(D 9) Man erweitere die Analysis auf A-Funktionen, welche nicht notwendig Fortsetzungen reeller Funktionen sind (z.B. Deltafunktionen).

Kapitel 2: DIE OMEGAZAHLEN

2.1 Wie erweitert man Zahlbereiche?

Wir sind darauf aus, den Körper der rationalen Zahlen oder den der reellen Zahlen durch Hinzunahme unendlich großer und unendlich kleiner Elemente so zu erweitern, daß unter anderem die Beispiele aus Kapitel 1 einen guten mathematischen Sinn bekommen. Man wird sich an bereits vertrauten und bewährten Verfahren zu Erweiterungen von Zahlbereichen orientieren.

Die meisten heutigen Mathematiker halten die Methode der Adjunktion neuer, "idealer" Elemente für besonders geeignet. Die komplexen Zahlen kann man erhalten, wenn man zum Körper $K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{Q}$ noch ein weiteres Symbol i für ein neues "ideales" Element hinzunimmt mit der wichtigen Forderung $i^2 = -1$ und der weiteren Festsetzung, daß i sich bezüglich der in der Definition des Körpers festgelegten Rechenregeln so verhält wie ein "allgemeines" Element des Körpers K, also nicht in jeder Hinsicht so wie die in der Definition auch auftretenden "speziellen" Elemente 0 und 1. Das neue Element i soll also mit den alten rational verknüpft werden dürfen, und es sollen Kommutativ-, Assoziativ-, Distributivgesetze gelten.

Das ist keine Erfindung des 20. Jahrhunderts. Die italienischen Algebraiker, dann Leibniz und vor allem Euler und andere Mathematiker des 18. Jahrhunderts sind mit dem Zeichen $\sqrt{-1}$ und den komplexen oder imaginären oder (ab)surden Zahlen genau so umgegangen, und ihre Erfahrungen hatten gezeigt, daß man damit zu richtigen reellen Resultaten kommt. Ob bei manchen Mathematikern über die bloße gute Erfahrung mit diesen Zahlen eine tiefere Einsicht in die widerspruchsfreie Möglichkeit dieses Umgangs vorhanden war, können wir kaum entscheiden. - Bei Euler kam zum rein algebraischen Operieren noch weiteres hinzu, zum Beispiel $e^{2\pi i}$, i^i, Ausdrücke, die Euler selbst übrigens auch zur Algebra rechnete.

Die heutige mengentheoretisch orientierte Geschichtsauffassung sieht in der Gaußschen Zahlenebene ein Modell, welches zeigt, daß die Theorie des Körpers der komplexen Zahlen genau so widerspruchsfrei ist wie die des Körpers der reellen Zahlen. Anfangs handelte es sich wohl mehr um ein nützliches Hilfsmittel. Das Suchen nach Modellen setzt allgemein erst um 1870 ein, zugleich mit dem Aufkeimen der Mengendenkweise; Gauß und seine Zeitgenossen entwickelten die nichteuklidische Geometrie im Stile Euklids als eine logische Aufeinanderfolge von Lehrsätzen, ohne ein Modell zu suchen.

Sieht man von einem unpublizierten Versuch Bolzanos (ca. 1830) ab - wir kommen auf diesen Ansatz noch zurück -, so erzeugte erst die Mengendenkweise ein Bedürfnis nach Begründungen der reellen Zahlen mittels Erweiterungen des Körpers der rationalen Zahlen. Selbstverständlich darf man nicht sagen, die Mathematiker davor hätten nicht gewußt, was die reellen Zahlen seien; man hatte ja die Dezimalzahlen, und das genügte. Selbst der Nullstellensatz für stetige reelle Funktionen läßt sich auf dieser Grundlage beweisen (Cauchy 1821).

Neben der Methode der Dedekindschen Schnitte zur Erzeugung von $\mathbb{R}$ aus $\mathbb{Q}$ beruht auch das Verfahren der Äquivalenzklassen von Fundamentalfolgen auf dem Mengenbegriff, und dessen Modifikation wird einen zweiten möglichen Zugang zu unserer Erweiterung des Zahlbegriffs geben.

Speziell für die reellen Zahlen eignet sich auch eine axiomatische Einführung besonders gut (Hilbert 1899, Grundlagen der Geometrie); das liegt daran, daß die Axiome kennzeichnend für $\mathbb{R}$ sind, jedenfalls wenn man eine konventionelle Auffassung von den Grundlagen der Mathematik hat: $\mathbb{R}$ ist der einzige vollständige angeordnete Körper, d.h. der einzige, in dem jede nach unten beschränkte nicht-leere Teilmenge eine größte untere Schranke hat. Diese Auszeichnung von $\mathbb{R}$ ist als ein Indiz dafür empfunden worden, daß nur über $\mathbb{R}$ eine brauchbare Analysis möglich sein kann; wir werden aber sehen, daß der Satz vom Infimum für "vernünftige" Mengen auch bei den Omegazahlen gilt.

Jedenfalls ergibt sich schon daraus, daß eine Axiomatik für Nichtstandard-Zahlen nicht ganz so einfach aussehen kann, weil sie diese speziellen "vernünftigen" Mengen mit berücksichtigen muß. Das geschieht tatsächlich in dem derzeit häufig benutzten Axiomensystem von Edward Nelson. Für einen Einstieg erscheint mir der axiomatische Zugang nicht geeignet.

2.2 Die Adjunktion von Ω

Im folgenden bezeichne K einen archimedisch geordneten Körper, man denke an $K = \mathbb{Q}$ oder $K = \mathbb{R}$. Zu diesem soll ein neues, "ideales" Element hinzugenommen werden. Wir schreiben dafür Ω, das große griechische Omega,

in Anlehnung an das Zeichen ∽, welches Euler gelegentlich zur Bezeichnung einer unendlich großen natürlichen Zahl verwendete. Unendlich groß heißt ein Element, welches größer ist als jedes Element des Grundkörpers K. Dazu sind offenbar notwendig und hinreichend die unendlich vielen Ungleichungen

$$(1) \qquad \Omega > 1,\ \Omega > 2,\ \Omega > 3,\ \ldots,\ \Omega > 100,\ \ldots;$$

außerdem erwarten wir von Ω, daß die rationalen Rechenoperationen unbeschränkt ausführbar sind. Man kann daher die Ausdrücke bilden

$$\frac{a_o + a_1\Omega + \ldots + a_k\Omega^k}{1 + b_1\Omega + \ldots + b_j\Omega^j}, \quad a_r, b_s \in K,$$

die die Menge $K(\Omega)$ konstituieren. In jedem Lehrbuch der modernen Algebra kann man nachlesen, daß $K(\Omega)$ ein angeordneter Körper ist. Wir gehen darauf nicht weiter ein, denn dieser Körper ist uns zu klein, wie wir aus den Beispielen in Kapitel 1 wissen: Uns interessieren auch Ausdrücke wie

$$(1+\tfrac{1}{\Omega})^\Omega,\quad 2^\Omega,\quad \Omega^\Omega,\quad \sum_{k=o}^{\Omega} \frac{1}{k!},\quad \sum_{k=23}^{2\Omega} 10^k,\quad \sum_{k=\Omega+1}^{2\Omega} \frac{1}{k}.$$

Ersetzen wir in diesen Ausdrücken das Zeichen Ω durch hinreichend große natürliche Zahlen, so ergeben sich Elemente von K, und in den Formeln (1) führt die Ersetzung von Ω durch n jeweils auf eine wahre Aussage, sofern n hinreichend groß ist. Das legt die folgende Verallgemeinerung des Begriffs der Adjunktion nahe.

Jede Folge $a(n) \in K$, *definiert für alle hinreichend großen natürlichen* n, *oder, anders ausgedrückt, für alle* $n \geqq n_o$ *mit einem* $n_o \in \mathbb{N}$, *gibt ein Element des erweiterten Zahlbereichs* ${}^\Omega K$ *an; wir schreiben für dieses Element* $a(\Omega)$ *und nennen es eine Omegazahl.*

Es sieht so aus, als wären die Omegazahlen nichts anderes als Zahlfolgen in K, und damit hätten wir nicht viel gewonnen. Aber die Formeln (1) geben uns einen Hinweis darauf, wie wir Sätze oder wahre Aussagen und richtige Formeln für Omegazahlen erhalten können: Ist $A(n)$ für hinreichend große natürliche n (oder für fast alle n, für alle $n \geqq n_o$) wahr in der Theorie von K, so soll $A(\Omega)$ per definitionem wahr sein in der Theorie von ${}^\Omega K$. Ehe wir diese vorläufige Festsetzung präzisieren, seien einige Beispiele behandelt.

Es sei $A(n)$: $a(n) = b(n)$ mit $a(n) \in K$, $b(n) \in K$ für hinreichend große n. Ist $A(n)$ wahr für hinreichend große n, so gilt nach unserer Festsetzung $a(\Omega) = b(\Omega)$. Zu "kofinalen" Folgen, das heißt zu schließlich übereinstimmenden, gehört die gleiche Omegazahl. Ist $a(n) = n$ für hinreichend große n, so ist $a(\Omega) = \Omega$. Die Zahl Ω gehört zu der Folge der natürlichen Zahlen, offenbar einer besonders ausgezeichneten Folge.

Die nachfolgende Kette von Ungleichungen wird der Leser selbst bestätigen (einige Zahlen gibt es in ${}^{\Omega}\mathbb{R}$, aber nicht in ${}^{\Omega}\mathbb{Q}$!):

$$0 < \frac{1}{\Omega^\Omega} < \frac{1}{\Omega} < \frac{1}{\sqrt{\Omega}} < 1 < \sqrt[\Omega]{\pi} < \sqrt[\Omega]{\sqrt{\Omega}} < 2{,}5 < \left(1+\frac{1}{\Omega}\right)^\Omega < \sum_{k=0}^{\Omega} \frac{1}{k!} < 3 < \sqrt{\Omega} < \Omega < 2\Omega <$$
$$< \Omega^{60} < 2^\Omega < \Omega! < \Omega^{\Omega-1} - 5^\Omega.$$

Die Schreibweise $a(\Omega)$ wird manchmal zu umständlich werden; es sei daher verabredet, daß wir Omegazahlen auch mit den zugehörigen griechischen Buchstaben bezeichnen, $\alpha = a(\Omega)$, $\xi = x(\Omega)$. Das wird sich nicht immer konsequent durchhalten lassen. So ist π schon für die Kreiszahl vergeben, Ω soll für die durch die Folge (n) gegebene Zahl stehen, und dx ist stets infinitesimal.

Weil die entsprechenden Regeln in K für alle Elemente gelten, haben wir in ${}^{\Omega}K$ ebenfalls für alle Elemente

$$\alpha+\beta = \beta+\alpha;\quad \alpha\cdot\beta = \beta\cdot\alpha;\quad (\alpha+\beta)+\gamma = \alpha+(\beta+\gamma);\quad \alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma;$$
$$\alpha(\beta+\gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma.$$

Die Elemente von K sind in ${}^{\Omega}K$ über die schließlich konstanten Folgen eingebettet: Ist $a(n) = 1$ für alle hinreichend großen n, so ist $\alpha = 1$. Das ist sozusagen ein Bonus, den uns unsere Bezeichnungskonvention liefert. Nun folgen die weiteren Körperregeln $\alpha + 0 = \alpha$, $\alpha\cdot 0 = 0$, $\alpha\cdot 1 = \alpha$ aus den entsprechenden Regeln für K. Die Existenz eines Inversen bei der Addition ist offensichtlich, $\alpha + (-\alpha) = 0$; dabei gehört α zur Folge $a(n)$, und $-\alpha$ zur Folge $-a(n)$.

Das weitere Durchmustern der Regeln für angeordnete Körper verläuft nicht so langweilig. Wie steht es zum Beispiel mit der Existenz des Inversen bei der Multiplikation und mit der vollständigen Anordnung? Ist $(-1)^\Omega$ größer oder kleiner als 0? Es gilt ja nicht für alle hinreichend großen n, daß $(-1)^n = 1$, und auch nicht $(-1)^n = -1$. Das sieht nach einem ernsten Handicap aus!

Erinnern wir uns aber daran, daß die $A(n)$ *Aussagen* sein durften, nicht bloß Formeln in Zeichen des analytischen oder algebraischen Kalküls. Die

$A(n)$ dürfen vielmehr auch logische Symbole enthalten. Ist nun $A(n)$: $(-1)^n = 1 \vee (-1)^n = -1$ mit dem logischen "oder" $\vee$, so ist dieses $A(n)$ sogar für alle n wahr, und daher gilt $A(\Omega)$: In der Theorie von ${}^{\Omega}K$ haben wir als wahre Aussage $(-1)^\Omega = 1 \vee (-1)^\Omega = -1$. Das sieht zunächst recht merkwürdig aus, denn aus dieser Aussage können wir nicht schließen, welche der beiden Teilaussagen $(-1)^\Omega = 1$ oder $(-1)^\Omega = -1$ wahr ist. Nur ihre Disjunktion ist gewiß wahr!

Ganz so neu ist eine solche Situation nicht. Weiß man in der Standard-Mathematik etwa, daß für eine Anwendung nur genau eine Lösung einer quadratischen Gleichung in Frage kommt, etwa $x^2 = 1$, so kann man auch nur auf $x_{1,2} = \pm 1$ verweisen; für eine Entscheidung zwischen den beiden möglichen Werten braucht man weitere Informationen, und ebenso ist es hier.

Bei konkreten Aufgaben stört der Sachverhalt gar nicht; davon konnten wir uns in Kapitel 1 überzeugen.

Das Vorkommnis gibt aber Anlaß zu einer präzisen Fassung unserer Definition der Gültigkeit einer Aussage $A(\Omega)$. Wir müssen sagen, wie die zugehörige *Aussageform* $A(.)$ mit einer Leerstelle für eine natürliche Zahlvariable aufgebaut sein darf: Sie soll eine endliche Reihe von Zeichen aus dem üblichen mathematischen Alphabet der Theorie von K sein. Zu diesem Alphabet gehören das Gleichheitszeichen $=$; Zeichen für Zahlenkonstante wie 0, 1, $-\frac{1}{2}$, π; Zeichen für Zahlvariable wie j,k,m, x,y,z; Zeichen für Funktionen und Relationen und zugehörige Variable wie $\sqrt[3]{\ }$, $\exp$, $\sin$, $+$, $-$, $<$, f, g, R; Zeichen der Mengenlehre $\in$, $\{\ldots\}$, $\subseteq$, $\cap$, $\cup$, $\bigcap$, $\bigcup$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$ ...; Interpunktionszeichen wie Klammern), (,...; und nun eben auch noch die logischen Zeichen $\neg$ (Negation), $\wedge$ (und), $\vee$ (oder), $\Rightarrow$ (Implikation), $\Leftrightarrow$ (genau dann wenn), $\bigwedge$ (für alle), $\bigvee$ (es gibt).

Es ist nicht etwa eine Besonderheit der Infinitesimalmathematik, daß sie eine solche Aufzählung der Bausteine für Aussagen, Aussageformen, mathematische Sätze erfordert. Das gilt ebenso für jede mathematische Theorie auch sonst; nur kann man sich das meist ersparen, weil eine mehr oder weniger laxe umgangssprachliche Formulierung ausreicht. Hier aber wollen wir aus einer gegebenen Theorie von K, d.h. einer Sammlung von Sätzen oder wahren Aussagen in der Sprache von K eine neue Theorie von ${}^{\Omega}K$ gewinnen, und da empfiehlt es sich, die Sprache von K tatsächlich einmal zu präzisieren. Das bedeutet natürlich nicht, daß wir hier mehr Kenntnisse aus der mathematischen Logik benötigen als beispielsweise in der gewohnten reellen oder komplexen Analysis. Manche Bücher über Nonstandard-Analysis erwecken allerdings den Eindruck, als handle es sich dabei um eine Anwendung der mathematischen Logik; hier aber trifft das nicht zu.

Wir setzen noch voraus, daß das Zeichen Ω nicht zum Alphabet der Theorie von K gehört, genauso wie man bei der Einführung der komplexen Zahlen vorauszusetzen hat, daß das Zeichen i nicht zur Sprache der reellen Zahlen gehört. Sollte das Zeichen doch in der alten Theorie vorgekommen sein, so muß es rechtzeitig durch ein anderes ersetzt werden. Die Theorie selbst wollen wir nicht weiter festlegen; jeder Leser mag an "seine" Theorie denken. Es soll sich lediglich um eine Kollektion von wahren Sätzen handeln, welche in der Sprache von K formuliert ist; und die Theorie darf nicht zu armselig sein. Wir werden auf jeden Fall die elementare Zahlentheorie von $\mathbb{N}$, wie sie etwa in den Axiomen von Peano-Dedekind steckt, vorauszusetzen haben. Doch wird sich später im einzelnen zeigen, was benötigt wird.

Nach dieser langen Vorrede kommen wir nun endlich zur Definition der Theorie von ${}^{\Omega}K$.

Leibniz'sches Prinzip: *Es sei* $A(.)$ *eine Aussageform, formuliert in der Sprache von* K. *Wenn es ein* $n_0 \in \mathbb{N}$ *gibt so daß für alle* $n \geqq n_0$ *die Aussage* $A(n)$ *in der zugrundegelegten Theorie von* K *wahr ist, dann soll* $A(\Omega)$ *als wahrer Satz in die neue Theorie von* ${}^{\Omega}K$ *aufgenommen werden.*

Wir berufen uns bei diesem konstituierenden Prinzip der neuen Theorie auf Leibniz, der formuliert hat: "Die Regeln des Endlichen gelten im Unendlichen weiter." (Brief vom 2.2.1702 an Varignon). Wir haben ja schon gesehen, daß Ω sich als unendlich groß erweist. Leibniz und seine Nachfolger haben offenbar nach dem Prinzip mit dem Unendlichgroßen gerechnet: Was für alle sehr großen endlichen Zahlen gilt, das gilt auch für die unendlich großen. Wir verwenden das Prinzip in einer minimalen Fassung: *Es wird nur eine einzige neue ideale Zahl* Ω *postuliert.* Damit werden wir auskommen.

Von den Körperregeln fehlt uns lediglich die Existenz des inversen Elements bei der Multiplikation. In K gilt das:

$$a = 0 \vee \bigvee_b a \cdot b = 1.$$

Schreibt man $a(n)$, $b(n)$ statt a,b, so hat man für jedes n eine wahre Aussage, und mit $\alpha = a(\Omega)$, $\beta = b(\Omega)$ folgt in ${}^{\Omega}K$

$$\alpha = 0 \vee \bigvee_\beta \alpha \cdot \beta = 1.$$

Wieder kann es sein, daß im Einzelfall nicht zu entscheiden ist, ob $\alpha = 0$ gilt, z.B. bei $\alpha = 1 + (-1)^{\Omega}$. Dann braucht man eben wieder mehr Informationen, ähnlich wie in der konventionellen Algebra, wenn es um eine Wurzel der quadratischen Gleichung $x^2 - 2x = 0$ geht.

Die Anordnung $\alpha < 0 \vee \alpha = 0 \vee \alpha > 0$ folgt direkt aus der Gültigkeit von $a < 0 \vee a = 0 \vee a > 0$ in K. Die Verifikation weiterer Regeln für die Anordnung im Körper überlassen wir dem Leser.

Die bisherigen Überlegungen zeigten, daß in ${}^{\Omega}K$ die Regeln des angeordneten kommutativen Körpers gelten. Aber wir haben doch etwas mehr gewonnen: Es gibt in ${}^{\Omega}K$ unendlich große Zahlen, also solche, für die gilt $\xi > m$ für jede (endliche) natürliche Zahl m. Wir schreiben dann auch $\xi \gg 1$ (ξ unendlich groß gegen 1). Damit handelt es sich um einen Begriff (unendlich groß) und ein Zeichen ($\gg$) außerhalb des alten, *"internen"* Alphabets der Theorie von K. Solche Begriffe und Zeichen sollen *extern* genannt werden. Erst die externen Begriffe zeigen, daß wir mit unserer Körpererweiterung eine Bereicherung der mathematischen Möglichkeiten haben.

Eine Omegazahl ξ heißt unendlich klein oder infinitesimal, in Zeichen $\xi \approx 0$, wenn $|\xi| < \frac{1}{m}$ für jede (endliche) natürliche Zahl m. Für eine zu ξ gehörige Folge $x_n \in K$ und jedes feste $m \in \mathbb{N}$ gilt also $|x_n| < \frac{1}{m}$ für alle hinreichend großen $n \in \mathbb{N}$. Auch dieser Begriff ist extern. Ferner kann man noch von beschränkten Omegazahlen sprechen, wenn es eine natürliche Zahl $m \in \mathbb{N}$ gibt so daß $|\xi| \leqq m$. Im Falle $K = \mathbb{R}$ gibt es zu jeder beschränkten Omegazahl ξ_0 eine eindeutig bestimmte reelle Zahl x_0, die von ξ_0 einen unendlich kleinen Abstand hat, $|\xi_0 - x_0| \approx 0$ oder, anders geschrieben, $x_0 \approx \xi_0$. Man nennt x_0 den *Standard-Teil* von ξ_0, $x_0 = \operatorname{st} \xi_0$. Die damit definierte externe Abbildung der beschränkten Omegazahlen auf die reellen Zahlen dient zur Verbindung der Analysis auf ${}^{\Omega}\mathbb{R}$ mit der konventionellen reellen Analysis.

Wir wollen die Existenz und Eindeutigkeit von $\operatorname{st} \xi_0$ beweisen. Zum Beweis der Eindeutigkeit nehmen wir an, für die reellen Zahlen x_1, x_2 und die beschränkte Omegazahl ξ gelte $x_1 \approx \xi$ und $x_2 \approx \xi$. Das heißt, es gilt für jede natürliche Zahl m sowohl $|x_1 - \xi| < \frac{1}{2m}$ als auch $|x_2 - \xi| < \frac{1}{2m}$, und daher

$|x_1 - x_2| = |(x_1 - \xi) - (x_2 - \xi)| \leq |x_1 - \xi| + |x_2 - \xi| < \frac{1}{m}$. Wegen der Archimedizität von $K \subseteq \mathbb{R}$ folgt $x_1 = x_2$.

Der Beweis läuft im Prinzip darauf hinaus, daß $\approx$ eine transitive Relation ist: Aus $\alpha \approx \beta$ und $\beta \approx \gamma$ folgt $\alpha \approx \gamma$. Wir kommen in Aufgabe 3 darauf zurück.

Für den Existenzbeweis setzen wir zunächst $K = \mathbb{R}$ voraus. Die gegebene beschränkte Omegazahl ξ erzeugt einen Dedekindschen Schnitt in $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, und der Standardteil von ξ ist diejenige reelle Zahl x, welche durch diesen Schnitt definiert ist. Die Differenz $x-\xi$ muß infinitesimal sein, denn anderenfalls läge zwischen x und ξ mindestens eine rationale Zahl. Das aber widerspräche der Gleichheit der von x und ξ erzeugten Dedekindschen Schnitte.

Auch wenn K nicht gleich $\mathbb{R}$ ist, hat die Bildung von $\operatorname{st}\xi$ einen Sinn. Da $1 \in K$ und alle rationalen Operationen mit Ausnahme der Division durch 0 in K unbeschränkt ausführbar sind, enthält K den Körper $\mathbb{Q}$ als Unterkörper. Wieder erzeugen die beschränkten Omegazahlen aus Ω_K Dedekindsche Schnitte in diesem Unterkörper $\mathbb{Q}$, und man ordnet jedem solchen ξ diejenige reelle Zahl $\operatorname{st}\xi$ zu, welche denselben Schnitt erzeugt. Hier wird st als Abbildung der beschränkten Zahlen aus Ω_K auf $\mathbb{R}$ aufgefaßt. In diesem Falle braucht $\operatorname{st}\xi$ nicht in K oder Ω_K zu liegen.

Beispiele und Aufgaben

1. Verifizieren Sie die Axiome des angeordneten kommutativen Körpers für Ω_K!

   Hinweis: Da für alle n gilt $a_n b_n = b_n a_n$, folgt $\alpha\cdot\beta = \beta\cdot\alpha$, etc.

2. Diskutieren Sie das "Archimedische" Axiom! Es heißt: Zu $a,b \in K$ mit $0 < a < b$ gibt es eine natürliche Zahl m, so daß $b < m\cdot a$. In archimedisch geordneten Körpern gibt es keine infinitesimalen oder unendlich großen Elemente.
   Ist K archimedisch geordnet, so gilt für alle $n \in \mathbb{N}$: Zu $0 < a_n < b_n$ existiert eine natürliche Zahl m_n, so daß $b_n < m_n a_n$. In Ω_K hat man daher folgende "Archimedische" Eigenschaft:

   Zu $0 < \alpha < \beta$ existiert eine natürliche (Standard- oder Nichtstandard-) Zahl μ, so daß $\beta < \mu\alpha$. Selbstverständlich wird μ im allgemeinen unendlich groß sein.

3. In seinen "Institutiones calculi differentialis" von 1755 hat Euler zwei Zahlen α,β als *arithmetisch gleich* bezeichnet, wenn (in unserer Schreibweise) $\alpha \approx \beta$; *geometrisch gleich* heißen α,β mit $\alpha\cdot\beta \neq 0$ bei ihm, wenn $\frac{\alpha}{\beta} \approx 1$. Wir schreiben dafür $\alpha \sim \beta$.
   Handelt es sich um Äquivalenzrelationen? Sind diese Relationen für endliche (!) α,β gleichbedeutend? Handelt es sich um Kongruenzrelationen bezüglich der rationalen Rechenoperationen?
   (Eine Äquivalenzrelation $\approx$ heißt eine Kongruenzrelation bezüglich einer Verknüpfung $*$, wenn aus $\alpha \approx \gamma$ und $\beta \approx \delta$ folgt $\alpha * \beta \approx \gamma * \delta$.)

4. Eine Omegazahl μ heißt natürlich, wenn es eine Repräsentantenfolge $m_n \in \mathbb{N}$ für sie gibt. Zeigen Sie: Es gibt sogar eine monoton nicht fallende Repräsentantenfolge, $s_{n+1} \geqq s_n$, $s_\Omega = \sigma = \mu$. (Das ist ein beweistechnisch nützliches Lemma.)

   Hinweise:

   a) μ ist beschränkt durch eine Zahl $M \in \mathbb{N}$. Dann gilt
   $\mu = 1 \vee \mu = 2 \vee \ldots \vee \mu = M$, also $\mu = m \in \mathbb{N}$, und man setze $s_n = m$ für alle n.

   b) $\mu \gg 1$. Dann gibt es zunächst ein $\rho \geqq \mu$ mit $r_{n+1} \geqq r_n$, etwa $r_n = \max\{1, m_k;\ k \leqq n\}$. Damit ist erst recht $\mu < 2^\rho$, und die Dualdarstellung von μ hat höchstens ρ Stellen, $\mu = \sum_{k=0}^{\rho} a_k 2^k$, $a_k \in \{0,1\}$. Man setze $s_n = \sum_{k=0}^{r_n} a_k 2^k$.

2.3 Zahlbereichserweiterung durch Folgenringe

Nach G. Cantor kann man die reellen Zahlen in folgender Weise aus den rationalen Zahlen gewinnen. Man zeichnet in der Menge $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ der rationalen Zahlfolgen die Teilmengen F der Fundamentalfolgen und G der Nullfolgen aus und nennt zwei Fundamentalfolgen genau dann äquivalent, wenn ihre Differenzfolge eine Nullfolge ist. Die Äquivalenzklassen geben die reellen Zahlen.

Will man mit dieser Methode einen größeren Zahlbereich als $\mathbb{R}$ erhalten, so gibt es zwei Möglichkeiten: Man kann statt F eine größere Menge von

Folgen zulassen, oder statt G eine kleinere Menge, oder beides. Damit die Menge der Äquivalenzklassen vernünftige algebraische Eigenschaften hat, wird man von Folgenringen ausgehen; $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$, F und G sind Ringe, wenn man die Addition und Subtraktion und Multiplikation an den Werten der Folgen $a,b,\ldots$ erklärt: $c = a+b$ wenn für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $c(n) = a(n) + b(n)$; $d = a\cdot b$ wenn für alle n gilt $d(n) = a(n)\cdot b(n)$, G ist ein Ideal in F, und daher ist F/G ein Ring und sogar ein Körper, weil G ein maximales Ideal ist. Damit ist $\mathbb{R}$ erhalten. Auf die Anordnungseigenschaften wird man noch achten müssen.

Wir gehen zur Verallgemeinerung dieses Verfahrens von einem angeordneten Körper K aus; man denke wieder an $K = \mathbb{Q}$ oder $K = \mathbb{R}$. Es bieten sich einige Ringe von Folgen an:

$K^{\mathbb{N}}$, der Ring aller Folgen $a\colon \mathbb{N} \to K$,

B, der Ring der beschränkten Folgen: $a \in B$ genau dann wenn es ein $M \in \mathbb{N}$ gibt so daß $|a(n)| \leqq M$ für alle n.

F, der Ring der Fundamentalfolgen: $a \in F$ genau dann wenn es zu jedem $m \in \mathbb{N}$ ein m_o so gibt, daß $|a(n) - a(n')| \leqq \frac{1}{m}$ für alle $n,n' \geqq m_o$.

G, der Ring der Nullfolgen: $a \in G$ genau dann wenn es zu jedem $m \in \mathbb{N}$ ein m_o gibt so daß $|a(n)| \leqq \frac{1}{m}$ für alle $n \geqq m_o$.

V, der Ring der schließlich verschwindenden Folgen: $a \in V$ genau dann wenn höchstens endlich viele $a(n) \neq 0$ sind.

Bekanntlich ist eine Teilmenge M eines Ringes R genau dann ein Unterring, wenn M mit a und b stets auch $a\cdot b$ und $a-b$ enthält; ein Unterring ist genau dann ein Ideal in R, wenn sogar $a\cdot b \in M$ für $a \in R$ und $b \in M$. (Wir setzen Ringe als kommutativ voraus!) Man stellt mühelos fest, daß in der oben angeschriebenen Kette von fünf Ringen jeder ein Unterring aller vorhergehenden ist. Darüberhinaus ist G Ideal in B und sogar maximales Ideal in F, und V ist Ideal sogar in allen vier Vorgängern, aber nicht maximal. (Der Ring der Folgen, welche schließlich auf allen geraden Zahlen verschwinden, ist nämlich ebenfalls ein Ideal und echter Oberring von V). Durch Restklassenbildung zu einem Körper zu kommen gelingt also mit den angegebenen Ringen nur im Cantorschen Falle F/G. Wir wollen trotzdem versuchsweise die Ringe ansehen, die sich sonst noch ergeben.

Will man im Ring der Äquivalenzklassen unendlich kleine Zahlen haben, so werden dafür wohl nur Klassen von Nullfolgen in Frage kommen, und wir dürfen daher nicht alle Nullfolgen mit 0 äquivalent setzen; und bilden wir Äquivalenzklassen im Ring B, so werden wir keine unendlich großen Elemente erwarten können. Das legt nahe, den Ring $K^{\mathbb{N}}/V$ zu untersuchen. (C. Schmieden, D. Laugwitz 1958). Obwohl dieser Ring kein Körper ist, erweist sich seine Untersuchung als nützlich. In ihm kann in einfacher Weise explizit gerechnet werden, und man hat konkrete Beispiele. Die Vergrößerung des Ideals V zu einem maximalen Ideal, auf die wir anschließend kommen werden, läßt sich nämlich nicht in expliziter Konstruktion erreichen, so daß damit - abgesehen von der Körpereigenschaft - keine neuen Einsichten gewonnen werden.

Zwei Folgen a,b aus $K^{\mathbb{N}}$ sind genau dann äquivalent, wenn $a(n) = b(n)$ gilt für fast alle $n \in \mathbb{N}$, oder wenn $a-b \in V$. Für die Äquivalenzklasse, das Element in $K^{\mathbb{N}}/V$, schreiben wir entsprechende griechische Buchstaben, $\alpha = \beta$. Für die Klasse zur Folge $a(n) = n$ soll ein besonderer Buchstabe gewählt werden, nämlich Ω. Die Analogie zu den Bezeichnungen in Abschnitt 2.2 ist beabsichtigt.

Um die langatmige Formulierung "für fast alle n" oder "schließlich für alle n" oder "es gibt ein n_o, so daß für alle $n \geqq n_o$" nicht immer zu wiederholen, und auch für die Zwecke der Verallgemeinerung, führen wir das System Cof der kofiniten Teilmengen von $\mathbb{N}$ ein: *Für* $M \subseteq \mathbb{N}$ *gilt* $M \in Cof$ *genau dann wenn* $\mathbb{N} \setminus M$ *höchstens endlich ist.*

Wir haben zum Beispiel:

$\alpha = \beta$ genau dann wenn $\{n \in \mathbb{N};\ a(n) = b(n)\} \in Cof$

$\alpha+\beta = \gamma$ genau dann wenn $\{n \in \mathbb{N};\ a(n) + b(n) = c(n)\} \in Cof$

$\alpha\cdot\beta = 0$ genau dann wenn $\{n \in \mathbb{N};\ a(n)\cdot b(n) = 0\} \in Cof$.

Dieses Beispiel zeigt: $\alpha\cdot\beta$ kann gleich 0 sein, ohne daß einer der Faktoren gleich 0 ist, der Ring $K^{\mathbb{N}}/V$ enthält Nullteiler. Man setze $a(n) = 1 + (-1)^n$, $b(n) = 1 - (-1)^n$. In solchen Fällen, in denen $a(n)$ wie hier durch einen expliziten Ausdruck in n gegeben ist, schreiben wir statt α auch $a(\Omega)$, hier also $\alpha = 1 + (-1)^{\Omega}$, $\beta = 1 - (-1)^{\Omega}$. Ist insbesondere $a(n) = a \in K$ für fast alle n, so schreiben wir $\alpha = a$.

Auf die algebraischen Eigenschaften von $K^{\mathbb{N}}/V$ brauchen wir nicht weiter einzugehen; da V ein Ideal in $K^{\mathbb{N}}$ ist, handelt es sich um einen Ring, wie wir aus der Algebra wissen. Wir haben zur Kenntnis nehmen müssen, daß dieser Ring sogar Nullteiler enthält und daher nicht einmal in einen Körper eingebettet werden kann.

Die Anordnungsrelationen $<$, $\leqq$ und überhaupt alle Relationen werden von $K^{\mathbb{N}}$ nach dem kanonischen Schema auf $K^{\mathbb{N}}/V$ übertragen:

$\alpha < \beta$ genau dann wenn $\{n \in \mathbb{N};\ a(n) < b(n)\} \in \mathrm{Cof}$,

$\alpha \leqq \beta$ genau dann wenn $\{n \in \mathbb{N};\ a(n) \leqq b(n)\} \in \mathrm{Cof}$.

Die Anordnung ist transitiv. Wir beweisen das für $<$. Sei $\alpha < \beta$ und $\beta < \gamma$, d.h. $M_1 = \{n \in \mathbb{N};\ a(n) < b(n)\} \in \mathrm{Cof}$ und $M_2 = \{n \in \mathbb{N};\ b(n) < c(n)\} \in \mathrm{Cof}$. Dann folgt $\alpha < \gamma$, weil die Menge $M_3 = \{n \in \mathbb{N};\ a(n) < c(n)\} \in \mathrm{Cof}$; dabei benutzen wir zwei wichtige Eigenschaften von Cof:

(F_1) Wenn $M_1 \in \mathrm{Cof}$ und $M_2 \in \mathrm{Cof}$, dann $M_1 \cap M_2 \in \mathrm{Cof}$

und

(F_2) Wenn $M_o \in \mathrm{Cof}$ und $M \supseteq M_o$, dann $M \in \mathrm{Cof}$.

Es ist nämlich $M_3 \supseteq M_1 \cap M_2$.

Die Anordnung ist nicht vollständig: Für das Element $(-1)^\Omega$ gilt weder $(-1)^\Omega = 0$ noch $(-1)^\Omega < 0$ noch $(-1)^\Omega > 0$. Aber es gibt durchaus erfreuliche Aspekte: Wir haben Beispiele für unendlich große Zahlen, wie Ω, Ω^2, Ω^Ω, und für unendlich kleine, wie die Kehrwerte der eben aufgeschriebenen. Auch Zahlen wie $(1+\frac{1}{\Omega})^\Omega$ oder sogar $(1+\frac{x}{\Omega})^\Omega$ gibt es hier, und die folgende Ungleichungskette läßt sich direkt bestätigen:

$$0 < \frac{1}{\Omega^2} < \frac{1}{\Omega} < 1 < (1+\frac{1}{\Omega})^\Omega < \sum_{k=o}^{\Omega} \frac{1}{k!} < 3 < \frac{\Omega}{2} < \Omega < 2^\Omega < \Omega^\Omega.$$

Der Ring $K^{\mathbb{N}}/V$ liefert also reichlich Übungsmaterial für den Anfänger. Daß er trotz seiner Mängel für einen Aufbau der Analysis einiges zu leisten vermag, soll hier nicht weiter verfolgt werden. Ich verweise dazu auf mein früheres Buch (Laugwitz 1978) und die Darstellung bei Schmieden und Laugwitz 1958.

Neben der Eignung für den Unterricht, auf die im letzten Kapitel dieses Buches noch eingegangen wird, spricht auch folgendes für die Beschäftigung mit $K^{\mathbb{N}}/V$: Dieser Ring wird sich in gewissem Sinne als das Minimalmodell für nicht-archimedische Zahlbereiche erweisen. Alle anderen Erweiterungen, welche in Betracht kommen, erben die in diesem Modell bewiesenen Relationen. Das alles wird zu präzisieren sein. Anschließend wird noch zu klären sein, wie sich die Erweiterung durch Folgenringe zu der in 2.2 vorgenommenen Erweiterung durch Adjunktion von Ω verhält.

Wir hatten schon erwähnt, daß man ein V umfassendes Ideal V' in $K^{\mathbb{N}}$ als Menge derjenigen Folgen erhält, welche auf allen hinreichend großen geraden Zahlen verschwinden. Andere Möglichkeiten sind die Menge der Folgen, die auf allen hinreichend großen ungeraden Zahlen oder auf allen hinreichend

großen Quadratzahlen oder Primzahlen gleich 0 sind. Daß man damit Ideale erhält, wird der Leser sofort verifizieren. Offenbar spielen die Nullstellenmengen der Folgen für die Idealeigenschaft eine wesentliche Rolle. Die Eigenschaften (F_1) und (F_2) von Cof waren wichtig für den Beweis der Transitivität der Relation $<$; übrigens benötigt man sie auch zum Beweis der Transitivität von $=$ und damit dafür, daß überhaupt eine Gleichheitsrelation vorliegt. Die Eigenschaften (F_1) und (F_2) besagen, daß Cof ein *Filter* auf $\mathbb{N}$ ist. Weitere Eigenschaften von Cof sind: Cof ist nicht leer; $\emptyset \notin \mathrm{Cof}$; der Durchschnitt aller zu Cof gehörenden Teilmengen von $\mathbb{N}$ ist leer.

Ein nicht leeres System F von Teilmengen von $\mathbb{N}$ soll ein *freier Filter* auf $\mathbb{N}$ heißen, wenn folgendes gilt:

(F_o) $\emptyset \notin F$

(F_1) Mit $M_1 \in F$ und $M_2 \in F$ gilt $M_1 \cap M_2 \in F$

(F_2) Ist $M_o \in F$ und $M \supseteq M_o$, so gilt $M \in F$

(F_3) $\bigcap_{M \in F} M = \emptyset$.

Es ist leicht zu sehen, daß $F \supseteq \mathrm{Cof}$. Anderenfalls gäbe es nämlich ein $n_o \in \mathbb{N}$, so daß $M_o = \{n;\ n_o \leqq n\} \notin F$, und wir wählen n_o minimal mit dieser Eigenschaft. Es ist $n_o \geqq 2$, weil wegen (F_2) gilt $\mathbb{N} \in F$. Wir haben daher $M_1 = \{n;\ n_o - 1 \leqq n\} \in F$. Nun muß es aber wegen (F_3) ein $M_2 \in F$ geben mit $n_o - 1 \notin M_2$. Dann ist $M_1 \cap M_2 \subseteq M_o$, und aus (F_1), (F_2) folgt $M_o \in F$, ein Widerspruch.

Nun bestehe I_F aus genau denjenigen Folgen $a \in K^{\mathbb{N}}$, deren Nullstellenmenge zu F gehört:

$a \in I_F$ genau dann wenn $M_a = \{n \in \mathbb{N};\ a(n) = 0\} \in F$.

I_F ist ein Ideal. Ist nämlich $c = b-a$ und $a,b \in I_F$, so hat man $M_c \supseteq M_a \cap M_b$, und wegen (F_1), (F_2) folgt $c \in I_F$. Ist $a \in I_F$ und $b \in K^{\mathbb{N}}$, so gilt für $d = a \cdot b$ sicherlich $M_d \supseteq M_a$, also $d \in I_F$ wegen (F_2).

Wenn F, G freie Filter auf $\mathbb{N}$ sind mit $F \subseteq G$, so heißt G feiner als F. Offenbar gilt dann $I_F \subseteq I_G$; denn ist $M \in G$, aber $M \notin F$, so gehört die Folge a mit $a(n) = 0$ für $n \in M$, $a(n) = 1$ sonst, zu I_G, aber nicht zu I_F. Andererseits gehört jedes $b \in I_F$ erst recht zu I_G.

Durch fortgesetzte Verfeinerung von Filtern erhält man also immer größere Ideale; vermutlich wird ein Filter, welcher nicht mehr verfeinert werden kann (ein freier Ultrafilter) auf ein maximales Ideal I_U führen, und dann ist $K^{\mathbb{N}}/I_U$ ein Körper.

Die Existenz der – keineswegs eindeutig bestimmten – freien Ultrafilter läßt sich nicht konstruktiv beweisen; man braucht dazu das Zornsche Lemma. Wir verzichten hier auf die Durchführung, für die man z.B. Hinweise findet in: v. Mangoldt - Knopp - Lösch, Einführung in die höhere Mathematik IV, Stuttgart 1973, S. 333-341.

Eine notwendige Bedingung für einen Filter F, so daß $K^{\mathbb{N}}/I_F$ ein Körper ist, erhält man leicht so: Es sei M eine gegebene Teilmenge von $\mathbb{N}$, und a die Folge mit $a(n) = 0$ für $n \in M$, $a(n) = 1$ sonst; b andererseits die Folge mit $b(n) = 1$ für $n \in M$ und $b(n) = 0$ sonst. Für die zugehörigen Elemente α, β von $K^{\mathbb{N}}/I_F$ gilt $\alpha \cdot \beta = 0$, weil $\{n;\ a(n) \cdot b(n) = 0\} = \mathbb{N} \in F$. Wegen der Körpereigenschaft muß $\alpha = 0$ oder $\beta = 0$ gelten, d.h.

$$\{n;\ a(n) = 0\} = M \in F \quad \text{oder} \quad \{n;\ b(n) = 0\} = \mathbb{N} \setminus M \in F.$$

Für einen Filter F, der auf einen Körper führt, hat man also notwendigerweise:

(F_4) Für jedes $M \subseteq \mathbb{N}$ gilt $M \in F$ oder $\mathbb{N} \setminus M \in F$.

(Wegen (F_1) und (F_0) können nicht beide zu F gehören!)
Die Eigenschaft (F_4) ist kennzeichnend für Ultrafilter. Ist (F_4) nämlich erfüllt und gäbe es einen feineren Filter U', der neben allen $M \in U$ noch ein $M' \notin U$ enthielte, so wäre wegen (F_4) ja $\mathbb{N} \setminus M' \in U$, also erst recht $\mathbb{N} \setminus M' \in U'$ und daher wegen (F_1) auch $\emptyset = M' \cap (\mathbb{N} \setminus M') \in U'$, ein Widerspruch zu (F_0). – Ist umgekehrt U ein Ultrafilter, so nehmen wir an, es gäbe ein $M \subseteq \mathbb{N}$ mit $M \notin U$ und auch $\mathbb{N} \setminus M \notin U$. Man bildet dann das System der Obermengen aller $M \cap S$ für alle $S \in U$ und zeigt, daß es sich um einen feineren Filter als U handelt, im Widerspruch zur Ultrafilter-Voraussetzung.

Nun können wir endlich beweisen:
Der Restklassenring $^*K = K^{\mathbb{N}}/I_U$ *ist ein angeordneter Körper.* (Dabei ist U ein Ultrafilter auf $\mathbb{N}$, $K^{\mathbb{N}}$ der Ring der Folgen $a: \mathbb{N} \to K$, I_U das Ideal – der Unterring – derjenigen Folgen, deren Nullstellenmenge zu U gehört.)

Daß es sich um einen Körper handelt, wollen wir, ohne auf die Maximalität von I_U zurückzugreifen, direkt aus (F_4) beweisen. Es fehlt von den Körperaxiomen nur noch die Existenz des Inversen bei der Multiplikation (alles andere sei dem Leser zur Wiederholung überlassen), also: Gegeben sei $\alpha \in {}^*K$; dann ist zu zeigen: Entweder ist $\alpha = 0$ oder es gibt ein $\beta \in {}^*K$ mit $\alpha \cdot \beta = 1$. Sei nun $M = \{n;\ a(n) = 0\}$. Falls $M \in U$, ist $\alpha = 0$ und wir sind fertig. Anderenfalls ist wegen (F_4) $(\mathbb{N} \setminus M) \in U$, und für $n \in \mathbb{N} \setminus M$ setzen wir $b(n) = \frac{1}{a(n)}$, für $n \in M$ kann $b(n)$ beliebig gewählt werden. Es folgt $a(n) \cdot b(n) = 1$ für alle $n \in (\mathbb{N} \setminus M) \in U$, also $\alpha \cdot \beta = 1$. – Wir beweisen nun noch die Linearität der Anordnung: Für $\alpha, \beta \in {}^*K$ gilt genau eine der drei Beziehungen $\alpha = \beta$ oder $\alpha < \beta$ oder $\alpha > \beta$. Es ist für $M_= = \{n;\ a(n) = b(n)\}$, $M_< = \{n;\ a(n) < b(n)\}$ und $M_> = \{n;\ a(n) > b(n)\}$ offenbar $M_= \cup M_< \cup M_> = \mathbb{N}$. Sind $M_<$, $M_>$ beide nicht aus U, dann nach (F_4) ihre Komplemente und damit deren Durchschnitt $(\mathbb{N} \setminus M_<) \cap (\mathbb{N} \setminus M_>) = M_=$, wegen (F_2) und (F_3). Mehr als eine der drei Mengen kann nicht zu U gehören, da sonst $\emptyset$ als ihr Durchschnitt Element von U wäre.

Der Körper $^*K$ ist nicht eindeutig bestimmt, er hängt vom Ultrafilter U ab. So gibt es Ultrafilter, welche die Menge der geraden Zahlen enthalten und andere, welche sie nicht enthalten. Im ersteren Fall ist $(-1)^{\Omega} = +1$, im zweiten gilt $(-1)^{\Omega} = -1$.

Wir wollen noch ausdrücklich bestätigen, daß in Cof hergeleitete Beziehungen auch in jedem $^*K$ gelten. Allgemeiner sei G ein feinerer freier Filter auf $\mathbb{N}$ als F, $F \subseteq G$; der uns besonders interessierende Fall ist $F = \mathrm{Cof}$, $G = U$. Es gibt dann eine "kanonische Abbildung" $K^{\mathbb{N}}/I_F \to K^{\mathbb{N}}/I_G$: Ist $a(n)$ irgendeine Folge, $a \in K^{\mathbb{N}}$, so seien die zugehörigen Elemente in den Ringen mit α_F und α_G bezeichnet. Wenn $\alpha_F = \beta_F$, so ist wegen $F \subseteq G$ erst recht $\alpha_G = \beta_G$, aber das Umgekehrte braucht nicht zu gelten. Die kanonische Abbildung $\alpha_F \to \alpha_G$ ist surjektiv. Es sei nun R eine k-stellige Relation auf dem Grundkörper K, z.B.: Die dreistellige Relation $+$, bei der $(a,b,c) \in +$ bedeutet $a + b = c$. Die Relationen übertragen sich – wieder "kanonisch" – von K auf alle Ringe $K^{\mathbb{N}}/I_F$: Das k-tupel $(\alpha_F, \beta_F, \ldots)$ steht in der Relation R,

$$(\alpha_F, \beta_F, \ldots) \in R \quad \text{genau dann wenn} \quad \{n \in \mathbb{N};\ (a(n), b(n), \ldots) \in R\} \in F.$$

Wir nehmen uns dabei die Freiheit, für die Relationen, die auf diese Weise entstehen, durchweg den Buchstaben R zu verwenden; wer damit nicht zufrieden ist, mag R_F schreiben, also $<_F$, $+_F$. Daß das nicht nötig ist, zeigt die folgende Überlegung:

$$\text{Wenn } F \subseteq G \text{ und } (\alpha_F, \beta_F, \ldots) \in R \text{ in } K^{\mathbb{N}}/I_F, \text{ dann gilt}$$
$$(\alpha_G, \beta_G, \ldots) \in R \text{ in } K^{\mathbb{N}}/I_G.$$

(Denn wenn die Menge der n, so daß $(a(n),b(n),\dots) \in R$ in F liegt, so liegt sie erst recht in G.) Man kann das so ausdrücken: *Die kanonische Abbildung* $K^{\mathbb{N}}/I_F \to K^{\mathbb{N}}/I_G$ *ist ein Epimorphismus bezüglich sämtlicher Relationen* R.

Wir werden im nächsten Kapitel ausführlich auf Mengen und Funktionen eingehen, doch sei einiges hier vorweggenommen. Eine Menge $M \subseteq K$ ist eine einstellige Relation, eine Funktion f eine zweistellige: $(x,y) \in f$ genau dann wenn $y = f(x)$. Wir wissen, wie eine Relation R auf K sich auf einen Ring $K^{\mathbb{N}}/I_F$ kanonisch fortsetzt. Bezeichnen ξ_F, η_F oder kurz ξ, η Elemente des Ringes, so haben wir

$\xi \in M$ genau dann wenn $\{n \in \mathbb{N};\ x(n) \in M\} \in F$,

$\eta = f(\xi)$ genau dann wenn $\{n \in \mathbb{N};\ y(n) = f(x(n))\} \in F$.

Wir haben damit eindeutig bestimmte kanonische Fortsetzungen von Mengen und Funktionen. Ist $K = \mathbb{R}$, $f = \sin$, so ist die Sinusfunktion damit im Ring der Nichtstandard-Zahlen erklärt. Daß wir das gleiche Funktionszeichen weiter verwenden, ist unproblematisch. Denn die Einschränkung auf die Elemente $x \in K$, die hier durch $\xi = x$, d.h. $\{n \in \mathbb{N};\ x(n) = x\} \in F$, repräsentiert sind, gibt wieder die alten Funktionswerte: Ist $y = \sin x$, so ist

$\{n \in \mathbb{N};\ y(n) = \sin x(n)\} \supseteq \{n;\ y(n) = y\} \cap \{n;\ x(n) = x\} \cap \{n;\ y = \sin x\}$, und da alle Mengen rechts Filtermengen sind (die letzte ist gleich $\mathbb{N}$), folgt die Behauptung.

Bei den Teilmengen von K sieht es schon etwas komplizierter aus. Ein Intervall wie $0 \leq x \leq 1$ in K wird, wie es auch vernünftig ist, fortgesetzt auf das Nichtstandard-Intervall $0 \leq \xi \leq 1$, denn wir haben ja

$0 \leq \xi \leq 1$ genau dann wenn $\{n;\ 0 \leq x(n) \leq 1\} \in F$.

Benutzt man aber formal das gleiche Mengenzeichen M in $K^{\mathbb{N}}/I_F$ wie in K, so hat man

$\xi \in M$ genau dann wenn $\{n;\ x(n) \in M\} \in F$.

Als Teilmenge des Rings von Nichtstandard-Zahlen ist M aber viel größer als die Menge $M \subseteq K$. Für $M = \mathbb{N}$ erhält man im "großen" Ring auch alle unendlich großen natürlichen Zahlen als Elemente. Robinson hat daher vorgeschlagen, zur Unterscheidung $^*M$ statt M zu schreiben, wie $^*\mathbb{N}$ und auch $^*K$. Man könnte auch an M_F als Bezeichnung denken. Für den Anfänger mag die Gefahr bestehen, hinter dieser rein bezeichnungstechnischen Frage

ein Problem zu wittern. Es kann geradezu als ein Indiz für ein hinreichendes Verständnis der hier vorgenommenen Zahlbereichserweiterung angesehen werden, ob jemand diese Frage als belanglos durchschaut hat!

Man kann daran denken, das Zeichen M für die "große" Menge von Nichtstandard-Zahlen zu wählen und $M \cap K$ für die Menge ihrer Standard-Elemente. Die Straßburger Schule der Nichtstandard-Analysis schreibt $\underline{M}$ für $M \cap K$ und $\overline{M}$ für $M \setminus \underline{M}$. Es ist also $\mathbb{N}$ die Menge aller (standard und nichtstandard) natürlichen Zahlen, und $\underline{\mathbb{N}}$ die Menge der endlichen (standard) natürlichen Zahlen, $\overline{\mathbb{N}}$ die Menge aller unendlich großen natürlichen Zahlen.

2.4 Vergleich der beiden Zugänge

Bisher haben wir noch nicht einmal angefangen, unsere Desideratenliste abzuarbeiten. Doch soll schon jetzt ein Vergleich der beiden behandelten Zugänge zu den Omega-Zahlen eingeschoben werden, auch im Hinblick darauf, welcher Zugang für die weitere Darstellung zu bevorzugen sein wird. Wir werden grundlagentheoretische und didaktische Gesichtspunkte zu berücksichtigen haben, die Effizienz der beiden Methoden, ihre Verwandtschaft mit historischen Ansätzen untersuchen müssen und nach der Äquivalenz der Zugänge zu fragen haben. Nur Teile dieses Programms behandeln wir in diesem Abschnitt; in Kapitel 6 wird darauf ausführlicher eingegangen.

Der mengentheoretische Zugang in 2.3 knüpfte an Cantors Fundamentalfolgen-Definition der reellen Zahlen an und steht in seinem weiteren Ausbau (Filter, Zornsches Lemma, Ultrafilter) ganz auf dem Boden der Mengenlehre. Seine Entstehung fällt auch in die Zeit, als die Mitläufer Bourbakis das Sagen in der Mathematik hatten mit dem Schlachtruf: Alle Mathematik ist Mengenlehre. Das ist und bleibt natürlich eine in gewisser Weise unwiderlegbare These, und die gegenwärtig arbeitende Generation von Analytikern steht ziemlich fest auf dem Boden der Mengenmathematik.

Diese Auffassung von der Mathematik beherrschte aber bisher nur eine relativ kurze Episode von etwa einem Jahrhundert in der langen Geschichte der Mathematik. Seit der Antike ist Mathematik immer die Lehre vom Beweisen mathematischer Sätze gewesen, und unser Zugang über die Adjunktion von Ω in 2.2 steht in dieser alten Tradition. Wir haben im Leibnizschen Prinzip ja eine Anweisung, wie aus wahren Sätzen einer vorhandenen Theorie (von K) solche einer neuen Theorie (von ${}^{\Omega}K$) herzustellen sind. Aber mit dieser ziemlich trivialen Festsetzung wird der Vorrat an Sätzen über Omegazahlen nicht erschöpft sein; für das weitere müssen wir noch erkunden, welcher Zugang auf die bequemeren Beweise oder möglicherweise auf mehr Sätze führt.

Beide Wege haben ein gemeinsames Anfangsstück, das wir zu Beginn von 2.3 beschritten haben, die Theorie von $K^{\mathbb{N}}/V$. Dann verzweigen sich die Zugänge, und es dürfte Geschmackssache sein, ob man den einen oder den anderen oder vielleicht einen hier noch nicht angegebenen dritten bevorzugt. Bleibt man auf dem Boden der Mengenlehre, so gelangt man zu vielen ${}^{*}K$, und die Schritte auf den Wegen (die Beweise) werden, wie im vorigen Abschnitt schon klar wurde, wenn auch nicht schwierig, so doch langweilig und zeitraubend. Ich bin derzeit mehr für den anderen Weg; daß beide letzten Endes an die gleiche mathematische Landschaft heranführen, werden wir noch einsehen. Zunächst aber stellt sich die Landschaft aus jedem der Blickpunkte, welche wir erreichen können, etwas anders dar.

Fixieren wir beispielsweise im Gelände den Gegenstand $(-1)^{\Omega}$! Sind wir zunächst dem Mengenweg gefolgt und am Ende einer Verzweigung bei einem ${}^{*}K$ angekommen, so kann es sein, daß $(-1)^{\Omega}$ so aussieht wie $+1$, und auf einer anderen Verzweigung wären wir zu einem Ausblick gekommen, in dem $(-1)^{\Omega}$ als -1 erscheint. Der andere Hauptweg verzweigt sich nicht, an seinem einzigen Ende aber steht die Aussicht auf $(-1)^{\Omega} = +1 \vee (-1)^{\Omega} = -1$; vor unserem Blick erscheint kein klares Bild, unsere Augen können nicht zwischen den beiden Möglichkeiten ± 1 unterscheiden.

Könnten wir näher herangehen, dann müßten wir doch erkennen können, was für den Gegenstand $(-1)^{\Omega}$ nun "wirklich" zutrifft!? Wäre das allerdings -1, so würden sich alle irren, die auf einer Verzweigung mit dem Ausblick auf $+1$ gelandet sind, und umgekehrt; und da sie allesamt zuverlässige Mathematiker sind, müssen wir es als absurd betrachten, daß eine bestimmte der beiden Möglichkeiten auf den Gegenstand zutrifft, die andere aber nicht, denn wir können die eine Partei nicht zuungunsten der anderen, genauso "objektiven", bevorzugen.

Zeigt die ganze Überlegung nicht, daß die Infinitesimalmathematik - jedenfalls unsere Darstellung von ihr - Unsinn sein muß, wenn man zu solchen Aussichten gelangt? Wenn das aber Unsinn wäre, so müßten wir die allgemeine Meinung von dem, was zur Mathematik gehört, gründlich ändern. Denn in jedem ${}^{*}K$ gibt es nur wahre Sätze; sie sind in mathematischer Sprache formuliert, und als solche haben sie Bürgerrecht in der Mathematik.

Ich möchte eher das idyllische Gemälde, das der Leser wohl auch als zu naiv empfunden haben wird, nicht für eine treue Wiedergabe der Mathematik halten. Und doch ist es genau diese himmlische Landschaft voller ewiger Wahrheiten, von denen man bei Ausblicken von Plätzen, auf die man von verschiedenen Wegen her gelangt, immer wieder neue entdeckt, welche die Mathematiker bewußt oder unbewußt liebgewonnen haben. Die Vorstellung vom "Ideenhimmel", in dem die mathematischen Wahrheiten darauf warten, entdeckt zu werden, ist Vulgärplatonismus genannt worden (P. Lorenzen).

Es ist nun gerade eine Errungenschaft des Zugangs über die Adjunktion von Ω, daß keine ontologischen Entscheidungen über die Seinsweise der mathematischen Objekte im allgemeinen und des Unendlichen im besonderen getroffen werden müssen. Ich bescheide mich mit einer Regel, die festlegt, wie aus geltenden Sätzen einer Theorie (von K) Sätze einer neuen Theorie (von ${}^{\Omega}K$) hervorgehen. Es wird ein Rezept angegeben, wie aus gültigen Formeln neue gültige Formeln entstehen; dabei muß man in Kauf nehmen, daß manche durchaus sinnvoll erscheinende Formeln wie $(-1)^{\Omega} = 1$ nach diesem Rezept nicht als gültig nachgewiesen werden können, aber auch nicht als ungültig in dem Sinne, daß ihr logisches Gegenteil, die Formel $\neg(-1)^{\Omega} = 1$, ableitbar wäre. Und das, obwohl die Formel $(-1)^{\Omega} = 1 \vee \neg(-1)^{\Omega} = 1$ als gültig zu erweisen ist.

Diese Situation war ein Grund dafür, daß ich ein experimentelles erstes Kapitel vorangestellt habe. Hätte ich mit der jetzt geschilderten Situation begonnen, so wäre mir der an brauchbaren Resultaten interessierte Mathematiker kaum weiter gefolgt. So aber kann ich hoffen, daß die tatsächlichen Erfolge beim Umgang mit dem Infinitesimalen und Infiniten in dem einführenden Kapitel den Boden dafür vorbereitet haben, daß wir uns mit einer Hintergrundtheorie zufrieden geben, welche diese Erfolge absichert; daß diese Hintergrundtheorie Züge aufweist, welche diesem oder jenem nicht behagen, muß ich in Kauf nehmen. Ich ziehe mich auf das Minimalprogramm der - noch zu diskutierenden - Widerspruchsfreiheit zurück.

Die Theorie von ${}^{\Omega}K$ ist bisher nichts als eine Sammlung von für gültig erklärten Formeln $A(\Omega)$. Von einer Menge von Omegazahlen ist streng genommen nicht die Rede gewesen, also nicht von einem Körper ${}^{\Omega}K$ im üblichen Sinne, sondern nur von der Gültigkeit der Regeln des angeordneten Körpers. Der Leser kann sich nachträglich nochmals davon überzeugen, daß in 2.2 so vorgegangen wurde. Allerdings ist eine Formel $\alpha \in {}^{\Omega}K$ oder gleichbedeutend $a(\Omega) \in {}^{\Omega}K$ ja gültig, wenn für alle hinreichend großen natürlichen n gilt $a(n) \in {}^{n}K$; und ${}^{n}K$ sei für alle n gleich dem

Grundkörper K. Wir haben damit die Menge ${}^{\Omega}K$ gegeben. Der nächste Schritt ist der zum Vulgärplatonismus: Wenn die Formel $B(\Omega) \vee C(\Omega)$ gilt, im Sinne unserer Definition der Theorie von ${}^{\Omega}K$, dann nehmen wir an, sie sei wahr in einer Provinz des Ideenhimmels, und weiter nach den allgemein akzeptierten Gesetzen in dieser Region, daß also wenigstens eine der Einzelaussagen $B(\Omega)$ oder $C(\Omega)$ wahr sei. Wir brauchen nicht zu wissen, welche der beiden wahr ist, nehmen aber an, der Sachverhalt sei für ein Wesen mit höherer Einsicht eindeutig klar.

Nun sei c_M die 0,1-Folge, welche die Menge $M \subseteq \mathbb{N}$ charakterisiert: $c_M(n) = 1$ für $n \in M$ und $c_M(n) = 0$ für $n \notin M$. Da für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $c_M(n) = 1 \vee c_M(n) = 0$, haben wir in der Theorie von ${}^{\Omega}K$: Es gilt $c_M(\Omega) = 1 \vee c_M(\Omega) = 0$, und nach unserer vulgärplatonistischen Annahme ist jetzt $c_M(\Omega) = 1$ wahr oder $c_M(\Omega) = 0$. Das sortiert die Teilmengen von $\mathbb{N}$ in zwei disjunkte Untermengen der Potenzmenge $P(\mathbb{N})$ von $\mathbb{N}$, U und $P(\mathbb{N}) \setminus U$. Wir werden zeigen, daß U ein Ultrafilter ist, und dann wird sich ein Zusammenhang von ${}^{\Omega}K$ mit dem Körper ${}^{*}K$ ergeben, der zu diesem Ultrafilter gehört.

Es sei also $M \in U$ für eine Teilmenge $M \subseteq \mathbb{N}$ genau dann, wenn $c_M(\Omega) = 1$. Wir verifizieren nacheinander die Eigenschaften des Ultrafilters aus 2.3:

(F_0) $\emptyset \notin U$. Denn es ist $c_{\emptyset}(n) = 0$ für alle n, also $c_{\emptyset}(\Omega) = 0$.

(F_1) Es sei $M = M_1 \cap M_2$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$c_{M_1}(n) = 1 \wedge c_{M_2}(n) = 1 \Rightarrow c_M(n) = 1,$$

und damit

$$c_{M_1}(\Omega) = 1 \wedge c_{M_2}(\Omega) = 1 \Rightarrow c_M(\Omega) = 1.$$

Das ist aber

$$M_1 \in U \wedge M_2 \in U \Rightarrow M_1 \cap M_2 \in U.$$

(F_2) Ist $M_o \subseteq M$, so gilt: $c_{M_o}(n) = 1 \Rightarrow c_M(n) = 1$ für alle n, also $c_{M_o}(\Omega) = 1 \Rightarrow c_M(\Omega) = 1$, das heißt: Aus $M_o \in U$ folgt $M \in U$, wenn $M_o \subseteq M$.

(F_3) Offenbar gehören die Mengen $\{n;\ n \geq n_o\}$ für jedes $n_o \in \mathbb{N}$ zu U, und deren Durchschnitt ist leer, also gilt sicher $\bigcap_{M \in U} M = \emptyset$.

(F_4) Die Eigenschaft $M \in U$ oder $\overline{M} = (\mathbb{N} \setminus M) \in U$ folgt direkt aus der Definition von c_M, da für alle n gilt $c_M(n) = 1 \vee c_{\overline{M}}(n) = 1$, also $c_M(\Omega) = 1 \vee c_{\overline{M}}(\Omega) = 1$.

Bisher haben wir nur in sehr speziellen Fällen eine Übereinstimmung der Gültigkeit von Aussagen in der Theorie von ${}^{\Omega}K$ mit denen der Theorie von ${}^{*}K = K^{\mathbb{N}}/I_U$, nämlich für Aussagen $a(\Omega) = 1$ und $a(\Omega) = 0$. Damit kann man nun aber mit dem Wahrheitswert w von anderen Aussagen alles erreichen: Sei $A(\Omega)$ eine gegebene Aussage der Theorie von ${}^{\Omega}K$, und sei M die Menge der natürlichen Zahlen n, für die $A(n)$ gilt, $w(A(n)) = 1$ ist; die Funktion w, der Wahrheitswert, ist nach Festsetzung gleich 1 für wahre Aussagen, gleich 0 für falsche. Es ist dann $w(A(n)) = c_M(n)$, und wir erhalten $w(A(\Omega)) = 1$ genau dann wenn $M \in U$ oder: $A(\Omega)$ ist genau dann wahr wenn $\{n;\ A(n) \text{ wahr}\} \in U$. Die Theorien von ${}^{\Omega}K$ und ${}^{*}K$ zum gegebenen U stimmen, unter den gemachten Annahmen des Vulgärplatonismus, überein.

Wir haben erhalten: Hat eine Formel $A(\Omega)$ in der Theorie von ${}^{\Omega}K$ einen Wahrheitswert, 1 oder 0, wahr oder falsch, in dem Sinne, daß für Gültigkeit von $A(\Omega)$ der Wahrheitswert 1, für Gültigkeit von $\neg A(\Omega)$ der Wahrheitswert von $A(\Omega)$ gleich 0 ist, so hat die formal gleiche Aussage in *jeder* Theorie eines ${}^{*}K$ eben denselben Wahrheitswert. Die Theorie von ${}^{\Omega}K$ ist sozusagen der gemeinsame Kern aller möglichen Nichtstandard-Theorien zu den ${}^{*}K$. Sie enthält alle diejenige Infinitesimalmathematik, welche von der willkürlichen Wahl eines speziellen Ultrafilters und sogar von der Existenz der Ultrafilter selbst unabhängig ist. Es scheint mir danach vernünftig, weiterhin diese Theorie von ${}^{\Omega}K$ zu verwenden, denn es ist überhaupt nicht plausibel, daß eine spezielle Eigenschaft, durch einen speziellen Ultrafilter repräsentiert, für die allgemeine Infinitesimalmathematik und ihre Anwendungen von irgendeiner Bedeutung sein könnte.

So bleibt als einziger Nutzen der ${}^{*}K$ übrig, daß sie für den an der mengentheoretischen Grundlegung der Mathematik Orientierten das bringen, was die Gaußsche Zahlenebene für die komplexen Zahlen, die Modelle von Klein, Beltrami und Poincaré für die nichteuklidische Geometrie geleistet hatten: Sie geben Modelle.

Man sagt, Modelle dienten zum Nachweis der Widerspruchsfreiheit; jedenfalls reduzieren die genannten Modelle für komplexe Zahlen und nichteuklidische Geometrien die Frage nach der Widerspruchsfreiheit dieser Theorien auf die der Theorie der reellen Zahlen, und entsprechendes gilt übrigens auch für die euklidische Geometrie, wenn sie mit der analytischen Geometrie des $\mathbb{R}^2$ identifiziert wird. Es handelt sich also um eine relative Widerspruchsfreiheit.

In diesem Sinne geben die Modelle ${}^{*}K$ auch einen Beweis für eine relative

Widerspruchsfreiheit der Theorie von ${}^{\Omega}K$; wenn eine widerspruchsfreie Mengenlehre mit Auswahlaxiom, welches man für die Existenz von Ultrafiltern braucht, inklusive einer Theorie von K vorausgesetzt werden kann. Das ist nach dem gegenwärtigen Stand der Mathematik nicht der Fall. Da wir aber für ${}^{\Omega}K$ die ${}^{*}K$ selbst gar nicht benötigen, lassen sich einfachere Beweise für die Widerspruchsfreiheit führen. Man nehme an, daß die zugrundegelegte Theorie von K widerspruchsfrei ist; dann ist es auch die abgeleitete Theorie von ${}^{\Omega}K$. Anderenfalls wäre in der letzteren Theorie nämlich ein Widerspruch herleitbar, das heißt eine gültige Aussage $A(\Omega) \wedge \neg A(\Omega) = B(\Omega)$. Weil $A \wedge \neg A$ in der alten Theorie unmöglich ist, gilt $B(n)$ in der Theorie von K für kein n. Nun muß man nur noch analysieren, wie eine Herleitung von $B(\Omega)$ aussieht. Man geht aus von einer gemäß dem Leibnizschen Prinzip gültigen Aussage $C_1(\Omega)$; es gilt also $C_1(n)$ für fast alle n. Am Ende einer endlichen Schlußkette $C_1(\Omega) \Rightarrow C_2(\Omega), \ldots, C_k(\Omega) \Rightarrow C_{k+1}(\Omega), \ldots,$ steht $C_m(\Omega) = B(\Omega)$. Es sei M_k die Menge der $n \in \mathbb{N}$, für die $C_k(n)$ in der gegebenen Theorie wahr ist. Wir haben $M_2 \supseteq M_1 \cap \{n;\ C_1(n) \Rightarrow C_2(n) \text{ gilt}\}$, wobei auch die zuletzt hingeschriebene Menge fast alle natürlichen Zahlen enthält. Das ist ja unsere Festsetzung für eine gültige Herleitung in der Theorie von ${}^{\Omega}K$. Also enthält auch M_2 wieder fast alle natürlichen Zahlen, und durch vollständige Induktion nach m ergibt sich das für alle M_k und schließlich für M_m: $B(n)$ ist für alle n mit nur endlich vielen Ausnahmen wahr, während nach unserer Voraussetzung $B(n)$ für kein n gilt.

Kapitel 3: MENGEN UND FUNKTIONEN

3.1 Allgemeine Überlegungen zum Begriff "intern"

Unsere Desiderata bezogen sich nicht auf einzelne Omegazahlen, sondern auf Mengen, Folgen und allgemeinere Funktionen. Es war schon einzusehen, daß wir für beliebige Mengen und Funktionen keine vernünftigen Resultate erwarten können. Andererseits braucht man erfahrungsgemäß in der Analysis und ihren Anwendungen tatsächlich nur speziellere Typen von Mengen und Funktionen. Ein Exemplar, welches wirklich auftritt, wird im allgemeinen durch eine Beschreibung in – selbstverständlich endlich vielen – Worten oder Zeichen der mathematischen Sprache anzugeben sein, zum Beispiel durch einen Formelausdruck. Es gilt, diese vage Beschreibung des Sachverhalts zu präzisieren.

Uns interessieren unter den Mengen besonders die Intervalle wie zum Beispiel $0 \leqq \xi < \Omega$, $-\frac{1}{\Omega} < \xi < \frac{1}{\Omega}$ und auch Intervallteilungen $\xi_o = a$, $\xi_1 = a + \delta$, $\ldots$, $\xi_k = a + k\cdot\delta$, $\xi_\mu = a + \mu\cdot\delta = b$; $\{a + k\cdot\delta;\ 0 \leqq k \leqq \mu\}$, etwa mit $\delta = \frac{b-a}{\mu}$, μ eine unendlich große ganze Zahl.

Ersetzt man hier jeweils Ω durch die Variable n für natürliche Zahlen, so ergeben sich Mengen von Standard-Zahlen, zum Beispiel $S_n = \{x;\ 0 \leqq x < n\}$, $S_n = \{x;\ -\frac{1}{n} < x < \frac{1}{n}\}$, $S_n = \{a + k\cdot d_n;\ 0 \leqq k \leqq m_n\}$ mit $d_n = \frac{b-a}{m_n}$; dabei ist (m_n) eine Folge von natürlichen Standard-Zahlen, welche zur unendlich großen ganzen Zahl μ gehört. Die Folge m_n kann nach Beispiel 4 zu Abschnitt 2.2 monoton nicht fallend gewählt werden. Das Leibnizsche Prinzip gibt allgemein: *Wenn für fast alle natürlichen Zahlen* n *gilt* $x_n \in S_n$, *so gilt* $\xi \in \Sigma$. Die Mengenfolge S_n definiert eine Menge von Nichtstandard-Zahlen, welche wir wieder, unserer allgemeinen Übereinkunft gemäß, mit dem zugehörigen griechischen Buchstaben Σ bezeichnen.

Wir benutzen, wie es im englischen Sprachraum üblich ist, für Mengen das Zeichen S (set), hier besonders, weil der zugehörige griechische Buchstabe Σ im Unterschied zum großen My sich deutlich von seinem lateinischen Pendant abhebt.

Nun kann es vorkommen, daß (fast) alle S_n einander gleich sind, $S_n = S$ für alle $n \geqq n_o$. Dann nennen wir das zugehörige Σ die *Fortsetzung* von S. Man sieht, daß ein Intervall mit Standard-Zahlen als Enden die zu erwartende Fortsetzung hat: Ist $S_n = S = \{x;\ 0 < x \leqq 1\}$, so ist $\Sigma = \{\xi;\ 0 < \xi \leqq 1\}$. Das Intervall wird sozusagen mit Nichtstandard-Zah-

Lehrbücher und Monographien zur Didaktik der Mathematik

Herausgegeben von Norbert Knoche, Universität Essen, und Harald Scheid, Universität Wuppertal

Band 1:
R. Fischer/G. Malle, Mensch und Mathematik

Band 2:
J. Blankenagel, Numerische Mathematik im Rahmen der Schulmathematik

Band 3:
W. Riemer, Neue Ideen zur Stochastik

Band 4:
N. Knoche/H. Wippermann, Vorlesungen zur Methodik und Didaktik der Analysis

Band 5:
D. Laugwitz, Zahlen und Kontinuum

Band 6:
H. Scheid, Stochastik in der Kollegstufe

Zahlen und Kontinuum

Eine Einführung in die Infinitesimalmathematik

von
Prof. Dr. Detlef Laugwitz
Technische Hochschule Darmstadt

1986

Bibliographisches Institut Mannheim/Wien/Zürich
B.I.-Wissenschaftsverlag