigma kann nicht mit den Werkzeugen des alten verglichen werden (**Inkommensurabilität**)

Es gibt daher keine rationale Entscheidung zwischen dem alten und dem neuen Paradigma

Erste Probleme mit Anwendbarkeit auf Mathematik?

Inkommensurabilität



Frage

Ist Kuhns Theorie anwendbar auf die Mathematik?

Grundlegendes

Kuhns Theorie geht von der Soziologie der Community aus und ist dualistisch (**Natur** vs. Community)

Was ist das Verhältnis von Mathematik und Natur?

Nach Mehrtens kein Problem.

Wissenschaft frei von extra-wissenschaftlichen Einflüssen.

Starke Idealisierung.

Frage

Was wären mathematische Revolutionen?

Revolutionen in Mathematik?

“Until well into the nineteenth century the Cambridge and Oxford dons regarded any attempt at improvement of the theory of fluxions as an impious revolt against the sacred memory of Newton. The result was that the Newtonian school of England and the Leibnizian school of the Continent drifted apart. The dilemma was broken in 1812 by a group of young mathematicians at Cambridge who, [...] formed an ‘Analytical Society’ to propagate the differential notation. [...] The new generation in England now began to participate in modern mathematics”

Frage: Ist das eine Revolution?

Keine Revolution

Argument: Keine Revolution da nicht *in* Mathematik

Nomenklatur, Notation, Symbolismus,
Metamathematik, Methoden und Historiographie
nicht in Mathematik.

Inhalt vs. Form

Mehrtaus Antwort I

Beispiel: Taylors theorem.

Symbolismus, Metamathematik, Methoden, etc. lässt sich nicht trennen vom Inhalt und sind dadurch in Mathematik

Veränderungen der Form sind Veränderungen in Mathematik.

Mehrstens Antwort II

Revolution könnte verwendet werden

Allerdings ist Kuhns Theorie nicht sehr anwendbar auf Mathematik und der Begriff hat (politische) Konnotationen

Kann als Metapher verwendet werden, aber sollte nicht methodologisch

Frage

Gibt es Krisen in der Mathematik?

Krisen in der Mathematik?

Grundlagenkrise

Sowohl soziale als auch logische Krise.

Methoden zum Umgang:

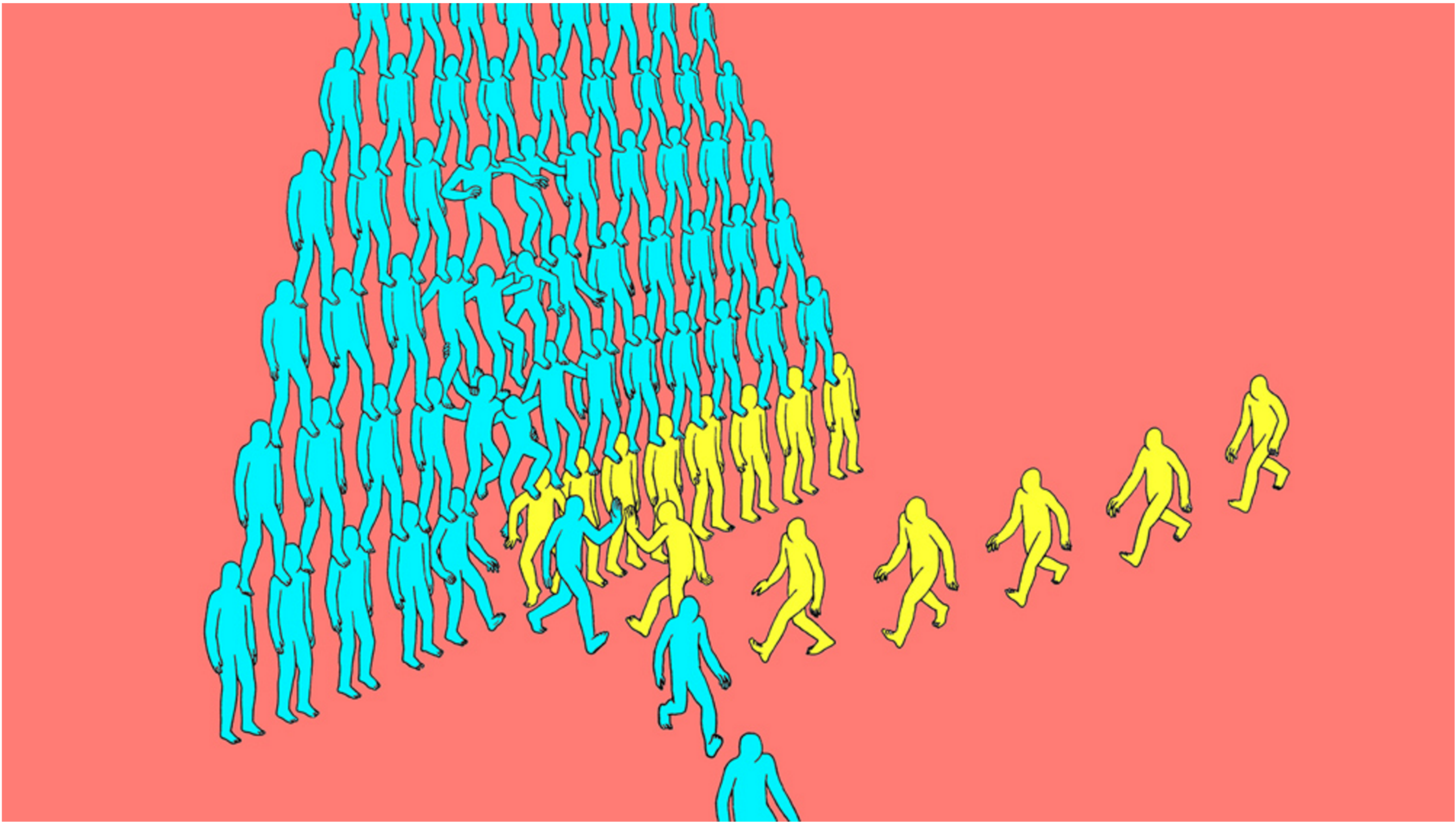
Ignorieren, da fruchtbar

Methoden zum Umgang mit Krisen

Grundlegende Veränderungen in einem Teil der Mathematik können gemacht werden ohne dass die gesamte Community die Krise erlebt

A Fight to Fix Geometry's Foundations

When two mathematicians raised pointed questions about a classic proof that no one really understood, they ignited a years-long debate about how much could be trusted in a new kind of geometry.



Anomalien in der Mathematik?

Anomalien sind Phänomene, die entgegen den Erwartungen der diszipl. Matrix gehen.

Beispiel: Fünftes Postulat und Überwurf der ‘Metaphysik’ der Geometrie

Relativer Term:

Existenz von irrationalen Zahlen vs. Unabhängigkeit der Distributivität in der boolschen Algebra

Elemente der disziplinäre Matrix

1. *Symbolic generalizations*
2. Vertrauen auf bestimmte Modelle
3. Werte
4. *Exemplars* (Muster) oder Paradigmen

Frage

Gibt es Elemente der diszipl. Matrix, die speziell mathematisch sind?

Frage

Gibt es Elemente der diszipl. Matrix, die speziell mathematisch sind?

Mehrstens: Konzepte, Standardprobleme

(Mehrstens) Conclusio

Es gibt Ereignisse in der Mathematik, die man als Revolution beschreiben kann

Methodologisch sollte dies jedoch vermeiden werden

Manche von Kuhns Konzepte lassen sich teilweise auf Mathematik anwenden und sind interessant, da sie sich auf die Soziologie der Mathematik fokussieren

(Meine) Frage

Sollten Historiker überhaupt Theorien zur Geschichte und Entwicklung haben?

Eine andere Perspektive

ON PROOF AND PROGRESS IN MATHEMATICS

WILLIAM P. THURSTON

People have very different ways of understanding particular pieces of mathematics. To illustrate this, it is best to take an example that practicing mathematicians understand in multiple ways, but that we see our students struggling with. The derivative of a function fits well. The derivative can be thought of as:

- (1) Infinitesimal: the ratio of the infinitesimal change in the value of a function to the infinitesimal change in a function.
- (2) Symbolic: the derivative of x^n is nx^{n-1} , the derivative of $\sin(x)$ is $\cos(x)$, the derivative of $f \circ g$ is $f' \circ g * g'$, *etc.*
- (3) Logical: $f'(x) = d$ if and only if for every ϵ there is a δ such that when $0 < |\Delta x| < \delta$,

$$\left| \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} - d \right| < \delta.$$

- (4) Geometric: the derivative is the slope of a line tangent to the graph of the function, if the graph has a tangent.
- (5) Rate: the instantaneous speed of $f(t)$, when t is time.
- (6) Approximation: The derivative of a function is the best linear approximation to the function near a point.
- (7) Microscopic: The derivative of a function is the limit of what you get by looking at it under a microscope of higher and higher power.

This is a list of different ways of *thinking about* or *conceiving of* the derivative, rather than a list of different *logical definitions*. Unless great efforts are made to maintain the tone and flavor of the original human insights, the differences start to evaporate as soon as the mental concepts are translated into precise, formal and explicit definitions.

Verwendet

D. Gillies (ed.): Revolutions in Mathematics, Oxford, Clarendon Press, 1992

K. Harnett: A Fight to Fix Geometry's Foundations.
<https://www.quantamagazine.org/20170209-the-fight-to-fix-symplectic-geometry/>

Bird, Alexander, "Thomas Kuhn", The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Fall 2013 Edition)
<https://plato.stanford.edu/archives/fall2013/entries/thomas-kuhn/>.