<u>Beweis:</u> Wegen der Konvergenz ist insbesondere für reelle $x \in D$ der Wert $F(x) = st\, f_\mu(x)$ wohldefiniert. Aus dem Stabilitätslemma in 3.4 folgt für $\xi \approx x$, daß $f_\mu(\xi) \approx f_\mu(x) \approx F(x)$ für alle $\mu \gg 1$. Jedes f_μ ist eine stetige interne Funktion auf ${}^*D$; das Lemma über stetige interne Funktionen gibt dann die Behauptung. Die Kompaktheit von D wurde benötigt: Zu $\xi \in {}^*D$ brauchten wir ein $x \in D$ mit $\xi \approx x$. □

Faßt man die f_μ als Partialsummen einer Reihe von stetigen Funktionen $g_k(x)$ auf, so folgt noch einmal der

<u>Summensatz von Cauchy:</u> Die Summe $\sum_{k=0}^{\infty} g_k(x)$ einer auf einem Intervall $\{\xi;\ a \leq \xi \leq b\}$ überall konvergenten Reihe stetiger Funktionen $g_k(x)$ ist selbst eine stetige Funktion.

Beispiele und Aufgaben

1. Zeigen Sie, daß $\eta = (1 + \frac{\xi}{\mu})^\mu$ bei festem $\mu \gg 1$ eine für alle beschränkten ξ stetige Funktion ist. (Das ergänzt die Überlegungen in 1.10.)

   Hinweis: Wiederholung von Aufgabe 3 zu 1.8.

2. Beweisen Sie unter Verwendung der Folge (f_n) von stetigen reellen Funktionen auf $a_n \leq x_n \leq b_n$ für die zugehörige feinstetige Funktion ϕ auf $\alpha \leq \xi \leq \beta$:
   a) die Beschränktheit,
   b) die Annahme von Maximum und Minimum,
   c) die quantitative Gleichmäßigkeit der Stetigkeit.

3. Beweisen Sie den Satz von Dini: Wenn eine Folge (f_n) von stetigen reellen Funktionen auf $a \leq x \leq b$ monoton fallend für jedes reelle x gegen Null konvergiert, so ist die Konvergenz gleichmäßig.

   Hinweis: Da gilt $f_{m_n}(x_n) \geq f_{m_n+1}(x_n) \geq 0$, folgt auch für die Nichtstandard-Zahlen des Intervalls $f_\mu(\xi) \geq f_{\mu+1}(\xi) \geq 0$. Wäre die Konvergenz nicht gleichmäßig, so gäbe es ein $\mu \gg 1$, ein ξ und ein endliches $q > 0$, so daß $f_\mu(\xi) \geq q$. Wegen der Monotonie ist $f_m(\xi) \geq q$ für alle endlichem m. Es sei $x_o = st\, \xi$ und m so groß gewählt, daß $f_m(x_o) \leq \frac{q}{2}$, was wegen der Konvergenz von $(f_m(x_o))$ gegen Null möglich ist. Aus der Stetigkeit von f_m folgt ein Widerspruch.

Kapitel 4: DIFFERENTIAL- UND INTEGRALRECHNUNG

Es sei zunächst an die Abschnitte 1-6 des ersten Kapitels erinnert, in denen die Grundlagen der Differential- und Integralrechnung infinitesimalmathematisch entwickelt wurden. Wir brauchen das hier nicht wörtlich zu wiederholen und werden den Kalkül sogleich etwas allgemeiner systematisieren, um ihn auch für interne Funktionen verfügbar zu haben. Zugleich ergeben sich weitere Einblicke in die historische Entwicklung.

4.1 Differentiale und Ableitungen

Für eine in der Umgebung von $x \in \mathbb{R}$ definierte reelle Funktion $y = f(x)$ und für alle $dx \approx 0$ sind die Differential-Quotienten (bei $dx \neq 0$)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x+dx) - f(x)}{dx}$$

immer definiert; haben sie für das feste x und alle von Null verschiedenen dx ein und denselben Standardteil, so heißt die Funktion an der Stelle x ableitbar. Dieser Standardteil wird $f'(x)$ geschrieben und heißt Ableitung. Gleichbedeutend mit $\frac{dy}{dx} \approx f'(x)$ ist die Grundformel

(G) $\quad dy = f(x+dx) - f(x) = f'(x)dx + o(x,dx)dx$ mit
$\quad o(x,dx) \approx 0$ für $0 \neq dx \approx 0$.

Wie sich daraus die Regeln der Differentialrechnung ergeben, ist in 1.1 erörtert worden. Wir können aber mit den inzwischen gewonnenen Einsichten einiges Grundsätzliche ergänzen. Existiert f' in einem ganzen Intervall, so läßt sich diese reelle Funktion auch auf die Omegazahlen des Intervalls fortsetzen, und man kann andererseits auch für die Fortsetzung von f selbst an diesen Stellen Differential-Quotienten bilden. Wie verhält sich die Fortsetzung der Ableitung zu diesen? Gilt (G) auch für Omegazahlen ξ anstelle von x?

Das ist im allgemeinen nicht der Fall; Beispiele finden sich am Ende des Abschnitts. Falls (G) für alle ξ, dx eines Intervalls gilt, liegt eine zusätzliche Eigenschaft vor, welche wir als *gleichmäßige Ableitbarkeit* bezeichnen wollen.

Was aber hat die Ableitung $f'(\xi)$ im allgemeinen Falle dann noch mit der linearen Approximation von $f(\xi + dx) - f(\xi)$ zu tun? Ist wenigstens für hinreichend kleine infinitesimale dx der Ausdruck $f'(\xi)dx$ eine gute Näherung für $f(\xi + dx) - f(x)$? Das gilt tatsächlich, wie wir uns jetzt überlegen wollen.

Es seien ε eine gegebene positive Infinitesimalzahl mit einer definierenden Folge $e_n > 0$ und ξ eine Omegazahl mit der definierenden Folge x_n. Wir setzen Ableitbarkeit von f bei x_n voraus. Dann ist sicher für infinitesimale h

$$\left|\frac{f(x_n + h) - f(x_n)}{h} - f'(x_n)\right| < e_n$$

denn die linke Seite ist sogar infinitesimal. Nach dem Cauchy-Prinzip gibt es eine positive Standardzahl d_n, so daß diese Ungleichung sogar für alle $h = h_n$ mit $|h_n| < d_n$ gilt. Es folgt daher:

Ist die reelle Funktion f an allen Standardzahlen eines Intervalls ableitbar, so gilt für jede Omegazahl ξ des Intervalls: Zu jedem (endlichen oder infinitesimalen) $\varepsilon > 0$ existiert ein (endliches oder infinitesimales) $\delta > 0$, so daß aus $|dx| < \delta$ folgt

$$\left|\frac{f(\xi + dx) - f(\xi)}{dx} - f'(\xi)\right| < \varepsilon, \quad \text{anders ausgedrückt:}$$

Es gilt

$$\text{(G')} \qquad dy = f(\xi + dx) - f(\xi) = f'(\xi)dx + o(\xi,dx)dx$$

mit $|o(\xi,dx)| < \varepsilon$ sobald $|dx| < \delta$.

In den Beispielen zu diesem Abschnitt wird untersucht, wie die Zusatzforderung der Unabhängigkeit des $\delta = \delta(\varepsilon)$ von ξ sich zur gleichmäßigen Ableitbarkeit verhält.

Die Grundformel in der Fassung (G') läßt sich nun als Definition für die Ableitung bei internen Funktionen heranziehen; in dieser allgemeineren Klasse wäre es sicher zu viel verlangt, wenn der Differential-Quotient für *alle* infinitesimalen Zuwächse dx unendlich nahe bei einer Zahl, der Ableitung, liegen müßte. Das würde wichtige Beispiele ausschließen, wie

$$\eta(\xi) = \frac{1}{\pi} \operatorname{arc\,tan} \Omega\xi;$$

für diese Funktion erwarten wir als Ableitung die Deltafunktion

$$\delta(\xi) = \frac{1}{\pi} \frac{\Omega}{1 + \xi^2\Omega^2},$$

deren Werte in der Nähe von $\xi = 0$ unendlich stark schwanken. Wir definieren also:

Eine in einer Umgebung von ξ definierte interne Funktion ϕ heißt an der Stelle ξ ableitbar, wenn es eine Omegazahl α gibt, so daß zu jeder positiven Omegazahl ε eine positive Omegazahl δ existiert mit: Wenn $|dx| < \delta$, dann ist

$$\left|\frac{\phi(\xi + dx) - \phi(\xi)}{dx} - \alpha\right| < \varepsilon.$$

Man sieht, daß α eindeutig bestimmt ist. Gäbe es nämlich eine weitere Zahl β mit der genannten Eigenschaft, so folgte $|\alpha - \beta| < 2\varepsilon$ für jede positive Omegazahl ε, also insbesondere für $\varepsilon = \frac{|\alpha-\beta|}{2}$, ein Widerspruch. Man bezeichnet α als den Wert der Ableitung von ϕ an der Stelle ξ und schreibt dafür $\phi'(\xi)$.

Die Ableitung von ϕ läßt sich bequem berechnen, wenn für die interne Funktion ϕ eine definierende Folge von ableitbaren reellen Funktionen f_n bekannt ist; hat ξ die definierende Folge x_n, so hat $\phi'(\xi)$ die definierende Folge $f_n'(x_n)$. Um das zu sehen, betrachte man zu gegebenem positivem ε mit definierender Folge $e_n > 0$ die wegen der Ableitbarkeit von f_n existierende Folge $d_n > 0$ mit der Eigenschaft: Aus $|h_n| < d_n$

$$\left|\frac{f_n(x_n + h_n) - f_n(x_n)}{h_n} - f_n'(x_n)\right| < e_n,$$

und nenne die zu h_n gehörige Omegazahl dx.

Über die definierenden Folgen erhält man sofort aus den Regeln der Ableitung von Standard-Funktionen die entsprechenden Regeln für interne Funktionen. Die Kettenregel ergibt beispielsweise $\eta'(\xi) = \delta(\xi)$ für die beiden oben genannten Funktionen.

Weiteres Nachdenken über einen Ableitungskalkül für interne Funktionen bleibt uns damit erspart!

Ganz unversehens ist aus dem Differentialkalkül eine Rechnung mit Ableitungen geworden; die Differentiale im Sinne von Leibniz haben wir eigentlich nur am Anfang, bei der Definition und der Herleitung der wichtigsten Ableitungsregeln für Standardfunktionen verwendet; alsbald wurde der Differential-Quotient von der Ableitung verdrängt - übrigens auch im historischen Ablauf, den wir anschließend verfolgen wollen. Doch sind die infinitesimalen und infiniten Zahlen nicht überflüssig geworden: Wir benötigen sie ja als Definitions- und Wertebereiche für *interne* Funktionen, und nach wie vor gilt, daß wir die Ableitung mit beliebiger, auch unendlich kleiner Genauigkeit durch einen Differential-Quotienten ersetzen können.

Der Leibnizsche Kalkül führte auf Schwierigkeiten bei den "höheren" Differentialen. Was soll d^2y bedeuten? Gemeint ist natürlich $d(dy)$, der Zuwachs des Differentials dy, welches seinerseits der Zuwachs der Variablen y ist. In der modernen Funktionsschreibweise mit $y = y(x)$ ist $dy = y(x+dx) - y(x)$, und entsprechend für $x_1 = x + dx$ noch $d_1y = y(x_1 + dx_1) - y(x_1)$. Wenn wir uns, unhistorisch aber für uns leichter durchschaubar, sogleich der Formel (G') bedienen, folgt mit $o_j \approx 0$

$$\begin{aligned} d^2y &= d_1y - dy = y'(x_1)dx_1 - y'(x)dx + o_1dx_1 - o_2dx \\ &= y'(x+dx)dx_1 - y'(x)dx_1 + y'(x)[dx_1 - dx] + o_1dx_1 - o_2dx \\ &= y''(x)dxdx_1 + o_3dxdx_1 + y'(x)[dx_1 - dx] + o_1dx_1 - o_2dx. \end{aligned}$$

Selbst wenn man unterstellt, daß die beiden letzten Terme auch nach Division durch $dx \cdot dx_1$ zusammen nur einen infinitesimalen Beitrag geben, zeigt der Term $y'(x)(dx_1 - dx)/dx \cdot dx_1$, daß im zweiten Differential mit einer Abhängigkeit von der Veränderung des Differentials dx zu dx_1 zu rechnen ist, außer im trivialen Falle, daß $y'(x) = 0$ ist. Hält man die Zuwächse dx konstant, so ist alles in Ordnung. Wenn man in der Newtonschen Kinematik und Mechanik die Zeit als eine Variable mit konstanten Differentialen dt ansieht, so hat man zunächst keine Schwierigkeiten. Will man aber eine Größe als Funktion nicht der Zeit, sondern des Weges ausdrücken, so entsteht das Problem! Bos 1973 und vor ihm Freudenthal hatten ganz mit Recht unter Hinweis auf die höheren Differentiale den Anspruch Robinsons als überzogen bezeichnet, die Nichtstandard-Analysis "rette" nachträglich den Leibnizschen Kalkül. Mit dem Problem kommt sie, wie die Mathematiker in der zweiten Hälfte des 18. Jahrhunderts, auch erst mit dem Begriff der Ableitung zurecht. Leibniz' eigene Überlegungen dazu, über die man sich bei Bos 1973 sehr gut informieren kann, werden nicht wieder aufgenommen.

Euler hat eine auch für Funktionen mehrerer Veränderlicher gut brauchbare Methode angegeben, die der Differential-Koeffizienten: Er setzt $dy = p \cdot dx$ mit dem Koeffizienten p, dann $dp = q \cdot dx$ und hat dann $ddy = d^2y = dp \cdot dx + p \cdot ddx = q \cdot dx^2 + p \cdot d^2x$. Lagrange definiert für Funktionen, welche eine Reihenentwicklung $f(x+h) = f(x) + p(x)h + q(x)h^2 + \ldots$ besitzen, einfach $p = f'$, $q = \frac{1}{2!} f''$, ... (Théorie des fonctions analytiques, 1797). D'Alembert erinnerte daran, daß

Newton - übrigens in einem zweiten Anlauf, der erste war infinitesimalmathematisch - das, was man später Ableitungen nennen sollte, als Grenzwerte eingeführt hatte; in seinem Artikel über das Differential in der Enzyklopädie schreibt d'Alembert: "Newton hat den Differentialkalkül nie als einen Kalkül mit Infinitesimalien angesehen, sondern als eine Methode von ersten und letzten Verhältnissen, das heißt, als eine Methode, die Grenzen dieser Verhältnisse zu finden." Übrigens haben sich Newtons Bezeichnungen $\dot{x}, \dot{y}, \ldots$ für diese "ersten und letzten Verhältnisse" bei Ableitungen nach der Zeit in der Physik bis heute gehalten. Newton hatte eine vernünftige Bezeichnungsweise für Ableitungen, doch setzte sich auf dem Kontinent und später auch in England die Leibnizsche Bezeichnungsweise zunächst durch. Sie ist für Integrale sicherlich suggestiver und eben nicht auf das "Differenzieren" beschränkt.

Funktionen mehrerer Variabler wurden Anfang des 18. Jahrhunderts interessant, im Zusammenhang mit der Variationsrechnung. Wir beweisen hier einen Satz, der wieder von der üblichen Fassung abweicht. Die partiellen Ableitungen einer reellen Funktion $z = u(x,y)$, die in bekannter Weise auf Omegazahlen fortgesetzt wird, definiert man bekanntlich als die gewöhnlichen Ableitungen nach x (oder y) wenn y (oder x) festgehalten ist und schreibt u_x (oder u_y). Es ist üblich, die Funktion u an einer Stelle differenzierbar zu nennen, wenn diese partiellen Ableitungen für eine lineare Approximation des Zuwachses der Funktion sorgen, wenn also $u(\xi + dx, \eta + dy) - u(\xi,\eta) = u_x(\xi,\eta)dx + u_y(\xi,\eta)dy$ + Glieder höherer Ordnung in dx, dy. Man zeigt nun, daß die Existenz der beiden partiellen Ableitungen dafür nicht hinreicht. Das einfachste Beispiel ist wohl $z = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$ an der Stelle $(0,0)$ mit $u_x(0,0) = u_y(0,0) = 1$, aber für $dx = dy = \omega \approx 0$

$$u(0 + dx, 0 + dy) - u(0,0) = \omega \cdot \sqrt[3]{2};$$

der Unterschied gegen

$$u_x dx + u_y dy = 2 \cdot \omega$$

ist nicht von höherer Ordnung klein gegen ω! Untersuchen wir den Sachverhalt näher. Es ist nach dem Mittelwertsatz

$$\begin{aligned} & u(\xi + dx, \eta + dy) - u(\xi,\eta) \\ &= [u(\xi + dx, \eta + dy) - u(\xi, \eta + dy)] + [u(\xi, \eta + dy) - u(\xi,\eta)] \\ &= u_x(\xi + \theta_1 dx, \eta + dy)dx + u_y(\xi, \eta + \theta_2 dy)dy \end{aligned}$$

unter Voraussetzung der Existenz der Ableitungen, mit $0 < \theta_1, \theta_2 < 1$.

Setzt man aber gleichmäßige Ableitbarkeit voraus, so sind die u_x, u_y für alle Argumente stetig (Beispiel 2) in jeder Variablen für sich und daher nach einem früheren Satz (Kapitel 3.5) sogar stetig in beiden Variablen zusammen; mit $u_x(\xi + \theta_1 dx,\ \eta + dy) - u_x(\xi,\ \eta + dy) = o_1 \approx 0$ und $u_y(\xi,\ \eta + \theta_2 dy) - u_y(\xi, \eta) = o_2 \approx 0$ folgt dann die lineare Approximation:

$$(*) \qquad u(\xi + dx,\ \eta + dy) - u(\xi,\eta) = u_x dx + u_y dy + o_1 dx + o_2 dy \quad \text{mit} \quad o_1 \approx 0 \approx o_2,$$
$$u_x = u_x(\xi,\eta), \quad u_y = u_y(\xi,\eta).$$

Wir haben damit schließlich den

Satz: Wenn $z = u(x,y)$ in der infinitesimalen Umgebung von (x,y) gleichmäßig partiell ableitbar ist, dann gilt (*).

Beispiele und Aufgaben

1. Untersuchen Sie die Funktionen $y = \sqrt{x}$ $(x > 0)$ und $y = x^2 \sin \frac{\pi}{x}$ $(x \neq 0)$ mit Ergänzung durch $y = 0$ für $x = 0$ in der Nähe von $x = 0$ auf Ableitbarkeit und gleichmäßige Ableitbarkeit!

 Hinweis: Für $y = \sqrt{x}$, $\xi = dx = \omega^2 \approx 0$ erhält man

$$f'(\xi) = \frac{1}{2\omega}, \quad \frac{f(\xi + dx) - f(\xi)}{dx} = \frac{\sqrt{2} - 1}{\omega}.$$

 Die Differenz ist sogar unendlich groß.

 Die zweite Funktion hat im Nullpunkt selbst die Ableitung $f'(0) = 0$. Für $\xi = \frac{1}{2\Omega + \frac{1}{2}}$, $\xi + dx = \frac{1}{2\Omega}$ erhält man

$$f'(\xi) = 2\xi \cdot \sin \frac{\pi}{\xi} - \pi \cos \frac{\pi}{\xi} = \frac{2}{2\Omega + \frac{1}{2}} \approx 0,$$

 aber

$$\left|\frac{f(\xi + dx) - f(\xi)}{dx}\right| = \left|\frac{f(\xi)}{dx}\right| = \frac{\xi^2}{dx} \approx 2.$$

2. Von K. Stroyan (in: Handbook of mathematical logic, ed. J. Barwise, North Holland 1977, p. 208) stammt die folgende Kennzeichnung der gleichmäßigen

Ableitbarkeit: Die folgenden drei Bedingungen sind äquivalent, wenn f eine (der Einfachheit halber) für alle reellen x definierte reelle Funktion ist.

(i) Es gibt eine reelle Funktion g, so daß für alle beschränkten ξ und alle infinitesimalen $dx \neq 0$ gilt

$$\frac{f(\xi + dx) - f(\xi)}{dx} \approx g(\xi).$$

(ii) Zu jeder Standardzahl x gibt es eine beschränkte Zahl α, so daß aus $\xi \approx x \approx \xi'$ und $\xi \neq \xi'$ folgt

$$\frac{f(\xi) - f(\xi')}{\xi - \xi'} \approx \alpha.$$

(iii) f' existiert und ist eine stetige reelle Funktion von x.

Beweisen Sie diese Äquivalenzen!

Hinweis: Es genügt, die Implikationen (i) => (ii) => (iii) => (i) zu beweisen.

(i) => (ii): Man beachte, daß für $\xi' \approx \xi \approx x$ folgt

$$g(\xi) \approx \frac{f(\xi') - f(\xi)}{\xi' - \xi} = \frac{f(\xi) - f(\xi')}{\xi - \xi'} \approx g(\xi').$$

(ii) => (iii): Wäre f' nicht stetig bei x, so gäbe es ein reelles $\varepsilon > 0$ und x_n, $|x_n - x| < \frac{1}{n}$ mit $|f'(x_n) - f'(x)| \geqq \varepsilon$, also auch x_n', x_n'' mit $|x_n' - x_n| < \frac{1}{n}$, $|x_n'' - x_n| < \frac{1}{n}$ und

$$\left|\frac{f(x_n') - f(x_n'')}{x_n' - x_n''} - f'(x)\right| \geqq \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{also}$$

$$\left|\frac{f(\xi') - f(\xi'')}{\xi' - \xi''} - f'(x)\right| \geqq \frac{\varepsilon}{2},$$

d.h. aber $|\alpha - f'(x)| \geqq \frac{\varepsilon}{3}$. Aus (ii) für $\xi' = x$ folgt aber $\alpha \approx f'(x)$.

(iii) => (i): Wegen des Mittelwertsatzes gilt für $\xi \approx x$

$$f(\xi + dx) - f(\xi) = f'(\xi + \theta dx)dx,$$

also

$$\frac{f(\xi + dx) - f(\xi)}{dx} = f'(\xi + \theta dx) \approx f'(\xi).$$

Man setze $g = f'$.

4.2 Integrale

Die Überlegungen aus 1.5 und 1.6 sind nunmehr, nach dem Beweis der Desiderata, gerechtfertigt. Ehe wir sie auf interne Funktionen übertragen, sollen sie für die allgemeinere Klasse der Stieltjes-Integrale noch einmal bewiesen werden.

Auf einem reellen Intervall $a \leqq x \leqq b$ seien die reellen Funktionen f und h definiert. Von f setzen wir Stetigkeit voraus, und h sei im folgenden eine monoton wachsende oder wenigstens nicht fallende Funktion. Die Definitionen und Ergebnisse gelten auch für Summen und Differenzen von monotonen Funktionen, also für die Funktionen h von beschränkter Schwankung.

Für eine interne Intervallteilung $a = t_o < t_1 < \ldots < t_\mu = b$ $(t_{k+1} \approx t_k)$ und Teilpunkte $\hat{t}_k$ mit $t_k \leqq \hat{t}_k \leqq t_{k+1}$ ist eine Stieltjes-Summe gegeben durch

$$\Sigma = \sum_{k=o}^{\mu-1} f(t_k)(h(t_{k+1}) - h(t_k)).$$

Aus unseren Voraussetzungen folgt

$$\min\{f(t);\ a \leqq t \leqq b\} \cdot (h(b) - h(a)) \leqq \Sigma \leqq \max\{f(t);\ a \leqq t \leqq b\} \cdot (h(b) - h(a))$$

und daher existiert der Standardteil $\operatorname{st} \Sigma$. Ist er von der Wahl der t_k und $\hat{t}_k$ unabhängig, so nennt man ihn das Stieltjes-Integral

$$\operatorname{st} \Sigma = \int_a^b f(t)\, dh(t) = \int_a^b f\, dh.$$

Für $h(t) = t$ ergibt sich das Riemann-Integral. Die allgemeinere Begriffsbildung ist zunächst aus Bedürfnissen der Mechanik erwachsen. Man kann sich das Intervall kontinuierlich und/oder diskret mit Masse belegt denken, und $h(t)$ gebe die Gesamtmasse des Intervalls von a bis t an. Dann ist

$$\frac{1}{h(b)} \int_a^b t\, dh(t)$$

die Koordinate des Schwerpunkts. Ist $h(t)$ ableitbar, so ist $h'(t)$ die Massendichte. Das Stieltjes-Integral erfaßt auch den Fall nicht stetig verteilter Massen. Die Zahl $h(t+dt) - h(t)$ gibt die Masse des Intervalls dt an der Stelle t an.

Wir müssen zeigen, daß zwei Summen zu verschiedenen infinitesimalen Intervallteilungen sich nur unendlich wenig unterscheiden. Wie in 1.5 können wir eine gemeinsame Verfeinerung der Teilungen annehmen. Daher genügt es zu zeigen, daß Σ sich bei Verfeinerung einer Unterteilung nur unendlich wenig ändert.

Wir nehmen ein einzelnes infinitesimales Intervall $\alpha \leqq \tau \leqq \beta$ und unterteilen es, $\alpha = \tau_o < \tau_1 < \ldots < \tau_\rho = \beta$, mit neuen Zwischenstellen $\hat{\tau}_j$. Die Zwischenstelle im alten Intervall sei $\hat{t}$, der gemeinsame Standardteil aller Intervallpunkte sei $\hat{\tau}$. Mit Infinitesimalzahlen o_k und o folgt wegen der Stetigkeit von f:

$$\sum_j f(\hat{\tau}_j)(h(\tau_{j+1}) - h(\tau_j)) = \sum_j (f(t) + o_j)(h(\tau_{j+1}) - h(\tau_j))$$

$$= f(t) \sum_j (h(\tau_{j+1}) - h(\tau_j)) + \sum_j o_j(h(\tau_{j+1}) - h(\tau_j))$$

$$= f(\hat{\tau})(h(\beta) - h(\alpha)) + \sum_j (o_j - o)(h(\tau_{j+1}) - h(\tau_j)).$$

Summiert man über alle alten Teilintervalle auf, so ergibt sich links die neue Stieltjes-Summe und rechts ergeben die ersten Terme gerade die alte Summe; die Summe der Restglieder liegt zwischen $\min\{o_k - o\}(h(b) - h(a))$ und $\max\{o_k - o\}(h(b) - h(a))$ und ist unendlich klein. Damit sind wir schon fertig.

Aus der folgenden identischen Umformung werden wir noch eine Variante erhalten:

$$\sum_{k=o}^{\mu} f(\hat{t}_k)\,[h(t_{k+1}) - h(t_k)]$$

$$= -f(\hat{t}_o)h(t_o) + \sum_{k=o}^{\mu-1} h(t_{k+1})(f(\hat{t}_k) - f(\hat{t}_{k+1})) + f(\hat{t}_\mu)h(t_{\mu+1}).$$

Unabhängig von der Unterteilung ist also

$$\int_a^b h(t)df(t) = \operatorname{st} \sum_{k=o}^{\mu-1} h(t_{k+1})(f(\hat{t}_{k+1}) - f(\hat{t}_k))$$

$$= f(b)h(b) - f(a)h(a) - \int_a^b f(t)dh(t).$$

Das Stieltjes-Integral existiert also auch, wenn der Integrand h von beschränkter Schwankung und die "Differentialfunktion" f stetig ist. Sind beide sogar ableitbar, dann erhält man damit eine neue Herleitung der partiellen Integration.

Weitere Rechenregeln für Stieltjes-Integrale folgen leicht aus den Näherungssummen: $\int f\, d(g+h) = \int f\, dg + \int f\, dh$, usw.

Für spätere Anwendungen erwähnen wir noch zwei Mittelwertsätze.

Erster Mittelwertsatz: Es sei f stetig, h monoton wachsend. Dann existiert ein c, $a < c < b$, so daß

$$\int_a^b f\, dh = f(c)\,(h(b) - h(a)).$$

Denn mit $m = \min\{f(t)\}$, $M = \max\{f(t)\}$ folgt

$$m(h(b) - h(a)) = \int_a^b m\, dh \leqq \int_a^b f\, dh \leqq M \int_a^b dh = M(h(b) - h(a)),$$

und die Existenz von c ergibt der Zwischenwertsatz.

Zweiter Mittelwertsatz: Es gibt bei stetigem f, monoton wachsendem h ein c, $a < c < b$, so daß

$$\int_a^b h\, df = h(a) \int_a^c df + h(b) \int_c^b df.$$

Der Beweis ergibt sich aus der "partiellen Integration":

$$\begin{aligned}\int_a^b h\, df &= h(b)f(b) - h(a)f(a) - \int_a^b f\, dh \\ &= h(b)f(b) - h(a)f(a) - f(c)\,(h(b) - h(a)) \\ &= h(a)(f(c) - f(a)) + h(b)(f(b) - f(c)) = h(a) \int_a^c df + h(b) \int_c^b df.\end{aligned}$$

Existiert $f' = g$, so folgt noch der

Zweiter Mittelwertsatz für Riemann-Integrale mit monoton wachsendem h und integrierbarem g:
Für ein c, $a < c < b$ gilt

$$\int_a^b hg = h(a) \int_a^c g + h(b) \int_c^b g.$$

Die Behandlung des Integrals für *interne Funktionen* ϕ können wir wohl dem Leser überlassen: Gehören zu ϕ, α, β die definierenden Folgen f_n, a_n, b_n und existieren die Integrale $\int_{a_n}^{b_n} f_n(t)dt$, so definiert ihre

Folge das Integral $\int_\alpha^\beta \phi(t)dt$.

Alle Eigenschaften, auch den Fundamentalsatz, erben die Integrale über interne Funktionen von den gewöhnlichen Riemann-Integralen. Stieltjes-Integrale erhält man entsprechend.

Eine "autonome" Begründung der Integrale für interne Funktionen, also eine Behandlung ohne Rückgriff auf die definierenden Folgen, mag im Interesse einer methodischen Reinheit einen gewissen Reiz haben, lohnt aber den Aufwand kaum!

4.3 Differentialgleichungen und Gleichungen mit Ableitungen

Die sogenannten "Differentialgleichungen" sind eigentlich "Ableitungsgleichungen": In $y'' = -a^2 y$ oder $y' = by$ treten ja keine Differentiale auf. In den Anfängen der Analysis handelte es sich aber um Bestimmungsgleichungen, in denen sehr wohl Differentiale der gesuchten Funktionen vorkamen. In der Physik und der Geometrie hat sich die infinitesimale Denkweise, als heuristisch deklariert, für die Herleitung von Differentialgleichungen mit anschließendem Übergang zu Ableitungsgleichungen noch erhalten. Die Gleichungen in Differentialen können aber auch selbst von Interesse sein und als Differenzengleichungen zu infinitesimalen Differenzen aufgefaßt werden.

Nimmt eine Größe (so nennt man in der Physik und auch sonst eine dimensionsbehaftete Variable) proportional zu ihrem jeweiligen Bestand zu oder ab, so hat man in einem kleinen, in der Idealisierung infinitesimalen Zeitintervall dt für den Zuwachs

(1) $\quad dy = y(t + dt) - y(t) = a \cdot y(t)dt + o \cdot dt$

mit einem infinitesimalen $o = o(t,dt)$. Man kann auch sagen, daß der Zuwachs proportional zu einem geeigneten Mittelwert von y sein wird,

(1') $\quad dy = y(t + dt) - y(t) = a \cdot y(\hat{t})dt$ mit $\hat{t} = t + \theta dt$, $0 < \theta < 1$.

Aus diesen Differentialgleichungen erhält man in jedem Falle die Ableitungsgleichung

$$y' = st\,\frac{dy}{dt} = st(a \cdot y(t)) = st(a \cdot y(\hat{t})) = a \cdot y(t);$$

sie gilt an reellen Stellen t, und wir haben $y(\hat{t}) \approx y(t)$ vorausgesetzt, die Größe y soll als Funktion der Zeit t überall stetig sein.

Diese an der physikalischen Bedeutung oder der geometrischen Anschauung orientierte Herleitungsweise hat hier aber nicht bloß heuristischen Wert, sie ist vielmehr völlig streng. Darüber hinaus kann es sogar von Nutzen sein, statt der Ableitungsgleichung die Differentialgleichung direkt zu behandeln. Wenn man dabei die infinitesimalen $o(t,dt)$ vernachlässigt, so bedarf das dann allerdings einer Begründung. Wir bleiben bei dem einfachen Beispiel.

Wählt man $dt = \omega \approx 0$ fest und setzt $t_k = t_o + k \cdot dt$, $y_k = y(t_k)$, so ergibt sich nach Weglassen der o die Differentialgleichung in Form einer Differenzengleichung

$$y_{k+1} - y_k = a\omega y_k$$

oder

$$y_{k+1} = (1 + a \cdot \omega) y_k .$$

Mit der Anfangsbedingung $y(t_o) = y_o$ erhält man daraus die eindeutige Lösung

$$y_\mu = (1 + a\omega)^\mu \; y_o ;$$

an der Stelle $t_\mu = t_o + \mu dt = t_o + \frac{\mu}{\Omega}$ hat man

$$y(t_\mu) = (1 + \tfrac{a}{\Omega})^{\Omega(t_\mu - t_o)} \; y_o$$

und daher für $t \approx t_\mu$ nach den uns bekannten Eigenschaften der Exponentialfunktion schließlich

$$y(t) \approx e^{a(t-t_o)} \; y_o .$$

Das ist sogar eine Gleichung, wenn man die Größe y für reelle t selbst als reell nimmt. Dann verifiziert man, daß die Ableitungsgleichung $y' = a \cdot y$ erfüllt ist und damit auch die Gleichung (1) für das Differential dy.

Es gibt, beispielsweise in der Biologie oder im sozialen Bereich, auch Vorgänge, in denen das Wachstum nicht unbegrenzt ist. Bezeichnet $y(t)$ die Dichte der vorhandenen Lebewesen zur Zeit t, also die mittlere Anzahl pro Flächen- oder Volumeneinheit, so kann man für $y_k = y(kdt)$ ansetzen

(2) $\quad y_{k+1} - y_k = (a - b y_{k+1}) y_k \; dt,$

die Lebensmöglichkeiten werden proportional zur Anzahl der entstehenden Individuen vermindert. Man hat die nichtlineare Differenzengleichung

$$y_{k+1} = (1 + a\omega) y_k - b\omega y_{k+1} y_k ,$$

und für $z_k = \frac{1}{y_k}$ (wenn $y_k \neq 0$)

$$z_k = (1 + a\omega) z_{k+1} - b\omega ,$$

$$z_{k+1} = \frac{1}{1 + a\omega} z_k + \frac{b\omega}{1 + a\omega} .$$

Das ist eine *lineare* inhomogene Differenzengleichung. Eine spezielle Lösung erhält man mit dem Ansatz $z_k = C$; das gibt

$$C = \frac{1}{1 + a\omega} C + \frac{b\omega}{1 + a\omega} ,$$

also $C = \frac{b}{a}$. Die allgemeine Lösung ist

$$z_k = K_o \cdot \frac{1}{(1 + a\omega)^k} + \frac{b}{a}$$

und für $t = k \cdot \omega$

$$z(k\omega) = \frac{K_o}{(1 + \frac{a}{\Omega})^{\Omega t}} + \frac{b}{a} \approx K_o \; e^{-at} + \frac{b}{a}$$

Das gibt schließlich

$$y(t) \approx \frac{a}{C_o \; e^{-at} + b} .$$

Zur Differentialgleichung (2) gehört die Ableitungsgleichung

$$y'(t) = ay - by^2 ,$$

weil $y_{k+1} \approx y_k$ ist. Man verifiziert durch Einsetzen, daß

$$y = \frac{a}{C_o \; e^{-at} + b}$$

für jedes C_o eine Lösung ist. Hinzu kommt die oben ausgeschlossene Lösung $y \equiv 0$. Für $t \gg 1$ gilt

$$y(t) \approx \frac{a}{b},$$

alle nicht verschwindenden Lösungen erreichen diesen Sättigungswert.

In diesen speziellen Beispielen haben wir Lösungen der Ableitungsgleichungen aus solchen der Differenzengleichungen gefunden. Manchmal wird man auch umgekehrt vorgehen, da für Ableitungsgleichungen weitreichende Methoden verfügbar sind. Auch in unseren Beispielen hätte man so vorgehen können (Trennung der Veränderlichen oder Substitution $y = \frac{1}{z}$.) Von Interesse ist allerdings ein allgemeiner Satz, der auf Eulers Integralrechnung (1768) zurückgeht und aus der offensichtlichen Existenz der Lösung von $\frac{dy}{dt} = f(t,y(t))$ auf die Existenz der Lösung von $y' = f(t,y)$ zu schließen erlaubt.

Die Idee ist einfach und naheliegend. Es sei $y(t)$ gesucht mit $y(0) = y_o$ und $y' = f(t,y)$. Man "diskretisiert" zur Differentialgleichung $\frac{dy}{dt} = f(t,y)$ und bestimmt $y_{k+1} = y((k+1)\omega)$ aus y_k und der durch $f(t_k,y_k)$ gegebenen Steigung:

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{\omega} = f(k\omega,y_k),$$

also

$$y_{k+1} = y_k + f(k\omega,y_k)\omega$$

und

$$(3) \qquad y_{\mu+1} = y_o + \sum_{k=o}^{\mu} f(k\omega,y_k)\omega$$

oder für $\tau = (\mu+1)\omega$ und $\eta(k\omega) = y_k$

$$\eta(\tau) = y_o + \sum_{k=o}^{\mu} f(k\omega, \eta(k\omega))\omega.$$

Das wird, unter noch festzustellenden Voraussetzungen, zu

$$(4) \qquad y(t) = y_o + \int_o^t f(\tau, y(\tau))d\tau,$$

wenn wir Stetigkeit von f annehmen und $y(t)$ als eine zu $\eta(\tau)$ gehörige reelle Funktion auffassen dürfen. Dann ist die rechte Seite ableitbar, also auch die linke, und es folgt $y' = f(t,y(t))$ und $y(0) = y_o$.

Der Schritt von (3) nach (4) bedarf noch der Rechtfertigung.

Wir müssen also zeigen, daß es eine stetige reelle Funktion y gibt mit $y(k\omega) \approx \eta(k\omega)$, und daß für diese die Ableitungsgleichung erfüllt ist. Dazu nehmen wir zunächst an, daß $f(t,y)$ für $0 \leqq t,y \leqq 1$ eine überall stetige reelle Funktion sei, und daß $|f(t,y)| \leqq M$ gilt mit einem reellen M. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir $y_o = 0$ annehmen. Dann ist

$$|\eta((k+1)\omega)| \leqq |\eta(k\omega)| + \omega\cdot M,$$

und durch vollständige Induktion folgt

$$(5) \qquad |\eta(\mu\omega)| \leqq \mu\omega \cdot M \leqq M \quad \text{für} \quad 0 \leqq \mu\omega \leqq 1$$

und ebenso für $m > j$

$$(6) \qquad |\eta(m\omega) - \eta(j\omega)| \leqq \sum_{k=j}^{m-1} |f(k\omega, \eta(k\omega))|\omega$$
$$\leqq M(m-j)\omega = M(m\omega - j\omega).$$

Wir denken uns η durch einen Eulerschen Polygonzug auf alle τ, $0 \leqq \tau \leqq 1$, fortgesetzt: Im Intervall $k\omega \leqq \tau \leqq (k+1)\omega$ ist η linear. Wegen der Beschränktheit (5) ist $y(t) = \mathrm{st}\ \eta(t)$ definiert, und wegen (6) ist η eine stetige interne Funktion. Aus dem Lemma über solche Funktionen (Abschnitt 3.6) folgt, daß überall $y(t) \approx \eta(\tau)$, und daß y stetig ist. Es folgt für $t \approx (\mu+1)\omega$

$$y(t) \approx \eta[(\mu+1)\omega] = \sum_{k=o}^{\mu} f(k\omega, \eta(k\omega))\omega$$
$$\approx \sum_{k=o}^{\mu} f(k\omega, y(k\omega))\omega \approx \int_o^t f(\tau, y(\tau))d\tau.$$

Das war zu beweisen. Durch einfache lineare Substitutionen (y ersetzt durch $y+y_o$, t ersetzt durch $ct+d$) erhält man den

<u>Existenzsatz von Euler und Peano:</u> Es sei $f(t,y)$ eine für $a \leqq t \leqq b$, $-M \leqq y-y_o \leqq M$ überall stetige, durch M beschränkte reelle Funktion. Dann gibt es eine Lösung $y(t)$ der Ableitungsgleichung $y' = f(t,y(t))$ in $a \leqq t \leqq b$ mit vorgegebenem $y(a) = y_o$. Diese Lösung kann als Standardteil der Lösung der Differenzengleichung

$$\eta(a+(k+1)\omega) = \eta(a+k\omega) + f(a+k\omega, \eta(a+k\omega))\omega$$

mit $\eta(a) = y_o$ erhalten werden.

Wir haben im Stile Eulers nur die qualitative Stetigkeit und keine quantitativen Aussagen verwendet. Statt $\omega = \frac{1}{\Omega}$ hätten wir irgendeine andere unendlich kleine Zahl $\frac{1}{\Omega'}$ für die Schrittweite wählen können. Es folgt dann aus der starken Umkehrung des Leibnizschen Prinzips: Zu jedem reellen $\varepsilon > 0$ gibt es eine endliche natürliche Zahl $N(\varepsilon)$, so daß für alle $m \geqq N(\varepsilon)$ gilt: Die zur Schrittweite $\frac{1}{m}$ erhaltene Lösung der Differenzengleichung unterscheidet sich um höchstens ε von einer Lösung der Ableitungsgleichung $y' = f(t,y)$. Über die Größe von $N(\varepsilon)$ können wir nichts aussagen.

Die Bedeutung des Satzes liegt darin, daß damit ein Schritt zum Nachweis der Äquivalenz von Differentialgleichung und Ableitungsgleichung getan ist. Die Lösungen der Differentialgleichung führen durch Bildung des Standardteils auf solche der Ableitungsgleichung.

Umgekehrt gibt eine Lösung von $y' = f(t,y)$ nach dem Mittelwertsatz bei $k\omega = t_k < \hat{t}_k < (k+1)\omega$:

$$\begin{aligned} y(t_{k+1}) - y(t_k) &= y'(\hat{t}_k)\omega \\ &= f(\hat{t}_k, y(\hat{t}_k))\omega = f(t_k, y(t_k))\omega + o_k\omega \end{aligned}$$

mit $o_k = f(\hat{t}_k, y(\hat{t}_k)) - f(t_k, y(t_k)) \approx 0$,

wegen der Stetigkeit von f. Mit $\bar{o}$ bezeichnen wir das Maximum der o_k, und das ist wieder unendlich klein. Es sei nun (η_k) eine Lösung der zugehörigen Differenzengleichung

$$\eta_{k+1} - \eta_k = f(t_k, \eta_k)\omega$$

mit $\eta_o = y(t_o)$.

Wir werden nicht erwarten können, daß ohne zusätzliche Voraussetzungen die Lösung η_k unendlich nahe bei $y(t_k)$ bleibt, selbst wenn $\eta_o = y(t_o)$ ist. Denn das zeigt die Lösung $y = t^3$ der Ableitungsgleichung $y' = 3y^{2/3}$: Sie entfernt sich für endliche t von der Lösung der zugehörigen Differenzengleichung, $\eta_k = 0$. Die Stetigkeit von $f(t,y)$ wird nicht ausreichen. Wir setzen daher Lipschitz-Stetigkeit in y voraus: Es gibt eine endliche Zahl L, so daß $|f(t,\bar{y}) - f(t,y)| \leqq L|\bar{y}-y|$ für alle auftretenden $\bar{y},y$. Existiert die partielle Ableitung f_y, so kann man für L eine obere Schranke von f_y wählen, wie der Mittelwertsatz

zeigt; $f(t,y) = 3y^{2/3}$ erfüllt die Voraussetzung bei $y = 0$ nicht.

Aus den beiden Gleichungen

$$y(t_{k+1}) - y(t_k) = f(t_k, y(t_k))\omega + o_k\omega$$

und $\quad \eta_{k+1} - \eta_k = f(t_k, \eta_k)\omega$

folgt für die Abweichung $\delta_k = |y(t_k) - \eta_k|$:

$$0 \leqq \delta_{k+1} \leqq (1 + L\omega)\delta_k + \bar{o}\omega$$

und daraus

$$\begin{aligned} 0 \leqq \delta_m &\leqq (1 + L\omega)^m\delta_o + \bar{o}\omega\,[(1 + L\omega)^{m-1} + \dots + (1 + L\omega) + 1] \\ &\leqq (1 + L\omega)^m\,[\delta_o + \tfrac{\bar{o}}{L}] \approx e^{Lt}\,[\delta_o + \tfrac{\bar{o}}{L}] \approx 0, \end{aligned}$$

wenn $m\omega \approx t$. Wir haben etwas allgemeiner nicht nur $\delta_o = 0$ berücksichtigt. Unser Ergebnis ist:

Ist die Funktion $f(t,y)$ *überall stetig und bezüglich* y *sogar Lipschitz-stetig,* $|f(t,\bar{y}) - f(t,y)| \leqq L|\bar{y}-y|$, *so gilt für Lösungen* $y(t)$ *und* η_k *der Ableitungsgleichung*

$$y' = f(t,y)$$

und der Differenzengleichung

$$\eta_{k+1} = \eta_k + f(t_o + k\omega, \eta_k)\omega:$$

Aus $\eta_o \approx y(t_o)$ *folgt* $\eta_m \approx y(t_o + m\omega)$ *für alle endlichen* $m\omega$.

Die Lösungen entfernen sich nur unendlich wenig voneinander; $y(t)$ kann als Standardteil von η_m (bei $t = \mathrm{st}\ m\omega$) erhalten werden.

In den Beispielen werden einige Folgerungen und Verallgemeinerungen angegeben, von denen für uns besonders die Erweiterung der Ergebnisse auf Ableitungsgleichungen höherer Ordnung und auf Systeme von prinzipiellem Interesse ist. Zusammenfassend kann man sagen: Differentialgleichungen und Ableitungsgleichungen sind in dem Sinne äquivalent, daß ihre Lösungen sich unendlich wenig voneinander unterscheiden, wenn das für die Anfangsbedingungen gilt; es besteht auf diese Weise eine eineindeutige Korrespondenz zwischen den Lösungsmengen. Das Verfahren der Geometer und Physiker, nach Belieben zwischen Differentialgleichung und Ableitungsgleichung hin und her zu wechseln, ist nicht nur heuristischer Art, es ist gerechtfertigt. (Die Voraussetzungen über f, Stetigkeit und Lipschitz-Stetigkeit, sind zu beachten.)

Der zuletzt bewiesene Satz enthält übrigens noch das Resultat: Eine infinitesimale Störung der Anfangsbedingungen bewirkt eine höchstens infinitesimale Änderung der Lösung. Das ist bei vielen physikalischen Problemen sachgemäß.

Beispiele und Aufgaben

1. Man erweitere die Überlegungen auf Systeme von Ableitungsgleichungen $\vec{y}\,' = f(t,\vec{y})$, $\vec{y} = (y_1,\dots,y_N)$ und die zugehörigen Differentialgleichungssysteme.

   Hinweis: Man ersetze den Betrag durch $\|\vec{y}\| = \max\{|y_k|;\ 1 \leq k \leq N\}$.

2. Man behandle Ableitungsgleichungen höherer Ordnung

$$y^{(j)} = g(t,y,y',\dots,y^{(j-1)})$$

durch Zurückführen auf Systeme erster Ordnung, mit $y = y_1$,

$$y_1' = y_2$$
$$y_2' = y_3$$
$$\dots$$
$$y_j' = g(t,y_1,y_2,\dots,y_j).$$

3. Lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten, $\frac{d^2y}{dt^2} = a\frac{dy}{dt} + by$, sind zu untersuchen, insbesondere die Schwingungsgleichung $a = 0$, $b = -c^2$.

   Hinweise: Ist $dy = y_{k+1} - y_k$, so setzt man $d^2y = d(dy) = (y_{k+2} - y_{k+1}) - (y_{k+1} - y_k) = y_{k+2} - 2y_{k+1} + y_k$. Für Differenzengleichungen $y_{k+2} = Ay_{k+1} + By_k$ verwende man den vom Fall erster Ordnung nahegelegten Ansatz $y_k = C\cdot\rho^k$. Man erhält mit $dt = \omega$

$$y_{k+2} - 2y_{k+1} + y_k = a(y_{k+1} - y_k)\omega + by_k\omega^2,$$

$$y_{k+2} = (2 + a\omega)y_{k+1} - (1 + a\omega - b\omega^2)y_k.$$

$y_k = C\cdot\rho^k$ gibt

$$(\rho-1)^2 = a\omega(\rho-1) + b\omega^2$$

$$\rho_{1,2} = 1 + \omega\cdot\frac{a \pm \sqrt{a^2+4b}}{2}.$$

Mit $\lambda_{1,2} = \frac{a \pm \sqrt{a^2+4b}}{2}$ und $t_k = k\omega$ wird das zur Lösung

$$y_k = C_1(1+\omega\lambda_1)^k + C_2(1+\omega\lambda_2)^k \approx C_1e^{\lambda_1 t_k} + C_2e^{\lambda_2 t_k}.$$

Rechts steht nach unseren Überlegungen in Beispiel 2 die Lösung der zugehörigen Ableitungsgleichung $y'' = ay' + by$. In dem Fall, daß $\sqrt{a^2+4b} = \varepsilon \approx 0$ ist, folgt

$$y_k = C_1(1+\omega\lambda_1)^k + C_2(1+\omega(\lambda_1+\varepsilon))^k$$
$$= (C_1 + C_2)(1+\omega\lambda_1)^k + \varepsilon C_2\,\frac{(1+\omega(\lambda_1+\varepsilon))^k - (1+\omega\lambda_1)^k}{\varepsilon}$$
$$\approx K_1\,e^{\lambda_1 t_k} + K_2\,\frac{d}{d\lambda}\,e^{\lambda_1 t_k} = (K_1 + K_2t_k)e^{\lambda_1 t_k}.$$

4.4 Polynome unendlichen Grades

In der Anfangszeit der Analysis, nach 1700, war es üblich, Potenzreihen als Polynome unendlichen Grades aufzufassen und die Hilfsmittel der Algebra der Polynome für allgemeinere Funktionen zu nutzen. Euler hat diese Methode ausgebaut; mit ihr gelang ihm schon 1734 die Summation der Reihen $\Sigma\frac{1}{k^2}$, $\Sigma\frac{1}{k^4}$, ..., ein Problem, das die Analytiker schon lange beschäftigt hatte. (De summis serierum reciprocarum, Op. omnia I_{14}, 73-86). Wir skizzieren einen von Eulers Beweisen.

Für den Sinus ist die Reihenentwicklung bekannt,

$$\frac{\sin x}{x} \approx 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - + \dots + (-1)^{\Omega}\,\frac{x^{2\Omega}}{(2\Omega+1)!}$$

gilt jedenfalls für beschränkte x. Andererseits kennt man die Nullstellen des Sinus und kann die Zerlegung des Polynoms in Linearfaktoren explizit hinschreiben,

$$\frac{\sin x}{x} \approx (1-\frac{x}{\pi})(1+\frac{x}{\pi})(1-\frac{x}{2\pi})(1+\frac{x}{2\pi}) \ \ldots \ (1-\frac{x}{\Omega\pi})(1+\frac{x}{\Omega\pi})$$

$$= (1-\frac{x^2}{\pi^2})(1-\frac{x^2}{(2\pi)^2}) \ \ldots \ (1-\frac{x^2}{(\Omega\pi)^2}).$$

Koeffizientenvergleich ergibt

$$\frac{1}{3!} \approx \frac{1}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\Omega} \frac{1}{k^2}.$$

Ist diese überraschend einfache Lösung korrekt? Die Nullstellen sind ja nicht genau bei den Vielfachen von π gelegen, die Abweichungen werden für endliche k allerdings unendlich nahe bei $k\pi$ liegen; aber jedenfalls geht es um unendlich viele unendlich kleine Vernachlässigungen. Die Zeitgenossen hatten einen anderen Einwand; sie fragten Euler, woher er denn wisse, daß der Sinus nicht noch andere, komplexe Nullstellen habe. Das ließ sich erst ein paar Jahre später, nach der Entdeckung der Formel $\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$ ausschließen. Sie gibt für Nullstellen die Gleichung $e^{2iz} = 1$ mit den einzigen Lösungen $z = \pi k$, k ganz. In Beispiel 1 wird ein Beweis für Eulers Resultat behandelt.

Im 19. Jahrhundert hat die komplexe Funktionentheorie dann die Polynome unendlichen Grades eliminiert: Man behandelte Potenzreihen, die beispielsweise für alle beschränkten komplexen z konvergieren, die sogenannten ganzen Funktionen. Hier soll aber die infinitesimalmathematische Behandlung der Polynome ein Stück weit durchgeführt werden.

Zu untersuchen sei das Polynom

$$(1) \qquad \phi(\zeta) = \sum_{k=o}^{\mu} \alpha_k \zeta^k$$

mit einer internen Koeffizientenfolge α_k. Die α_k brauchen auch für endliche k nicht notwendig Standardzahlen zu sein, und insofern sind unsere Überlegungen allgemeiner als die der üblichen Funktionentheorie; wir erfassen auch Polynome wie $\phi(\zeta) = (1+\frac{\zeta}{\Omega})^{\Omega}$. Eine interessante Frage ist, wie schon bei der Eulerschen Exponentialfunktion, wann $f(z) = \mathrm{st}\ \phi(z)$ eine stetige Funktion ist, und ob dann sogar gilt $f(z) = \sum_{k=o}^{\infty} a_k z^k$ mit

$a_k = \mathrm{st}\ \alpha_k$ für endliche k.

Jedenfalls werden die α_k für endliche k selbst beschränkte Zahlen sein müssen, und für $\mu \gg 1$ muß für endliche z gelten $\alpha_\mu z^\mu \approx 0$, denn sonst herrscht keine Konvergenz. Wäre $\sqrt[\mu]{|\alpha_\mu|} \geqq p \in \mathbb{R}^+$, so hätte man

$$|\alpha_\mu z^\mu| \geqq p^\mu |z|^\mu \geqq 1 \quad \text{für} \quad |z| \geqq \frac{1}{p}.$$

Also werden wir voraussetzen, daß $\sqrt[\mu]{|\alpha_\mu|} \approx 0$ für alle $\mu \gg 1$.

Ist diese Bedingung erfüllt, so gibt es zu $p \in \mathbb{R}^+$ ein endliches $N(p)$, so daß $\sqrt[m]{|\alpha_m|} \leqq p$ für $m \geqq N(p)$, weil das für alle $m \gg 1$ gilt. Es ist dann für $|\zeta| \leqq \frac{q}{p}$, $q \in \mathbb{R}^+$ mit $q < 1$

$$|\alpha_m \zeta^m| \leqq q^m,$$

und man hat eine konvergente geometrische Majorante.

Für $|\zeta| \leqq r$, $|\zeta'| \leqq r$ folgt

$$|\phi(\zeta') - \phi(\zeta)| \leqq |\zeta' - \zeta| \sum_{k \geq 1} |\alpha_k| (|\zeta'|^{k-1} + |\zeta'|^{k-2}|\zeta| + \ldots + |\zeta|^{k-1})$$

$$\leqq |\zeta' - \zeta| \sum_{k \geq 1} |\alpha_k| \, k r^{k-1}.$$

Wegen $\sqrt[\mu-1]{\mu} \approx 1$ für $\mu \gg 1$ ist die Summe hier beschränkt, wenn $r \leqq \frac{q}{2p}$ ist und die α_k für endliche k beschränkte Zahlen sind. Es folgt, daß $\phi(\zeta)$ für alle beschränkten ζ eine stetige Funktion mit beschränkten Werten ist. Das gilt dann auch für Real- und Imaginärteil von $\phi(\zeta)$, und nach dem Lemma über stetige interne Funktionen (Abschnitt 3.6) folgt:

$$f(z) = \mathrm{st}\ \phi(z)$$

ist stetig für alle Standardzahlen z, und $f(\zeta) \approx \phi(\zeta)$ für alle beschränkten komplexen Omegazahlen ζ.

Bei gegebenem z gibt es zu $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ ein endliches $m(\varepsilon)$, so daß

$$|\phi(z) - \sum_{k=o}^{m(\varepsilon)} \alpha_k z^k| < \varepsilon,$$

also mit $a_k = \mathrm{st}\ \alpha_k$ nach Übergang zu Standardteilen

$$|f(z) - \sum_{k=o}^{m(\varepsilon)} a_k z^k| < 2\varepsilon.$$

Daraus folgt

$$f(z) = \sum_{k=o}^{\infty} a_k z^k.$$

Wir haben damit bewiesen:

Hauptsatz über Polynome unendlichen Grades: Es sei (α_k) eine interne Folge von komplexen Omegazahlen, so daß α_k für jedes endliche k eine beschränkte Zahl ist und $\sqrt[\mu]{|\alpha_\mu|} \approx 0$ für alle $\mu \gg 1$. Für das Polynom vom Grade $\gamma \gg 1$

$$\phi(\zeta) = \sum_{k=o}^{\gamma} \alpha_k \zeta^k$$

gilt: ϕ ist für beschränkte ζ stetig, und $\phi(\zeta)$ ist eine beschränkte Zahl. Für $f(z) = \operatorname{st} \phi(z)$ gilt $f(\zeta) \approx \phi(\zeta)$ für alle beschränkten ζ, und es ist mit $a_k = \operatorname{st} \alpha_k$ (k endlich)

$$f(\zeta) = \sum_{k=o}^{\infty} a_k \zeta^k.$$

Die Polynome unendlichen Grades sind aber nicht nur, wie es hier scheinen mag, ein Ersatz für die Potenzreihen. Sie eignen sich darüber hinaus als Hilfsmittel zur Behandlung von stetigen Funktionen und sogar von Distributionen, ganz im Sinne von Eulers Versuch einer Algebraisierung der Analysis. Das alles beruht auf dem Approximationssatz von Weierstraß, welchen ich hier ohne Beweis angeben will. Ein Beweis wird sich im Zusammenhang mit den trigonometrischen Reihen (Kapitel 5) nebenbei ergeben.

Approximationssatz von Weierstraß: Es sei f eine auf $a \leqq x \leqq b$ stetige reelle Funktion, $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ gegeben. Dann gibt es ein Polynom

$P(x) = \sum_{k=o}^{m} a_k x^k$, so daß für alle x aus dem Intervall gilt

$|f(x) - P(x)| < \varepsilon$.

Der Satz überträgt sich auf feinstetige interne Funktionen ϕ auf beliebigen, auch unendlich langen Intervallen $\alpha \leqq \xi \leqq \beta$. Man wähle zu den Omegazahlen $\varepsilon, \alpha, \beta$ und zur Funktion ϕ Folgen e_n, a_n, b_n und stetige f_n: Ist ϕ eine auf $\alpha \leqq \xi \leqq \beta$ eine feinstetige interne Funktion und ε eine positive Omegazahl, die auch unendlich klein sein darf, so gibt es ein Polynom Π (unendlichen Grades), so daß für alle ξ, $\alpha \leqq \xi \leqq \beta$, gilt

$$|\phi(\xi) - \Pi(\xi)| < \varepsilon.$$

Das Polynom $\Pi(\xi) = \sum_{k=o}^{\gamma} \alpha_k \xi^k$ wird dabei andere Eigenschaften haben als bei den Potenzreihen. Die α_k brauchen für endliche k keine beschränkten Zahlen mehr zu sein, und für unendlich große μ wird $\sqrt[\mu]{|\alpha_\mu|}$ nicht notwendig unendlich klein sein. Der Satz hat mehr beweistechnische als numerische Bedeutung.

Beispiele und Aufgaben

1. Zeigen Sie

$$\frac{\sin x}{x} = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right).$$

Hinweise: Man kann den Hyperbelsinus $\sinh x$ untersuchen und anschließend x durch ix ersetzen. Es ist $2 \sinh x = e^x - e^{-x} \approx (1+\frac{x}{\mu})^\mu - (1-\frac{x}{\mu})^\mu$ für beschränkte x und $\mu \gg 1$. Ein Ausdruck $a^\mu - b^\mu$ hat die reellen Faktoren $a^2 + b^2 - 2ab \cos \frac{2k\pi}{\mu}$. Das gibt hier

$$\begin{aligned}(1+\tfrac{x}{\mu})^2 + (1-\tfrac{x}{\mu})^2 - 2(1-\tfrac{x^2}{\mu^2}) \cos \tfrac{2k\pi}{\mu} &= 2(1-\cos\tfrac{2k\pi}{\mu}) + 2(1+\cos\tfrac{2k\pi}{\mu})\tfrac{x^2}{\mu^2} \\ &= 4 \sin^2 \tfrac{k\pi}{\mu}\left(1 + \frac{x^2}{\mu^2 \tan^2 \frac{k\pi}{\mu}}\right)\end{aligned}$$

Eulers Idee ist, für $\frac{k}{\mu} \approx 0$ den Sinus und den Tangens durch $\frac{k\pi}{\mu}$ zu ersetzen, so daß sich Faktoren

$$4\left(\frac{k\pi}{\mu}\right)^2 \left(1 + \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)$$

ergeben. Genau ergibt sich für $\mu = 2\Omega$

$$\frac{\sinh x}{x} \approx F \cdot \prod_{k=1}^{\Omega} \left(1 + \frac{x^2}{4\Omega^2 \tan^2 \frac{k\pi}{2\Omega}}\right),$$

und für $x = 0$ folgt für den konstanten Faktor $F \approx 1$. Wir setzen

$$\phi_m = \log \prod_{k=1}^{m} \left(1 + \frac{x^2}{4\Omega^2 \tan^2 \frac{k\pi}{2\Omega}}\right) - \log \prod_{k=1}^{m} \left(1 + \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right).$$

Wir müssen $\phi_\Omega \approx 0$ zeigen. Jedenfalls ist $\phi_m \approx 0$ für alle endlichen m, also auch noch für $m \leqq \rho$ mit $\rho \gg 1$. Bei $\rho \geqq \Omega$ sind wir fertig. Sonst folgt alles aus

$$\phi_\Omega - \phi_\rho = \sum_{k=\rho+1}^{\Omega} \left[\log \left(1 + \frac{x^2}{4\Omega^2 \tan^2 \frac{k\pi}{2\Omega}}\right) - \log \left(1 + \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)\right] \approx 0,$$

weil beide Reihen konvergieren:

$$0 < \log \left(1 + \frac{x^2}{4\Omega^2 \tan^2 \frac{k\pi}{2\Omega}}\right) < \log \left(1 + \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right) < \frac{x^2}{k^2\pi^2}$$

gilt wegen

$$\tan \frac{k\pi}{2\Omega} > \frac{k\pi}{2\Omega} \quad \text{und} \quad \log(1+h) = h - \frac{h^2}{2} + - < h.$$

(Beweis nach W.A.J. Luxemburg).

2. Unter den Voraussetzungen des Hauptsatzes gilt

$$f'(\zeta) = \sum_{k=o}^{\infty} a_k \cdot k\zeta^{k-1} \approx \phi'(\zeta)$$

$$= \sum_{k=o}^{\mu} \alpha_k \cdot k\zeta^{k-1}$$

für beschränkte ζ.

Hinweis: Für $\mu \gg 1$ ist $\sqrt[\mu-1]{\mu} \approx 1$, also $\sqrt[\mu-1]{|\alpha_\mu \cdot \mu|} \approx 0$.

3. Man zeige direkt (ohne Verwendung des Weierstraßschen Approximationssatzes): Zu gegebenem $\varepsilon > 0$ (endlich oder unendlich klein) gibt es ein Polynom P (unendlichen Grades), so daß für alle endlichen und unendlich kleinen ξ gilt $|P(\xi) - |\xi|| < \varepsilon$.

(Hinweise: P kann durch zweimalige Integration von 2δ gewonnen werden, mit einer geeigneten Deltafunktion δ. Oder: Man verwende die Binomialentwicklung für $\sqrt{1-h}$ bei $h = (1 - \frac{\xi^2}{\Omega^2})$ und beachte $|\xi| = \Omega\sqrt{1-h}$.)

4.5 Deltafunktionen

Es soll jetzt an die Abschnitte 1.14 und 1.15 angeknüpft werden. Eine Deltafunktion im Sinne der physikalischen Vorstellung ist eine - selbstverständlich interne - Funktion mit $\delta(\xi) \approx 0$ für alle nicht infinitesimalen ξ, und $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1$.

In 1.15 hatte sich ergeben, daß diese anschaulich einleuchtenden Eigenschaften für mathematische Zwecke zu einschränkend sind; was innerhalb der Mathematik wirklich gebraucht wird, ist die Gültigkeit von $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)f(t)dt \approx f(0)$ für hinreichend vernünftige reelle Funktionen f.

Übrigens ist leicht zu sehen, daß es sehr viele Beispiele für Deltafunktionen gibt. Es sei g irgendeine integrierbare, auf ganz $\mathbb{R}$ definierte reelle Funktion und μ eine unendlich große Zahl. Außerdem sei $\int_{-\infty}^{\infty} g(t)dt = 1$. Dann gilt offenbar für $\delta(t) = \mu g(\mu t)$, daß $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1$. Ist g darüberhinaus glockenförmig, das soll heißen, nichtnegativ und von $t = 0$ aus nach beiden Seiten monoton fallend, so ergibt sich eine Deltafunktion im anschaulich-physikalischen Sinne. Auf diese Weise erhält man neben dem "Monster" $\delta(\xi) = \frac{\sin \mu\xi}{\pi\xi}$ die anschaulich günstigeren Funktionen

$$\delta(\xi) = \frac{\mu}{\pi(1 + \xi^2\mu^2)}; \quad \delta(\xi) = \frac{\mu}{\sqrt{\pi}} e^{-\mu^2\xi^2}; \quad \delta(\xi) = \frac{\mu}{2} \text{ für } |\xi| \leqq \frac{1}{\mu}, \quad \delta(\xi) = 0 \text{ sonst.}$$

Es soll untersucht werden, unter welchen Voraussetzungen an δ für hinreichend viele reelle Funktionen f gilt $\int \delta f \approx f(0)$.

<u>Erster Darstellungssatz für Deltafunktionen:</u> Es sei die interne Funktion δ für alle $|\xi| \leqq p$ (p Standardzahl) definiert und feinstetig, und es gelte

(1) $\delta(-\xi) = \delta(\xi)$; (2) $\delta(\xi) \approx 0$ für alle endlichen ξ, $|\xi| \leqq p$.

(3) $\int_{-p}^{p} \delta(t)dt \approx 1$; (4) $\delta(\xi) \geqq 0$ für $\xi \approx 0$.

Dann gilt für jede reelle integrable Funktion f, welche bei 0 stetig ist, und für $-p \leqq -a < 0 < b \leqq p$ (a,b Standardzahlen), daß

$$\int_{-a}^{b} \delta(\tau)f(\tau)d\tau \approx f(0).$$

<u>Beweis:</u> Es gibt sogar ein infinitesimales $\beta > 0$, so daß (2) für alle ξ mit $p \geqq |\xi| \geqq \beta$ gilt. Man wähle $\beta = \frac{1}{\rho}$, wobei ρ ein unendlich großes Element der internen Menge von natürlichen Zahlen ist:

$$\{\sigma;\ \frac{1}{\sigma} \leqq |\xi| \leqq p \ \Rightarrow\ |\delta(\xi)| \leqq \frac{1}{\sigma}\}.$$

Wegen der Feinstetigkeit wird das Maximum ε von $|\delta(\xi)|$ auf $\beta \leqq |\xi| \leqq p$ angenommen und ist infinitesimal. Es folgt

$$\left|\int_{-p}^{-\beta} \delta\right| + \left|\int_{\beta}^{p} \delta\right| \leqq \int_{-p}^{-\beta} |\delta| + \int_{\beta}^{p} |\delta| \leqq 2p\varepsilon \approx 0.$$

Es sei nun $g(x) = f(x) - f(0)$. Dann haben wir

$$\left|\int_{-a}^{b} \delta(\tau)g(\tau)d\tau\right| \leqq \int_{-a}^{-\beta} |\delta g| + \left|\int_{-\beta}^{+\beta} \delta g\right| + \int_{\beta}^{b} |\delta g|.$$

Hier sind der erste und der dritte Summand rechts infinitesimal, denn aus der Integrierbarkeit von g folgt

$$\int_{\beta}^{b} |\delta g| \leqq \varepsilon \cdot \int_{0}^{p} |g| \approx 0.$$

Den zweiten Summanden schätzen wir ab, mit den minimalen und maximalen Werten $\underline{g}$ und $\overline{g}$ von $g(\tau)$ in $|\tau| \leqq \beta$, wegen $\delta(\tau) \geqq 0$:

$$\underline{g} \approx \underline{g} \int_{-\beta}^{\beta} \delta \leqq \int_{-\beta}^{\beta} g\delta \leqq \overline{g} \int_{-\beta}^{\beta} \delta \approx \overline{g}.$$

Wegen der Stetigkeit von f bei 0 ist aber $\underline{g} \approx 0 \approx \overline{g}$, und es folgt $\int_{-a}^{b} \delta g \approx 0$, also

$$0 \approx \int_{-a}^{b} \delta(\tau)\,[f(\tau) - f(0)]d\tau \approx \int_{-a}^{b} \delta(\tau)f(\tau)d\tau - f(0),$$

wie behauptet. □

Die Symmetrieeigenschaft (1) haben wir im Beweis nicht verwendet; sie ist aber für folgende leichte Verallgemeinerung erforderlich:

<u>Korollar 1:</u> Unter den Voraussetzungen an δ wie im ersten Darstellungssatz gilt für ein reelles integrables f mit $f(\alpha) \approx f(+0) \in \mathbb{R}$, $f(-\alpha) \approx f(-0) \in \mathbb{R}$ für alle positiven $\alpha \approx 0$, daß

$$\int_{-a}^{b} \delta(\tau)f(\tau)d\tau \approx \frac{f(-0) + f(+0)}{2}.$$

Der Beweis ergibt sich wie im voranstehenden Satz.

Wir haben hier nicht $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta f \approx f(0)$ bewiesen, sondern uns mit endlichen Intervallen um 0 begnügt. Das wird für unsere Anwendungen ausreichen, bei denen wir es mit periodischen Funktionen zu tun haben werden und nur über das endlich lange Periodenintervall integrieren müssen. In der Distributionstheorie ist es üblich, sich auf sogenannte Testfunktionen f zu beschränken, welche außerhalb eines endlichen Intervalls verschwinden. Es genügt auch, daß $|f(t)|$ für große $|t|$ nicht zu stark wächst. Dabei kommt es auf den Charakter von δ an.

Gerade für die Behandlung der trigonometrischen Funktionen sind die Voraussetzungen an die Deltafunktion im Ersten Darstellungssatz zu stark, denn sie schließen die Funktion von Dirichlet aus (Gleichungen (2), (3) aus Abschnitt 1.15). Wir haben aber in 1.15 gesehen, daß das Integral dieser Funktion, die Funktion η in Gleichung (4) und (5), sich fast vernünftig verhält. Sieht man vom Gibbs'schen Phänomen ab, so ist η fast eine Einheitssprungfunktion. Die Abweichung ist endlich, die Sprunghöhe 1 wird nur um 18% übertroffen, und die Abweichung spielt sich in einem unendlich kleinen Intervall ab. Das nehmen wir in die Voraussetzungen des schärferen Satzes auf:

<u>Zweiter Darstellungssatz für Deltafunktionen:</u> Die interne Funktion δ sei feinstetig für $-p \leqq \xi \leqq p$ (p eine Standardzahl) und es gelte

(1a) $\eta(\xi) = \int_{0}^{\xi} \delta(t)dt \approx \frac{1}{2}\,\mathrm{sign}\,\xi$ für alle endlichen ξ, $0 < |\xi| \leqq p$;

(2a) es gibt eine endliche Zahl B mit $|\eta(\xi)| \leqq B$ für alle $\xi \approx 0$.

Dann gilt:

(A) Es sei f eine reelle Funktion von auf dem Intervall $|x| \leqq p$ beschränkter Schwankung, und a,b,x seien Standardzahlen mit $-p \leqq x-a < x+b \leqq p$. Es ist

$$\int_{x-a}^{x+b} \delta(t-x)f(t)dt \approx \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2}.$$

(B) Wenn zusätzlich f sogar stetig ist in einer endlichen Umgebung der Omegazahl ξ, dann ist bei $-p \leqq \xi-a < \xi+b \leqq p$

$$\int_{\xi-a}^{\xi+b} \delta(\tau-\xi)f(\tau)d\tau \approx f(\xi).$$

Beweis:

(A) Als Funktion von beschränkter Schwankung ist f eine Differenz zweier monotoner Funktionen, und wir können f daher selbst als monoton wachsend voraussetzen. Aus (1a) folgt die Existenz eines infinitesimalen $\beta > 0$, so daß sogar

$$\eta(\xi) \approx \frac{1}{2} \operatorname{sign} \xi \quad \text{für} \quad \beta \leq |\xi| \leq p.$$

Wir können den Zweiten Mittelwertsatz aus Abschnitt 4.2 anwenden:

$$\begin{aligned}\int_x^{x+b} \delta(t-x)f(t)dt &= \int_0^b f(s+x)d\eta(s)\\ &= \int_0^\beta f(s+x)d\eta(s) + \int_\beta^b f(s+x)d\eta(s)\\ &= \int_0^\beta \delta(s)f(s+x)ds + f(\beta+x)\int_\beta^\alpha d\eta(s) + f(b+x)\int_\alpha^b d\eta(s)\end{aligned}$$

gilt mit einem α zwischen β und b. Die beiden letzten Summanden sind nach unseren Voraussetzungen über η unendlich klein. Es ist $f(\sigma+x) = f(x+0) + \varepsilon(\sigma)$ mit einer monoton wachsenden Funktion ε, für die $\varepsilon(\sigma) \approx 0$ ist für $0 \leq \sigma \approx 0$. Daraus folgt

$$\begin{aligned}\int_0^\beta \delta(s)f(x+s)ds &= f(x+0)\int_0^\beta \delta(s)ds + \int_0^\beta \delta(s)\varepsilon(s)ds\\ &\approx \frac{1}{2} f(x+0) + \varepsilon(0)\int_0^\gamma \delta(s)ds + \varepsilon(\beta)\int_\gamma^\beta \delta(s)ds\\ &\approx \frac{1}{2} f(x+0),\end{aligned}$$

wieder nach dem zweiten Mittelwertsatz und nach (2a). Ganz entsprechend folgt $\int_{x-a}^{x} \delta(t-x)f(t)dt \approx \frac{1}{2} f(x-0)$.

(B) Wir dürfen annehmen, daß $f(s+\xi) = f(\xi) + \varepsilon(s)$ ist mit einer monotonen Funktion ε, für welche $\varepsilon(\sigma) \approx 0$ ist für $\sigma \approx 0$. Wieder mit dem Zweiten Mittelwertsatz und den Voraussetzungen (1a) und (2a) ergibt sich ohne weiteres

$$\int_{\xi-a}^{\xi+b} \delta(\tau-\xi)f(\tau)d\tau = \int_{-a}^{b} \delta(\sigma)f(\sigma+\xi)d\sigma \approx \int_{-\beta}^{\beta} \delta(\sigma)f(\sigma+\xi)d\sigma$$

$$= f(\xi)\int_{-\beta}^{\beta} \delta(\sigma)d\sigma + \varepsilon(-\beta)\int_{-\beta}^{\alpha} \delta(\sigma)d\sigma + \varepsilon(\beta)\int_{\alpha}^{\beta} \delta(\sigma)d\sigma \approx f(\xi). \quad \square$$

Man kann auf die Idee kommen, die Ersetzung von δ durch das Integral η zu wiederholen und $\gamma(\xi) = \int_0^\xi \eta(\xi)d\xi$ heranzuziehen, mit der plausiblen Annahme

$$\gamma(\xi) \approx \frac{1}{2}|\xi| \quad \text{für beschränktes} \quad \xi.$$

Hier wird das Leben sehr einfach, wenn man für f ziemlich starke, für unsere Anwendungen auch zu starke, Voraussetzungen macht. Die Distributionstheoretiker nennen f eine Testfunktion, wenn hinreichend viele Ableitungen existieren und f mit allen benötigten Ableitungen außerhalb eines endlichen Intervalls $|\xi| < A$ verschwindet. Unter diesen Voraussetzungen sieht man mit Hilfe von partiellen Integrationen

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau)f(\tau)d\tau = \int_{-A}^{+A} \delta(\tau)f(\tau)d\tau &= \eta(\tau)f(\tau)\Big|_{-A}^{+A} - \int_{-A}^{+A} \eta(\tau)f'(\tau)d\tau\\ &\approx -\gamma(\tau)f'(\tau)\Big|_{-A}^{+A} + \int_{-A}^{+A} \gamma(\tau)f''(\tau)d\tau\\ &\approx \frac{1}{2}\int_0^A \tau f''(\tau)d\tau - \frac{1}{2}\int_{-A}^{0} \tau f''(\tau)d\tau\\ &= -\frac{1}{2}\int_0^A f'(\tau)d\tau + \frac{1}{2}\int_{-A}^{0} f'(\tau)d\tau = f(0).\end{aligned}$$

Diese Rechnung bleibt richtig für $A \gg 1$ und infinitesimale $f(\pm A)$, $f'(\pm A)$.

4.6 Distributionen

So nennt man seit Laurent Schwartz' Arbeiten (um 1950) eine Verallgemeinerung des Funktionsbegriffs, welche u.a. die Deltafunktionen umfaßt. In der Infinitesimalmathematik lassen sich die Distributionen durch interne Funktionen darstellen. Im vorigen Abschnitt hatte sich gezeigt: Ist γ eine interne Funktion, welche für alle beschränkten ξ unendlich nahe bei der stetigen Funktion $\frac{1}{2}|\xi|$ ist, so ist bei zweimaliger Ableitbarkeit $\delta = \gamma''$ eine Deltafunktion. Diese Überlegung legt eine Verallgemeinerung nahe:

<u>Definition 1:</u> Es seien ϕ_1, ϕ_2 auf einem Intervall I definierte feinstetige interne Funktionen. Wenn es eine ganze Zahl $m \geq 0$ und interne Funktionen ψ_1, ψ_2 so gibt, daß überall auf I

(a) $\psi_1(\xi) \approx \psi_2(\xi)$ und

(b) $\psi_1^{(m)} = \phi_1, \quad \psi_2^{(m)} = \phi_2,$

so heißen ϕ_1 und ϕ_2 *auf* I *äquivalent*.

Zunächst bemerkt man: Besteht das Intervall I nur aus beschränkten Zahlen, so kann eine endliche Zahl m in (b) durch jede größere endliche natürliche Zahl ersetzt werden. Denn für $\xi_o, \ \xi \in I$ ist $\int_{\xi_o}^{\xi} \psi_1 \approx \int_{\xi_o}^{\xi} \psi_2$.

Zum Beweis der Transitivität sei ϕ_1 äquivalent ϕ_2 und ϕ_2 äquivalent ϕ_3. Zu zeigen ist ϕ_1 äquivalent ϕ_3. Nach der Vorbemerkung können wir annehmen, daß für alle $\xi \in I$ gilt

(α) $\phi_1 = \psi_1^m$, (β) $\phi_2 = \psi_2^{(m)} = \overline{\psi}_2^{(m)}$, (γ) $\phi_3 = \overline{\psi}_3^{(m)}$

mit

(δ) $\psi_1(\xi) \approx \psi_2(\xi)$ und (ε) $\overline{\psi}_2(\xi) \approx \overline{\psi}_3(\xi)$.

Gesucht ist ein ψ_3 mit $\psi_3^{(m)} = \phi_3$ und $\psi_3(\xi) \approx \psi_1(\xi)$, oder wegen (δ) auch $\psi_3(\xi) \approx \psi_2(\xi)$. Wegen $\psi_3^{(m)} = \overline{\psi}_3^{(m)}$ ist notwendigerweise

$$\psi_3 = \overline{\psi}_3 + \pi_3$$

mit einem noch unbestimmten Polynom π_3 vom Grade höchstens $m-1$. Andererseits gibt es wegen (β) ein Polynom π_2, ebenfalls vom Grade höchstens $m-1$, so daß

$$\overline{\psi}_2 = \psi_2 + \pi_2.$$

Wegen (ε) folgt

$$\psi_3(\xi) \approx \psi_2(\xi) + \pi_2(\xi) + \pi_3(\xi),$$

so daß wir nur $\pi_3 = -\pi_2$ zu setzen brauchen, um den Beweis zu beenden. Reflexivität und Symmetrie wird der Leser selbst beweisen.

Beim Beweis haben wir benötigt, daß nur über endlich lange Intervalle integriert wird. Wir werden daher voraussetzen, daß I nur aus beschränkten

Zahlen besteht; I darf also ein endliches Intervall sein, aber auch die Menge aller beschränkten Zahlen oder aller positiven beschränkten Zahlen. Die ganze Zahl m wird als endlich vorausgesetzt.

Unter diesen Voraussetzungen können wir Äquivalenzklassen bilden; sie heißen *Distributionen auf* I.

Man kann zwei Distributionen auf I mit beschränkten Faktoren multiplizieren und addieren und erhält wieder eine Distribution auf I (Aufgabe für den Leser); die Distributionen auf I bilden einen Vektorraum über den beschränkten Zahlen. Hingegen kann man Distributionen im allgemeinen nicht miteinander multiplizieren; man kann wohl die Repräsentantenfunktionen multiplizieren, aber die Produkte brauchen nicht wieder äquivalent zu sein, wenn man für die Faktoren äquivalente Repräsentanten nimmt. Das hat durchaus Vorteile: Man kann erreichen, daß das Produkt zweier geeigneter Deltafunktionen gleich $\alpha \cdot \delta$ ist, mit einer Deltafunktion δ und einem beliebig vorgebbaren Zahlfaktor α. Dazu vergleiche man das Beispiel 1.

Hingegen läßt sich jede Distribution beliebig oft differenzieren und integrieren. Man braucht dazu nur zu zeigen, daß es Repräsentantenfunktionen mit dieser Eigenschaft gibt, und dazu eignen sich Polynome, eventuell unendlich hohen Grades. Daß jede Distribution durch ein Polynom repräsentiert werden kann, ist eine Folge des Approximationssatzes von Weierstraß, verallgemeinert auf interne Funktionen. Das ist für ein Intervall $I: \alpha \leq \xi \leq \beta$ leicht zu sehen; mit den stetigen Repräsentantenfunktionen f_n der feinstetigen Funktion ϕ hat man Polynome P_n, so daß $|P_n(x_n) - f_n(x_n)| < e_n$ für $a_n \leq x_n \leq b_n$, so daß man $|\pi(\xi) - \phi(\xi)| < \varepsilon$ auf I für beliebiges, auch unendlich kleines $\varepsilon > 0$ erreichen kann. Ist I die Menge aller beschränkten Omegazahlen, so ist ϕ sogar auf dem größeren Intervall $|\xi| \leq \Omega$ definiert und feinstetig, weil die f_n für alle reellen x definiert und stetig sind, und man verwende den Approximationssatz auf $-\Omega \leq \xi \leq \Omega$.

Was haben wir mit der Begriffsbildung über die bloße Verallgemeinerung der Delta-Distribution hinaus gewonnen? Es wird beispielsweise jetzt möglich, gewöhnliche stetige Funktionen nicht nur beliebig oft zu integrieren, sondern wir können sie auch m-mal ableiten. Das ist sicher ein formaler Vorteil. Die Ableitungen sind im allgemeinen allerdings nicht wieder Funktionen, sondern Distributionen; aber sie können durch interne Funktionen, sogar durch Polynome, dargestellt werden. Man muß aber daran denken, daß zwei interne Funktionen, welche dieselbe Distribution repräsentieren, nicht notwendig unendlich nahe beieinander liegen. Das kennen wir schon von Deltafunktionen wie $\frac{\sin \mu\xi}{\pi\xi}$ und $\frac{\mu}{\pi(1+\mu^2\xi^2)}$. Die interne Funktion $\mu \sin \mu\xi$ ist äquivalent zur Funktion $\eta = 0$, denn sie ist zweite Ableitung von $\frac{-\sin \mu\xi}{\mu} \approx 0$.

Doch hat die Begriffsbildung auch anschaulich einleuchtende Aspekte. Die stetige Funktion $y = \frac{|x|}{2}$ ist zwar nicht im gewöhnlichen Sinne ableitbar, aber sie hat eine Ableitung im Distributionssinne, und für diese gibt es Repräsentantenfunktionen, welche für positive (negative) x unendlich nahe bei $+\frac{1}{2}$ $(-\frac{1}{2})$ verlaufen. Die Einheitssprungfunktion ist, wie auch andere unstetige Funktionen, als Distribution erfaßt. Leitet man ein weiteres Mal ab, so wird man anschaulich erwarten, daß der entstehenden Deltadistribution für endliche $|x|$ der Wert 0 zugeschrieben werden kann, wenn auch nur spezielle Repräsentanten für solche x unendlich klein sind. Diese Überlegung läßt sich verallgemeinern.

Dabei wird es allerdings keinen Sinn haben, irgendeine spezielle Repräsentantenfunktion herauszugreifen, die bei x_o den Wert y_o haben mag, und dieses y_o dann als Wert der Distribution zu bezeichnen. Wie schon die Beispiele zur Deltadistribution zeigen, wäre y_o nicht eindeutig bestimmt. Man muß schon wenigstens die infinitesimale Umgebung von x_o mit heranziehen, und wie in Beispiel 3 gezeigt wird, hat man dann tatsächlich Eindeutigkeit; daher darf man definieren:

<u>Definition 2:</u> Ist x_o ein reeller Wert im Inneren des Intervalls I und gibt es eine Repräsentantenfunktion ϕ einer Distribution auf I und eine reelle Zahl y_o, so daß $\phi(\xi) \approx y_o$ für alle $\xi \approx x_o$, so heißt y_o der Wert der Distribution bei x_o.

Es ergibt sich sofort: Hat eine Distribution für alle reellen Zahlen eines Intervalls $I' \subseteq I$ Werte, so ist sie dort - als Distribution auf I' - gleich der stetigen Funktion mit diesen Werten. Denn wegen der Bedingung $\phi(\xi) \approx y_o$ für $\xi \approx x_o$ ist ϕ stetig an der Stelle x_o. Die Deltadistribution ist in den Intervallen $x < 0$ und $x > 0$ gleich der identisch verschwindenden Funktion, und das gilt auch für sämtliche Ableitungen $\delta', \delta'', \ldots$

Wenn es auch im allgemeinen nicht möglich ist, zwei Distributionen miteinander zu multiplizieren, so ist wenigstens das Produkt einer Distribution mit einer stetigen reellen Funktion f wieder eine Distribution (Aufgabe 2). Das Produkt $\delta \cdot f$ ist als Distribution gleich $f(0) \cdot \delta$, denn $(f(x) - f(0)) \cdot \delta$ hat für jedes reelle x den Wert 0.

Ein weiterer Ausbau der Distributionen würde die Ziele dieses Buches überschreiten. Von prinzipiellem Interesse ist hier vor allem folgendes: Distributionen lassen sich durch Funktionen darstellen und sind damit anschaulich erfaßt und mit den Mitteln der elementaren Infinitesimalrechnung (ohne Funktionalanalysis) zu behandeln. Sie lassen sich, wie speziell die stetigen Funktionen, sogar immer durch Polynome darstellen, im Sinne der Eulerschen algebraischen Auffassung von der Analysis. Sie lassen sich - und mit ihnen speziell die stetigen Funktionen - nicht nur beliebig oft integrieren, sondern auch ableiten. Die letztere Eigenschaft, die sich hier anschaulich an Repräsentantenfunktionen verfolgen läßt, erfüllt einen alten Wunsch der Analytiker, der sonst nur in formalen Operatorenkalkülen verwirklicht werden kann. Vom infinitesimalmathematischen Gesichtspunkt aus kann man auf die Distributionen allerdings verzichten und direkt mit den internen repräsentierenden Funktionen umgehen. Die Distributionen erscheinen hier, wie früher schon Gleichmäßigkeitsbegriffe, eher als Ersatzkonstruktionen für das Infinitesimale.

<u>Aufgaben und Beispiele</u>

1. Gegeben sei eine Omegazahl α. Zeigen Sie, daß es Deltafunktionen $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ gibt mit $\delta_1 \cdot \delta_2 = \alpha\delta_3$.

   Hinweis: Man wähle δ_1 so, daß $\delta_1(\xi) = 0$ ist für $|\xi| \geqq \omega$, und δ_2 so, daß $\delta_2(\xi) = \alpha$ ist für $|\xi| \leqq \omega$. Dann ist $\delta_1(\xi) \cdot \delta_2(\xi) = \alpha\delta_1(\xi)$.

2. Es seien eine Distribution gegeben, Repräsentanten ϕ, und eine auf I überall hinreichend oft ableitbare Funktion f. Dann sind alle Produkte $f \cdot \phi$ zueinander äquivalent und gehören daher zu ein und derselben neuen Distribution.

   Hinweis: Es sei die Zahl m in Definition 1 speziell gleich 1, und F sei eine Stammfunktion von f. Zu zwei Repräsentanten ϕ_1, ϕ_2 gehören dann ψ_1, ψ_2 mit $\psi_1(\xi) \approx \psi_2(\xi)$ und $\psi_1' = \phi_1$, $\psi_2' = \phi_2$. Man setze $\gamma_j = f\psi_j - \int_{x_o}^{x} f'\psi_j$. Es gilt $\gamma_j' = f\phi_j$ und $\gamma_1(\xi) \approx \gamma_2(\xi)$.

   Für $m > 1$ verwende man entsprechende Identitäten, die sich durch m-malige partielle Integration von $f\phi_j$ ergeben.

3. Man zeige, daß der Wert einer Distribution an einer reellen Stelle x_o eindeutig bestimmt ist, wenn er überhaupt existiert!

Hinweise: Wir nehmen an, es gibt Repräsentantenfunktionen ϕ_1, ϕ_2 einer Distribution, so daß $\phi_1(\xi) \approx y_1$ und $\phi_2(\xi) \approx y_2$ mit voneinander verschiedenen reellen Zahlen y_1, y_2, und wir führen das zum Widerspruch. Wir setzen der Einfachheit halber $x_o = 0$ und $\phi = \phi_2 - \phi_1$, $\phi(\xi) \approx y_o > 0$ für $\xi \approx 0$. Es ist jetzt ϕ als im Distributionssinne äquivalent zu 0 angenommen. Nach der Definition 1 ist für ein $m = 0,1,2,\ldots$ dann $\phi = \psi^{(m)}$ und $\psi(\xi) \approx \pi_1(\xi)$ auf I mit einem Polynom π_1 vom Grade höchstens $m-1$. (Der Fall $m = 0$ scheidet offensichtlich aus.) Integriert man von 0 an m-mal, so ergibt sich $\int_0^\xi \ldots \int_0 \phi \ldots$ als eine Funktion, welche sich von der Stammfunktion ψ um ein Polynom π_2 vom Grade höchstens $m-1$ unterscheidet. Wir fassen π_1 und π_2 zu einem Polynom π vom Grade höchstens $m-1$ zusammen und setzen die infinitesimale Differenz zwischen ψ und π_1 gleich $\varepsilon(\xi)$.

Beachtet man, daß es nach dem Cauchy-Prinzip ein endliches reelles $a > 0$ gibt, so daß für alle $|\xi| \leq a$ gilt

$$\frac{y_o}{2} < \phi(\xi) < 2y_o,$$

so folgt nach m-maliger Integration von 0 an für positive $\xi \leq a$:

$$\frac{y_o}{2}\frac{\xi^m}{m!} + \pi(\xi) \leqq \varepsilon(\xi) \leqq 2y_o \frac{\xi^m}{m!} + \pi(\xi).$$

Die Polynome links und rechts haben für endliche positive ξ bis zur ersten endlichen positiven Nullstelle gleiche Vorzeichen. Weil wenigstens ein Koeffizient (z.B. der von ξ^m) nicht infinitesimal ist, gibt es in diesem Intervall endliche ξ, für welche beide Polynome nicht-infinitesimale Werte annehmen, und das widerspricht $\varepsilon(\xi) \approx 0$.

4. Periodische Distributionen: Wenn es endliche Zahlen M, m so gibt, daß für alle k gilt $|\alpha_k|, |\beta_k| \leqq M \cdot k^{m-2}$, dann stellen alle Reihen

$$\phi(\xi) = \frac{\alpha_o}{2} + \sum_{k=1}^{\mu} \alpha_k \cos k\xi + \beta_k \sin k\xi$$

unabhängig vom speziellen Wert von $\mu \gg 1$ ein und dieselbe Distribution dar, welche als m-te Ableitung einer stetigen Funktion

$$f(\xi) = \frac{\alpha_o}{2}\frac{\xi^m}{m!} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}(\hat\alpha_k \cos k\xi + \hat\beta_k \sin k\xi)$$

aufgefaßt werden kann, $|\hat\alpha_k|, |\hat\beta_k| \leqq M$.

5. Periodische Distributionen mit der Eigenschaft aus Beispiel 4 lassen sich als "Randwerte" auf dem Einheitskreis $|z| = 1$ von für $|z| < 1$ konvergenten Potenzreihen auffassen,

$$w(z) = \sum_{k=o}^{\infty} \gamma_k z^k.$$

6. Man untersuche $w = \frac{1}{1-z}$ und daran anschließend

$$\delta_\mu(\xi) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\mu}^{+\mu} p^{|k|} e^{ik\xi} = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\mu} p^k \cos k\xi \quad \text{für} \quad 1 > p \approx 1.$$

Hinweis: Zu $w = \frac{1}{1-z}$ gehört die Potenzreihe $\sum_{k=o}^{\infty} z^k$, welche für $|z| = 1$ divergiert. Wir erhalten das Polynom unendlichen Grades

$$\sum_{k=o}^{\mu} z^k = \frac{1-z^{\mu+1}}{1-z} = \frac{(1-z^{\mu+1})(1-\bar z)}{1-(z+\bar z)+z\bar z}.$$

Es ist mit $z = pe^{i\xi}$

$$2\pi\left(\frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\mu} p^k \cos k\xi\right) = 2\pi\delta_\mu(\xi) =$$

$$= \operatorname{Re}\left(1 + 2\sum_{k=1}^{\mu} z^k\right) = \operatorname{Re}\left(2\sum_{k=o}^{\mu} z^k - 1\right)$$

$$= \operatorname{Re}\frac{2-2z^{\mu+1}-1+z}{1-z} = \operatorname{Re}\frac{1+z}{1-z} - 2\operatorname{Re}\frac{z^{\mu+1}}{1-z}$$

$$= \operatorname{Re}\frac{(1+z)(1-\bar z)}{1-(z+\bar z)+z\bar z} - 2\operatorname{Re}\frac{z^{\mu+1}}{1-z}$$

$$= \frac{1-p^2}{1-2p\cos\xi + p^2} - R_\mu.$$

Wir geben noch eine andere Herleitung:

$$2\pi\delta_\mu(\xi) = \sum_{k=-\mu}^{\mu} p^{|k|} e^{ik\xi} = -1 + \sum_{k=o}^{\mu}(z^k + \bar z^k)$$

$$= -1 + \frac{1-z^{\mu+1}}{1-z} + \frac{1-\bar z^{\mu+1}}{1-\bar z}$$

$$= -1 + \frac{1}{1-z} + \frac{1}{1-\bar z} - \frac{z^{\mu+1}}{1-z} - \frac{\bar z^{\mu+1}}{1-\bar z}$$

$$= \frac{1 - z\bar{z}}{1 - (z+\bar{z}) + z\bar{z}} - R_\mu$$

$$= \frac{1 - p^2}{1 - 2p\cos\xi + p^2} - R_\mu .$$

Es ist für $p = 1-\alpha$ wegen $|1-z| \geqq \alpha$, $|1-\bar{z}| \geqq \alpha$

$$|R_\mu| \leqq \frac{2(1-\alpha)^{\mu+1}}{\alpha} \approx 0,$$

wenn $\alpha \geqq \frac{1}{\sqrt{\mu}}$, weil

$$\frac{(1-\alpha)^{\mu+1}}{\alpha} \leqq \sqrt{\mu}\left(1 - \frac{\sqrt{\mu}}{\mu}\right)^\mu \approx \sqrt{\mu}\, e^{-\sqrt{\mu}} \approx 0.$$

Es ergibt sich für $p = 1-\alpha$ daraus noch

$$1 = \int_{-\pi}^{\pi} \delta_\mu(\xi)d\xi \approx \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{1 - p^2}{1 - 2p\cos\xi + p^2}\, d\xi.$$

Ferner ist

$$\frac{1 - p^2}{1 - 2p\cos\xi + p^2} \geqq \frac{1 - p^2}{(1+p)^2} = \frac{1-p}{1+p} > 0$$

und für $\cos\xi \leqq 1 - \sqrt{\alpha}$, also $|\xi| \geqq \arccos(1 - \sqrt{\alpha})$

$$\frac{1 - p^2}{1 - 2p\cos\xi + p^2} \leqq \frac{1 - p^2}{1 - 2p + p^2 + 2p\sqrt{\alpha}} \leqq \sqrt{\alpha}\,\frac{1+p}{2p + \alpha\sqrt{\alpha}} \approx 0.$$

Die Deltafunktion der Periode 2π

$$\delta_p(\xi) = \frac{1}{2\pi}\,\frac{1 - p^2}{1 - 2p\cos\xi + p^2}, \quad 1 > p \approx 1$$

wird nach Poisson benannt und war schon Euler bekannt. Sie erfüllt die Voraussetzungen des Ersten Darstellungssatzes aus 4.5.

Kapitel 5: SPEZIELLE THEMEN AUS DER ANALYSIS

Zunächst soll hier eines der Leitmotive des Buches zum Ende geführt werden, das Thema der trigonometrischen Reihen. Dabei wird der enge Zusammenhang zwischen diesen Reihen, den Deltafunktionen und den Summationsverfahren deutlich werden. Die Eulersche Behandlung der Gammafunktion ist ein Thema für sich, bei dem die Benutzung des unendlich Großen für Probleme des Endlichen besonders klar hervortritt.

5.1 Summation divergenter Reihen

Damit meint man nicht die uns vertraute Tatsache, daß man mit Summen $\sum_{k=0}^{\mu} \alpha_k$ als Omegazahlen auch dann vernünftig rechnen kann, wenn $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k$ nicht konvergiert, sondern die Aufgabe, einer divergenten Reihe eine bestimmte endliche Summe zuzuschreiben. Die historisch ersten Versuche waren mehr spielerischer Natur und befaßten sich unter anderem stets mit der Reihe $1 - 1 + 1 - \ldots$ Die Partialsummen sind abwechselnd 1 und 0, und der "wahrscheinlichste" Wert der Reihe, von dem Leibniz und Daniel Bernoulli sprachen, wäre $\frac{1}{2}$. Dieser Wert ergibt sich auch, wenn man in der Summenformel der geometrischen Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z}$ die ursprüngliche Herleitungsbedingung $|z| < 1$ fallen läßt und $z = -1$ einsetzt. Euler scheint in manchen seiner Überlegungen die Reihe als einen anderen Ausdruck für die Formel angesehen zu haben, aus deren Entwicklung sie hervorgeht, ein Verfahren, das in vielen Fällen mit dem der analytischen Fortsetzung von komplexen Funktionen übereinstimmt.

Ich wähle einen anderen Zugang. Bei einer aus einem praktischen Problem hervorgegangenen Reihe $\Sigma\alpha_k$ werden die Summanden nicht ganz genau bekannt sein; in mathematischer Idealisierung: Es sollte erlaubt sein, $\Sigma\alpha_k$ durch $\Sigma\beta_k$ zu ersetzen mit $\alpha_k \approx \beta_k$ für endliche k. So hatten wir in 1.15 für die Deltafunktion nur die Bedingung $\delta_k \approx 1$ und nicht $\delta_k = 1$ erhalten. Wir wissen nach dem Lemma über die Stabilität (3.4), daß bei *konvergenten* Reihen gilt $\Sigma\alpha_k \approx \Sigma\beta_k$. Es kann freilich vorkommen, daß dabei aus einer divergenten Reihe $\Sigma\alpha_k$ eine konvergente Reihe $\Sigma\beta_k$ wird; aber das Lemma sagt uns wieder, daß der Summenwert bis auf unendlich kleine Zahlen unabhängig von der infinitesimalen Abänderung der α_k ist.

Lehrbücher und Monographien zur Didaktik der Mathematik

Herausgegeben von Norbert Knoche, Universität Essen, und Harald Scheid, Universität Wuppertal

Band 1:
R. Fischer/G. Malle, Mensch und Mathematik

Band 2:
J. Blankenagel, Numerische Mathematik im Rahmen der Schulmathematik

Band 3:
W. Riemer, Neue Ideen zur Stochastik

Band 4:
N. Knoche/H. Wippermann, Vorlesungen zur Methodik und Didaktik der Analysis

Band 5:
D. Laugwitz, Zahlen und Kontinuum

Band 6:
H. Scheid, Stochastik in der Kollegstufe

Zahlen und Kontinuum

Eine Einführung in die Infinitesimalmathematik

von
Prof. Dr. Detlef Laugwitz
Technische Hochschule Darmstadt

1986

Bibliographisches Institut Mannheim/Wien/Zürich
B. I.-Wissenschaftsverlag