# Kapitel 6: HISTORISCHES UND PHILOSOPHISCHES

## 6.1 Einige Vorbehalte

Wenn hier einige Aspekte der Geschichte und der Grundlagen der Mathematik aus der nun gewonnenen Kenntnis einer Infinitesimalmathematik betrachtet werden, so muß ich den Leser vorab über die engen Grenzen solcher Überlegungen informieren.

Wir wissen nicht sicher, was und wie Mathematiker früherer Zeiten *gedacht* haben; wir sehen an ihren Publikationen, was sie *gemacht* haben, und wie sie gearbeitet haben. Versuche einer Rechtfertigung Leibnizens, Eulers oder Cauchys halte ich für anmaßend; vertretbar und erwünscht sind aber sicherlich heutige Versuche zu Theorien, welche wenigstens teilweise eine Interpretation der Kalküle und Formeln älterer Mathematiker gestatten, im Sinne einer partiellen Isomorphie, nicht aber notwendigerweise mit einer Identifikation im Hinblick auf eine mögliche "Bedeutung". Die Scheu vieler Zeitgenossen vor einer "Metaphysik" in der Mathematik sollte sie aber nicht abhalten, Bücher wie die folgenden anzusehen: L. Carnot, Réflexions sur la métaphysique du calcul infinitésimal, Paris 1797; P. du Bois-Reymond, Die allgemeine Functionentheorie. 1. Theil. Metaphysik und Theorie der mathematischen Grundbegriffe: Größe, Grenze, Argument und Function. Tübingen 1882, Nachdruck Darmstadt 1968. In beiden Büchern findet man der Zeit entsprechende Diskussionen dessen, was als die Hauptschwierigkeit der Differentiale galt, nämlich die Zulässigkeit des Verfahrens, sie in einer geeigneten (!) Phase der Rechnung "gleich" Null zu setzen. Hier gibt uns die moderne Version, der Homomorphismus st, eine heute befriedigende Klärung, und das erscheint mir als ein Fortschritt in Hinsicht auf Deutlichkeit.

Im übrigen teile ich die Skepsis gegenüber dem Fortschrittsglauben als Bestandteil der Wissenschaftshistorie; diese Skepsis ist spätestens seit Lakatos wohl begründet, und ich verweise auch hier wieder auf Spalt 1981, Es wird an einzelnen Beispielen deutlich werden, daß eine als Fortschritt gedeutete "Präzisierung" Verengungen und Verarmungen mit sich brachte. Man ging den scheinbar bequemeren Weg und drückte sich darum, über eine Fundierung des von Euler und anderen erschlossenen Kalküls im vollen Umfang nachzudenken. Fehlerhafte Resultate lastete man nicht dem eigenen Unverständnis an, sondern man erklärte die Werkzeuge für untauglich, die in den Händen der größeren Mathematiker doch ihre Brauchbarkeit erwiesen hatten. Allerdings ist zuzugeben: Wenn wir mit unseren nachträglichen Kenntnissen die Bücher von Euler und Cauchy lesen und als konsistent anerkennen, so



war das für die jeweiligen Zeitgenossen offenbar nicht so. Der erste Übersetzer von Eulers Lehrbüchern, ein Berliner Gymnasialprofessor namens Michelsen, hat uns weitschweifige Kommentare zu den Büchern geliefert, welche sein Unverständnis belegen; und wie mag es anderen Lesern erst ergangen sein? Daß die Grundbegriffe nicht im Stile des 20. Jahrhunderts "klar" dargestellt wurden, wundert nicht. Aber ihr Gebrauch, der ja aus den Beispielen hätte deutlich werden können, war offenbar für den Leser zum Erlernen nicht hinreichend. Sogar ein Abel hat Cauchys Bücher nicht voll verstanden.

Mit einigen Vorbehalten werde ich daher daran gehen, die Darstellung der Grundlagen der Infinitesimalmathematik bei einigen Autoren zu referieren. Ich bitte den Leser, immer zu bedenken, daß mir der *Gebrauch* der Zahlen und Funktionen mehr Aufschluß gibt als die Worterklärungen seitens der Autoren.

Der heutige Mathematiker kann sich nur mit Mühe von der Mengendenkweise freimachen. Ich habe in Kapitel 2 dem Kalkül, der Herleitung von Formeln, den Vorrang vor einer mengentheoretischen Begründung gegeben, und das ist wohl näher an Leibniz, Euler, Cauchy als die Mengenmathematik. Aber eine weitere Haltung zur Infinitesimalmathematik kann ich mit heutigen Denkweisen gar nicht erfassen. Das ist die bei Aristoteles, Newton und auch einigen materialistischen Philosophen anzutreffende "dynamische" Auffassung von Abläufen, vom Fließen, vom Werden; sie hat in der Grenzwertmathematik verbale Spuren hinterlassen (eine Variable strebt gegen einen Grenzwert). Auch viele zeitgenössische Physiker stehen dieser Auffassung nahe. Der moderne Mathematiker kann sich darauf zurückziehen, daß er eine Isomorphie aufweist: Ihm kann es gleichgültig sein, ob eine Funktion einen Ablauf darstellt oder ein Element eines Funktionenraumes ist, ob man bei $\Omega$ an eine unendlich werdende Größe denkt (Fritz Bopp) oder an eine feste unendlich große Zahl. Wer aber mehr inhaltlich denkt als formal, der sieht einen Unterschied.

Vorbehalte sind auch erforderlich bei der Einschätzung zweier wichtiger Aussagengruppen, die man mit den Stichworten *verfrühte Entdeckungen* (Freudenthal: Premature discoveries) und *versteckte Hilfssätze* (hidden lemmas) beschreiben kann. Zu den verfrühten Entdeckungen rechnet Freudenthal das Cauchysche Konvergenzkriterium, dessen Erwähnung bei Euler auch kenntnisreiche Mathematikhistoriker verdrängen. Für den Historiker ist es in der Tat fraglich, ob eine Einzelerwähnung ohne wirkliche Akzeptanz durch die damaligen Zeitgenossen von großer historischer Bedeutung ist. Freilich kann meine Auffassung kaum widerlegt werden, daß man darin eher Äußerungen von Selbstverständlichkeiten sehen kann, die nicht besonders hervorzuheben waren. Doch hat Euler den Lesern seiner Bücher sicher das Leben nicht erleichtert dadurch, daß er das Kriterium nur in einer kaum zugänglichen Originalarbeit aufbewahrte.

Das herausragende Beispiel für ein verstecktes Lemma ist die Vollständigkeit der reellen Zahlen. Ohne sie kann man das Hinreichen des Konvergenzkriteriums nicht beweisen, und Euler und Cauchy versuchen das auch gar nicht. Man benötigt das Lemma auch für den Beweis des Nullstellensatzes für stetige Funktionen. Ich werde bei der Besprechung von Cauchys Cours noch darauf eingehen. Offenbar war die Vollständigkeit bei einer Dezimalauffassung der reellen Zahlen eine Selbstverständlichkeit, und ihre Beweisnotwendigkeit wäre eine verfrühte Entdeckung gewesen. Übrigens sind versteckte Hilfssätze eine alte Sache, und ihre explizite Aufdeckung begann erst spät im 19. Jahrhundert. Ein bekanntes Beispiel ist das von Euklid verwendete sogenannte Axiom von Pasch (1882): Trifft eine Gerade eine Dreiecksseite in ihrem Innern, so trifft sie noch wenigstens eine der anderen Seitenstrecken. Natürlich muß man solche Hilfssätze explizit ergänzen, aber das ist eine Aufgabe für die Kärrner, nicht die Könige. Die Entdeckung der Beweisnotwendigkeit selbst ist aber sehr wohl eine Leistung, und ich will nicht dahin verstanden werden, Bolzano für einen Hilfsarbeiter zu halten.

Die Darstellung muß lückenhaft bleiben. Für die griechische Mathematik und für die Zeit vor Leibniz und Newton kann dem Leser die hervorragend kommentierte und bequem zugängliche Quellensammlung von O. Becker 1954 empfohlen werden. Zu Leibniz ist Bos 1974 neben einigen Beiträgen im Sammelband zum 300. Jahrestag der ersten Publikation (Leibniz 1986) zu nennen. Mathematikhistorische Arbeiten hingegen, welche wenig Quellenmaterial enthalten und vorwiegend Meinungen eines Autors aus seinem Standpunkt - nach einer Hilbert-Anekdote ein Gesichtskreis vom Radius Null - widerspiegeln, wird man nur mit größter Vorsicht lesen.



## 6.2 Die voreuklidischen Infinitesimalien und ihre Elimination

In der Kreislehre beweist Euklid den Satz (Buch III, § 16), daß die Kreistangente außerhalb des Kreises verläuft, und daß in den Zwischenraum der Tangente und des Bogens keine weitere Gerade gezogen werden kann; und dann folgt der merkwürdige Nachsatz: "... der Winkel des Halbkreises ist größer als jeder spitze geradlinige Winkel, der Restwinkel kleiner."

Hier sehen wir eine Spur eines früheren geometrischen Systems: Der Winkel zwischen Kreis und Tangente ist kleiner als jeder geradlinige Winkel. In den Definitionen zum Buch I heißt es schon: "8. Ein ebener Winkel ist die Neigung zweier Linien in einer Ebene gegeneinander, die einander treffen, ohne einander gerade fortzusetzen." Und daß "Linie" hier nicht etwa notwendig Gerade heißt, ergibt sich aus dem Anschließenden: "9. Wenn die den Winkel umfassenden Linien gerade sind, heißt der Winkel geradlinig."

Bei Euklid spielen die sogenannten gemischtlinigen Winkel sonst keine Rolle mehr. Aber besonders die Kontingenzwinkel oder hornförmigen Winkel, also die zwischen einander berührenden Kurven, blieben in der philosophischen Diskussion noch bis zum Briefwechsel von Leibniz mit Wallis. Sie sind nicht ohne weiteres, wie für den modernen Differentialgeometer, "gleich Null".

Proklos (410-485) schreibt in seinem Euklid-Kommentar: "Könnte nicht auch jemand sich zweifelnd fragen, ob es nicht vielleicht unter Umständen gar nicht möglich sei, daß zwei gerade Strecken einander gleich seien? Und erst recht bei denjenigen geometrischen Gebilden, bei denen es zwar Ungleichheit, aber nicht stets Gleichheit gibt? Denn wir werden ja hören, daß ein hornförmiger Winkel stets ungleich einem spitzen Winkel ist und niemals gleich, und ebenso der Halbkreiswinkel. Und der Übergang vom Größeren zum Kleineren vollzieht sich also nicht überall durch das Gleiche." (Becker S. 47/48).

Man bekommt also Probleme mit der Stetigkeit: Der Übergang von einem spitzen zum rechten Winkel zwischen geradlinigen Schenkeln durchläuft nicht alle Winkel dazwischen, die gemischtlinigen zwischen Kreisen und Tangente fehlen.

Bryson (um -410) wird eine Kreisquadratur zugeschrieben, und auf diese bezieht sich Johannes Campanus (um 1270) im Kommentar zu Euklid III.16: "Im übrigen ist es aus diesem Lehrsatz einleuchtend, daß diejenige Argumentation fehlerhaft ist, deren sich Bryson bei der Kreisquadratur bedient hat. Nämlich: 'Man geht vom Kleineren zum Größeren über und umgekehrt durch alle mittleren Werte hindurch; dann auch durch das Gleiche. Es gelingt nun zu diesem Vorliegenden entweder ein Größeres oder ein Kleineres zu finden; also gelingt es auch, ein Gleiches zu finden.'" (Becker, S. 50)

Es leuchtet ein, daß die Argumentation zur Kreisquadratur erschüttert ist: Die einbeschriebenen und umbeschriebenen Polygone sind ja geradlinige Figuren, der Kreis ist eine krummlinige, und seine Fläche liegt dazwischen - aber kann man schließen, daß es ein Polygon gibt, welches zum Kreis flächengleich sei? Offenbar nicht, ohne daß zusätzliche Überlegungen zur Größenlehre erfolgen. Den Ausweg verdankt man Eudoxos.

Zuvor aber möchte ich - mit ganz ungriechischen Mitteln freilich - das Beispiel der gemischtlinigen Winkel noch etwas diskutieren. In Polarkoordinaten beschreibt $\phi = \phi(r) = a_o + a_1 r + a_2 r^2 + \dots$ ein vom Nullpunkt ausgehendes Kurvenstück, wenn eine reelle Potenzreihe mit positivem Konvergenzradius gegeben ist. Sind $\phi_1, \phi_2$ die Funktionen zu zwei Kurvenstücken, den Schenkeln des krummlinigen Winkels, so kann man die Funktion $\mu(r) = \phi_2(r) - \phi_1(r)$ als das Maß dieses Winkels ansprechen. Man kann diese Maße addieren, subtrahieren und mit reellen Zahlen multiplizieren. (Der Leser wird leicht verifizieren, daß sie sogar einen nullteilerfreien Ring bilden.) Das Vorzeichen des Maßes ist gleich dem des ersten nichtverschwindenden Koeffizienten. Ist das absolute Glied gleich 0, so handelt es sich um einen Kontingenzwinkel, und sein Maß ist unendlich klein gegen alle Maße geradliniger Winkel. In moderner Ausdrucksweise ist der Sachverhalt für uns leicht durchschaubar: Die Lücke zwischen den infinitesimalen Maßen der Kontingenzwinkel und den endlichen Maßen stört die Zwischenwerteigenschaften. Geht man zu Standardteilen über, so macht man alle Kontingenzwinkelmaße zu 0.

Aber wie sind die Griechen mit dem Problem fertig geworden? Die Proportionenlehre des Eudoxos (Euklid Buch V) eliminiert die störenden Infinitesimalien. Definition 4 ist: "Daß sie ein Verhältnis zueinander haben, sagt man von Größen, die vervielfältigt einander übertreffen können." Das hat man dann später als die archimedische Eigenschaft bezeichnet, und ein Größensystem mit dieser Eigenschaft nannte man homogen. Eudoxos und Euklid schließen aber - und wegen der Kontingenzwinkel können sie das auch nicht - inhomogene, "nicht-archimedische" Systeme nicht aus, nur wird von ihnen ab jetzt nicht mehr gehandelt.

Es folgt Definition 5: "Man sagt, daß Größen in demselben Verhältnis stehen, die erste zur zweiten wie die dritte zur vierten, wenn bei beliebiger Vervielfältigung die Gleichvielfachen der ersten und dritten den



Gleichvielfachen der zweiten und vierten gegenüber, paarweise entsprechend genommen, entweder zugleich größer oder zugleich gleich oder zugleich kleiner sind."

Definition 6: "Und die dasselbe Verhältnis habenden Größen sollen in Proportion stehend heißen."

Notwendig und hinreichend für Verhältnisgleichheit von $a_1 : a_2$ und $a_3 : a_4$ ist also, mit natürlichen Zahlen $m, n$:

$$m a_1 > n a_2 \text{ genau dann wenn } m a_3 > n a_4$$
$$m a_1 = n a_2 \text{ genau dann wenn } m a_3 = n a_4$$

und entsprechend für $<$.

Die Dedekindschen Schnitte knüpfen an die Eudoxische Verhältnisgleichheit an. Im übrigen ist das, was Euklid-Eudoxos Verhältnisgleichheit nennt, dann eine Äquivalenzrelation $\approx$. Für die Winkelmaße haben wir damit in der heutigen Ausdrucksweise

$$b_o + b_1 r + b_2 r^2 + \dots \approx b_o.$$

Und mit unserer Kenntnis der reellen Zahlen sieht man, daß für die Klassen verhältnisgleicher Größenpaare die vorher fehlenden Stetigkeitseigenschaften gelten. Der Weg zu den Inhaltsüberlegungen bei Euklid und zur Exhaustionsmethode des Archimedes ist frei. Allerdings gibt es auch hier einige Kärrnerarbeit nachzuleisten. Zum Beispiel werden wir erwarten, daß $2+\omega$, $3-\omega$ verhältnisgleich zum Paar $2,3$ ist. Aber für $m=3$, $n=2$ ergibt sich im ersten Falle $6 + 3\omega > 6 - 2\omega$, im zweiten $6=6$. Das ist schon die Schwierigkeit, die sich bei der Einbettung der rationalen Zahlen in die reellen immer wiederholt; bei den irrationalen Zahlen hat man keine Probleme. Unsere Beispiele sind, weil durch gemischtlinige Winkel darstellbar, durchaus legitim; auch Definition 4 schließt $a_1 = 2+\omega$, $a_2 = 3-\omega$ nicht aus. Die Freiheit, Zahlen statt Größen zu schreiben, kann man sich der Klarheit für den heutigen Leser wegen nehmen.

Die Infinitesimalien hatten ihre Schuldigkeit getan: Sie hatten eine Begründung der Proportionenlehre erzwungen. Aber der kleine Merkposten in Gestalt des Nachsatzes zu III.16 hat sie nicht sterben lassen.

## 6.3 Das 17. Jahrhundert

Die Erfindung des Calculus kommt nicht über Nacht; viele spezielle Integrationen waren seit Archimedes ausgeführt worden, und für Tangentenaufgaben hatte es auch Beiträge gegeben. Ich beschränke mich auf wenige, aus prinzipiellen Gründen interessante Ansätze.

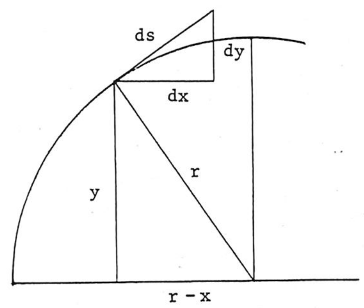
R. Descartes (1596-1650) publizierte 1637 seine Géométrie, die die rechnerische Behandlung von geometrischen Fragen als allgemeine Methode darstellte. Ihn interessierten wegen seiner Behandlung der geometrischen Optik auch Normalen und Tangenten. Mathematisch streng zugänglich sind für ihn nur algebraische Kurven, mit einer Gleichung $F(x,y) = 0$. Eine Gerade $y = ax + b$ ist Tangente, wenn das Einsetzen in $F = 0$ auf eine Doppelwurzel der Gleichung $F(x, ax+b) = 0$ führt. Für die Normalenbestimmung nehme man statt der Geraden einen Kreis. Das Verfahren ist interessant, weil es rein algebraisch ist und Infinitesimalien ganz vermeidet, jedenfalls operational betrachtet. Trotz seiner Allgemeinheit ist es aber nicht so sehr wegen der Beschränkung auf algebraische Gebilde, sondern wegen der mühevollen Behandlung von Gleichungen höheren Grades, auf die Dauer nicht brauchbar geworden.

Etwa gleichzeitig hat P. de Fermat (1601-1665) eine Methode zur Bestimmung von Maxima und Minima aus der Eigenschaft der horizontalen Tangente verwendet; die Rechnungen lassen sich sowohl mit Grenzwerten als auch mit Infinitesimalien interpretieren, aber das wird nicht durchgeführt.

B. Pascal (1623-1662) hat in seiner Philosophie eine Lehre von den drei Ordnungen Körper-Geist-Himmel entwickelt, und in seiner Mathematik sieht man in Analogie dazu die drei Ordnungen des unendlich Kleinen, Endlichen und unendlich Großen. Ein nachgelassenes Manuskript Pascals enthielt das charakteristische Dreieck, und Leibniz, der es einsehen konnte, sah die Verallgemeinerungsfähigkeit.

Es geht um das statische Moment des Viertelkreisbogens, in unserer Schreibweise $\int y\,ds$. Das infinitesimale "charakteristische" Dreieck mit den Katheten $dx$, $dy$ und der Hypotenuse $ds$ ist ähnlich dem Dreieck mit $y$, $r-x$, $r$ und das gibt $ds:r = dx:y$ und damit






$$\int_0^{\frac{\pi}{2}r} y\,ds = \int_0^r r\,dx = r^2$$

G.W. Leibniz (1646-1716) sah hier ein Licht, welches der Autor Pascal nicht gesehen hatte: Nimmt man statt des Radius die Normale, so wird das charakteristische Dreieck auch für andere Kurven brauchbar. Die infinitesimalen Verhältnisse lassen sich an einem ähnlichen endlichen Dreieck ablesen! Das ist in Leibniz' Augen eine strenge Begründung des Infinitesimalen, und diese Proportionen dienen auch zur Definition der Differentiale in der Nova Methodus (1684), die schon die wichtigsten Regeln des Kalküls angibt, Produktregel $d(xv) = xdv + vdx$, Quotientenregel, Wurzelregel, mit Anwendungen. Der Aufsatz ist kaum verständlich, betont aber die prinzipielle Bedeutung der Erfindung: "Kennt man, wenn ich so sagen soll, den obigen Algorithmus dieses Kalküls, den ich Differentialrechnung nenne, so lassen sich alle anderen Differentialgleichungen durch ein gemeinsames Rechnungsverfahren finden, es lassen sich die Maxima und Minima sowie die Tangenten erhalten ... Der Beweis alles dessen wird für einen in diesen Dingen Erfahrenen leicht sein ..." Aber wer war schon erfahren? Immerhin deutet Leibniz den Grundgedanken an: "... wenn er nur den bisher nicht genug erwogenen Umstand beachtet, daß man $dx, dy, dv, dw, dz$ als proportional zu den augenblicklichen Differenzen, d.h. Inkrementen oder Dekrementen, der $x,y,v,w,z, \ldots$ betrachten kann." (Becker, S. 162). Leibniz gibt hier keine Begründung, er verkündet Regeln.

Es wird oft behauptet, daß Leibnizens Begründungen, sofern er überhaupt welche gibt, unklar und widersprüchlich seien. Das trifft meiner Meinung nach nicht zu. Allerdings hat er sich in Veröffentlichungen nicht festgelegt, und es sind erst nachträglich Äußerungen gegenüber Zeitgenossen bekannt geworden. In seiner Notiz, die er über ein Gespräch mit Tschirnhaus angefertigt hat (dazu Cohn 1896, S. 173), sagt er, daß es drei Grade des Unendlichen gibt. Dem niedersten Grad ist dasjenige, was größer ist als jede angebbare Größe. Auf die beiden anderen Grade trifft darüber hinaus noch weiteres zu. Vom nächsthöheren Grade ist dasjenige, was in seiner Gattung das Größte ist; das Größte aller Ausgedehnten ist der ganze Raum, das Größte alles Aufeinanderfolgenden die Ewigkeit. Der höchste Grad des Unendlichen kommt nur Gott zu.

Hier befassen wir uns nur mit dem Unendlichen vom niedersten Grad. Dafür hat Leibniz drei Niveaus der Erklärung, in Abhängigkeit von seiner jeweiligen Zielgruppe. Die unterste Stufe ist für die Allgemeinheit bestimmt ("pour rendre le raisonnement sensible à tout le monde"): Das Unendliche wird durch das "Unvergleichbare" erklärt. "So ist etwa ein Teilchen der magnetischen Materie, die das Glas durchdringt, einem Sandkorn, dieses wiederum der Erdkugel, die Erdkugel schließlich dem Firmament nicht vergleichbar". (Dieses und die folgenden Zitate stammen aus dem Brief vom 2.2.1702; vgl. Becker 1954, S. 165 ff. und für das französische Original Felscher 1978, S. 175-176).

Auf dem zweiten Erklärungsniveau wendet sich Leibniz an die Mathematiker; man brauche "die mathematische Analysis von metaphysischen Streitigkeiten nicht abhängig zu machen". Dazu könne man so verfahren: "Will nämlich ein Gegner unseren Sätzen die Richtigkeit absprechen, so zeigt unser Kalkül, daß der Irrtum geringer ist als irgendeine angebbare Größe, da es in unserer Macht steht, das Unvergleichbarkleine - das man ja immer so klein, als man nur will, annehmen kann, zu diesem Zwecke hinlänglich zu verringern. ... zweifellos liegt darin der strenge Beweis unserer Infinitesimalrechnung ... Man kann somit die unendlichen und unendlich kleinen Linien - auch wenn man sie nicht in metaphysischer Strenge und als reelle Dinge zugibt - doch unbedenklich als ideale Begriffe brauchen, durch welche die Rechnung abgekürzt wird, ähnlich den sogenannten imaginären Wurzeln in der gewöhnlichen Anaylsis ... In derselben Weise denkt man sich mehr als drei Dimensionen und selbst Potenzen, deren Exponenten nicht gewöhnliche Zahlen sind ..."

Das dritte Niveau schließlich ist das philosophische, und das werde ich in weiterem Zusammenhang in Abschnitt 6.9 berücksichtigen. Für Leibniz liegt hier aber die wirkliche Begründung der Infinitesimalmathematik, und das gehört noch hierher. Die Infinitesimalien sind, wie auch die komplexen Zahlen, nicht bloße Fiktionen, sondern haben ihr *fundamentum in re*. Er leitet aus seinem allgemeinen Kontinuitätsprinzip, einer Grundlage seiner Philosophie, speziell die mathematischen Infiniten und Infinitesimalien ab. Wegen der Wechselbeziehung zwischen dem - für Leibniz alles beherrschenden - Ideellen und dem Realen kann er sagen: "... die Regeln des Endlichen behalten im Unendlichen Geltung, wie wenn es Atome - d.h. Elemente der Natur von angebbarer fester Größe - gäbe, obgleich dies wegen der unbeschränkten, wirklichen Teilung der Materie nicht der Fall ist, und umgekehrt gelten die Regeln des Unendlichen für das Endliche, wie wenn es metaphysische Unendliche gäbe, obwohl man ihrer in Wirklichkeit nicht bedarf, und die Teilung der Materie niemals zu solchen unendlich kleinen Stücken gelangt. Denn alles untersteht der Herrschaft der Vernunft, und es gäbe sonst weder Wissenschaft noch Gesetz, was der Natur des obersten Prinzips widerstreiten würde."



Aus dieser dritten philosophischen Erklärungsebene ist das in diesem Buch so genannte "Leibnizsche Prinzip" abgeleitet, während vom zweiten Niveau ein Weg zur Epsilontik führt.

I. Newton (1643-1727). Seine frühen Aufzeichnungen (1665 datiert) verwenden noch eine unendlich kleine Strecke o; die Terme, die am Schluß noch o enthalten, sind unendlich viel kleiner als die, die es nicht enthalten, und werden weggestrichen. Das ist operational nicht anders als bei Leibniz. Später hat Newton sich von den Infinitesimalien distanziert und eine Interpretation im Sinne von Grenzwerten bevorzugt. Doch war auch das nicht sicher vor Kritik, so vom Philosophen und Theologen G. Berkeley (1685-1753): Wie kann man einen Zuwachs o, von dem man ausdrücklich vorausgesetzt hat, er sei ständig von Null verschieden, dann unter Änderung dieser Voraussetzung doch gleich Null setzen?

Die große Leistung Leibniz', die er auch so sah, war: Es war ein Kalkül geschaffen, dessen Regeln vielfältig und im Prinzip von jedermann angewendet werden konnten. Bekannt wurde der Kalkül aber durch andere Publikationen, vor allem durch das Lehrbuch des Marquis de l'Hôpital, Analyse des infiniment petits (1696). Das sind im wesentlichen Privatkollegs, die ihm Johann I. Bernoulli (1667-1748) gegeben hatte; dieser wiederum hatte den Kalkül von und mit seinem älteren Bruder Jakob (1654-1705) gelernt und ausgebaut. Die Zusammenarbeit mit Leibniz war verhältnismäßig rege, wenn man Leibniz' vielfältige nichtmathematische Aktivitäten berücksichtigt.

Die Begründung des Kalküls ist in diesem Text freilich nicht befriedigend. Immerhin stehen wesentliche Hilfsmittel am Anfang als Postulate: Zwei Größen, deren Unterschied infinitesimal ist, dürfen gegeneinander ausgetauscht werden; und: eine Kurve darf als Polygonzug mit infinitesimalen Seiten angesehen werden. Man wird aber zugeben müssen, daß ein sauberes methodisches Prinzip verwendet wird, die axiomatische Methode. Die unbeweisbaren Grundlagen werden am Anfang formuliert. Diese Methode hat auch Newton in den Mathematischen Prinzipien der Naturphilosophie (1686) verwendet, der allerdings die mathematischen Voraussetzungen in Lemmata kleidet, welche mit Beweisen - oder wenigstens Versuchen dazu - versehen sind. Seine Distanzierung von den Infinitesimalien ist wohl nicht überzeugend, wenn er "kleine" Kurvenstücke als gerade betrachtet.

## 6.4 Leonhard Euler (1707-1783)

Er ist als Schüler Johann Bernoullis aufgewachsen, sozusagen von Anfang an in infinitesimalmathematischem Geist. Wenn seine Stärke auch im Operationalen liegt, für das ich in diesem Buch genügend Beispiele gegeben habe, so ist sein Versuch zur Begründung des Infinitesimalen, "De infinitis atque infinite parvis" von 1755 doch beachtenswert.

Es ist sicher kein Zufall, wenn Euler in diesem 3. Kapitel des 1. Teils der *Institutiones* calculi differentialis zunächst (§§ 72-82) von *"den Unendlichen"* redet und erst danach von *"den unendlich Kleinen"*. Er setzt sich mit den bekannten verschiedenen philosophischen Meinungen über das Unendliche (potentiell, aktuell) nicht allzu ausführlich auseinander, um in § 75 festzustellen: *"Indessen ist es gleichwohl erlaubt, eine solche Größe, zu der man durch ohne Ende angehäufte Zuwächse gelangt, mit einem gewissen Symbol (certo charactere) zu bezeichnen und so in gebührender Weise in den Kalkül einzuführen ..."* Sodann deutet Euler die verschiedenen Meinungen an, welche über die Existenz von unendlichen Anzahlen in der wirklichen Welt herrschen und wiederholt seine auch anderwärts ausgesprochene Kritik insbesondere an der Monadologie und der Philosophie Wolffs. Aber das ist für die Analysis nicht so sehr von Belang: In § 82 sagt er, selbst wenn jemand verneine, daß in der Welt eine unendliche Zahl tatsächlich existiere, *"so treten doch in mathematischen Spekulationen sehr oft Fragen auf, welche man nur beantworten kann, wenn man eine unendliche Zahl zuläßt"*. Als Beispiel erwähnt er die Summe aller natürlichen Zahlen und später die große Achse einer als Ellipse aufgefaßten Parabel. Als Zeichen für eine derartige Größe, "welche größer ist als jede endliche oder angebbare (assignabilis) Größe", benutzt man im Druck das Zeichen ∽ (ein liegendes S, später dann erst die liegende Acht; ich verwende im folgenden Ω).

Es ist eine klare Unterscheidung in der damaligen Mathematik nicht vorhan-



den zwischen Kardinalzahlen, Ordinalzahlen und Zahlen als Elementen des Kalküls. In seinen philosophischen Überlegungen scheint Euler an Kardinalzahlen zu denken. Im Kalkül sieht er diesen Aspekt sicher nicht vorrangig. Auch verwendet er nicht nur *ein* "Unendlich Ω" für den Kalkül, in älteren Arbeiten tritt z.B. daneben $l\Omega$ und auch $l(l\Omega)$ auf, mit $l$ für den natürlichen Logarithmus.

Es wird sich jetzt leicht zeigen, daß Euler auch in den Institutiones nicht nur mit *einem* "Unendlich" rechnet.

Erst nach dieser Diskussion des unendlich Großen wendet sich Euler den Differentialen zu.

In § 83 sagt er, daß *"diese Lehre vom Unendlichen aber noch besser beleuchtet wird, wenn dargelegt wird, was das Unendlichkleine der Mathematiker sei"*. Eulers berühmte These ist nun, daß eine unendlich kleine Größe tatsächlich nichts anderes ist als eine Null (revera = 0).

Aber wie das genau zu verstehen ist, das bedarf offensichtlich einiger Erläuterungen im Hinblick besonders auf den Quotienten von Differentialen. So fährt Euler also fort:

*"Weil aber alle Nichtse untereinander gleich sind, scheint es überflüssig, sie mit verschiedenen Symbolen zu bezeichnen."* Doch bedeutet $2:1 = 0:0$, daß das dritte Glied der Proportion doppelt so groß ist wie das vierte. Und damit es nun nicht die größte Verwirrung gebe, muß man *im Kalkül des unendlich Kleinen verschiedene Zeichen für verschiedene "Nichtse"* benutzen. Da ein Unendlichkleines aber wirklich ein Nichts ist, kann es bei der Addition oder Subtraktion eine endliche Größe weder vermehren noch vermindern, $a \pm n \cdot dx = a$. In §§ 88, 89 werden Unendlichkleine verschiedener Ordnungen betrachtet, so $dx \pm dx^{n+1} = dx$ und $a\sqrt{dx} + b \cdot dx = a \cdot \sqrt{dx}$. In § 95 wird gesagt, daß es auch Unendlichgroße verschiedener Ordnungen gibt: $\frac{a}{dx^2}$ ist eine "quantitas infinita infinities maior quam $\frac{a}{dx}$ etc".

Für das Rechnen mit den Unendlichkleinen ist nun wichtig, daß man zwischen den *"arithmetischen"* und den *"geometrischen" Verhältnissen* begrifflich zu unterscheiden hat: Die Differenz zweier Unendlichkleinen (zweier "cyphrae") ist Null, ihr "arithmetisches Verhältnis ist die Gleichheit". Aber für das "geometrische Verhältnis" kann sehr wohl z.B. gelten $n:1 = 0:0$.

Auch in diesem Zusammenhang geht Euler sofort auf das Unendlichgroße ein (§ 96): *"Während es bei den unendlich kleinen Größen verschiedene geometrische Verhältnisse gibt, obwohl doch alle arithmetischen Verhältnisse gleich sind, so gibt es bei den unendlich großen Größen gleiche geometri-*

*sche Verhältnisse, obwohl die arithmetischen beliebig ungleich sind."*
Sind z.B. $a, b$ endliche Größen, so haben $\frac{a}{dx} + b$ und $\frac{a}{dx}$ die Gleichheit als ihr geometrisches Verhältnis, $(\frac{a}{dx}+b) : \frac{a}{dx} = 1 + \frac{b \cdot dx}{a} = 1$, da ja $dx = 0$. Aber arithmetisch verglichen ist, da die Differenz $b$ ist, das Verhältnis die Ungleichheit. Bei $(\frac{a}{dx^2} + \frac{a}{dx}) : \frac{a}{dx^2} = 1$ ist das geometrische Verhältnis das der Gleichheit, die Differenz ist aber sogar unendlich groß.

Man wird für das "arithmetische Verhältnis der Gleichheit" wohl daran denken dürfen, daß Euler ein begeisterter Zahlenrechner war. Wenn er meint, durch ein Infinitesimales würde zu einer Zahl "Nichts" hinzugefügt, so bedeutet das, an der Dezimaldarstellung ändert sich nichts, alle n-ten Ziffern (für endliche $n$) der Dezimaldarstellung bleiben ungeändert. Diese Auffassung läßt sich schon durch sehr frühe Äußerungen Eulers bestätigen, so in der Darstellung des Konvergenzkriteriums.

Die Unendlichkleinen sind also nicht "absolute Nichtse", sondern sie ändern nur beim Addieren die arithmetische Darstellung endlicher Zahlen nicht. Daß Euler auch an eine "absolute Null" denkt, läßt sich belegen, z.B. aus Cap. XI des Teils 2 der *Institutiones* (De valoribus functionum qui certis casibus videntur indeterminati), wo es in § 356 heißt (im Zusammenhang mit dem Quotienten zweier "cyphrae"): *"Cum autem in cyphris absolutis ista diversitas perspici nequeat, earum loco quantitates infinite parvae introduci debent ..."* Man muß also in Zähler und Nenner statt der absoluten Nullen unendlichkleine Größen einführen, um den Wert des Quotienten $\frac{0}{0}$ zu bestimmen.

Für uns heute werden Eulers Begriffsbildungen sofort klar, wenn wir zwei verschiedene Äquivalenzrelationen einführen. Wenn das arithmetische Verhältnis zweier Zahlen die Gleichheit ist, so ist damit in der Tat eine Äquivalenzrelation definiert, welche sogar bezüglich Addition und Subtraktion eine Kongruenzrelation ist: Die Summen $a+b$, $a'+b'$ haben unendlich kleine Differenz, wenn $a-a'$ und $b-b'$ beide unendlich klein sind.

Auch das "geometrische Verhältnis der Gleichheit" stiftet eine Äquivalenzrelation in der Menge aller von Null verschiedenen Zahlen: $a$ ist äquivalent zu $b$ wenn der Quotient unendlich wenig von $1$ abweicht.

Wir sehen bei Euler und seinen Zeitgenossen zwei Schwierigkeiten, einmal den Mangel an brauchbaren Bezeichnungen und dann das Fehlen eines hinreichend deutlichen Begriffs von Äquivalenz. Das Bezeichnungsproblem ist durchaus nicht nebensächlich. Leibniz' meisterhafte Symbolik zur Differential- und Integralrechnung hat dem Kalkül zum Durchbruch verholfen. Wenn der aufmerksame und zugleich gutwillige Leser sich um Eulers Texte und vor allem um seine Rechnungen bemüht, dann sind Verständnisschwierigkeiten durchaus vermeidbar, doch hätten gute Bezeichnungen geholfen.



In begrifflicher Hinsicht allerdings ist es historisch wohl so, daß die "Erzeugung" neuer mathematischer Gegenstände als Klassen zu einer Äquivalenzrelation erst seit wenig mehr als hundert Jahren allgemeiner gebräuchlich wurde. Man bezeichnet dieses Vorgehen bekanntlich als extensionale Abstraktion. Freudenthal 1973, S. 37, schreibt: *"Der Kunstgriff, einen Begriff durch seine 'Extension' zu beschreiben, das heißt als Gesamtheit der Objekte, die unter den Begriff fallen, ist die Angel der Begriffsbildung überhaupt in der modernen Mathematik."* Die Tendenz extensionaler Begriffsbeschreibung habe von der Cantorschen Mengenlehre ihren Ursprung genommen oder sei von ihr jedenfalls gefördert worden. Zuvor überwog die intensionale Definition, die auf den Inhalt, den Sinn des Begriffes, eben seine Intension, abgestellt ist. Die Definition der rationalen Zahlen als Äquivalenzklassen von Zahlpaaren, $\frac{a}{b} \sim \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$, ist extensionalistisch. Eine intensionale Definition hingegen sagt aus, wann man zwei Brüche als gleich ansehen kann: Wenn es in den Rechnungen nichts ausmacht, den einen durch den anderen zu ersetzen. In Abwandlung von Leibniz' principium identitatis indiscernibilium wird das als gleich betrachtet, was zwar nicht in jeder Hinsicht, doch aber für den betrachteten Bereich – hier die rationale Arithmetik – ununterscheidbar ist. Freudenthal schreibt (S. 28): *"... statt zu sagen 'ich betrachte äquivalente $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ als identisch', führt man das Ding ein, das äquivalenten Paaren gemeinsam ist, nämlich ihre Äquivalenzklasse, und nennt es eine rationale Zahl."*

H. Weyl 1928, S. 10, weist auf Leibniz' fünften Brief an Clarke hin: *"Im übrigen habe ich es hier ungefähr so gemacht wie Euklid: der, da er den Begriff des geometrischen Verhältnisses im absoluten Sinne nicht recht definieren konnte, bestimmte, was unter gleichen Verhältnissen zu verstehen ist."* (Das bezieht sich auf das Buch V des Eudoxos und nicht nur auf die Verhältnisse ganzer Zahlen.) Und ebenfalls in diesem Brief: *"Der Geist aber ist mit dieser Übereinstimmung nicht zufrieden, er sucht eine Identität, ein Ding, das wahrhaft dasselbe wäre, und er stellt es sich wie außerhalb der Subjekte vor."*

Bezüglich der arithmetischen Gleichheit der (nicht unendlich großen) Zahlen braucht Euler neue Dinge nicht zu erschaffen, denn die reellen Zahlen als Dezimalbrüche sind vorhanden, und $a \approx b$ gilt genau dann, wenn es eine

Dezimalzahl $r$ gibt mit $a \approx r$ und $b \approx r$. Für die geometrische Gleichheit, welche bei endlichen Zahlen mit der arithmetischen im Ergebnis zusammenfällt, brauchen wir auch heute keine Klassen einzuführen. Bei anderen Äquivalenzen, die wir noch besprechen werden, sieht es nicht so einfach aus.

Frege, dem wir wohl in seinen "Grundlagen der Arithmetik" 1884 die ersten gründlichen modernen Überlegungen zur "Gleichheit" verdanken, macht sich explizit Leibniz' Definition zu eigen: *"Eadem sunt, quorum unum potest substitui alteri salva veritate."* Ob man "dasselbe" sage, wie Leibniz, oder "gleich", sei unerheblich (S. 76): *"'Dasselbe' scheint zwar eine vollkommene Übereinstimmung, 'gleich' nur eine in dieser oder jener Hinsicht auszudrücken; man kann aber eine solche Redeweise annehmen, daß dieser Unterschied wegfällt, indem man z.B. statt 'die Strecken sind in der Länge gleich' sagt 'die Länge der Strecken ist gleich' oder 'dieselbe' ..."*.
Etwas früher, 1882, hatte Pasch das Prinzip der idealen Elemente formuliert: *"Drei nicht in einer Ebene liegende Gerade* a,b,c, *die aber zu je zweien in einer Ebene liegen, bestimmen einen 'idealen Punkt'* [abc]. *Daß die Gerade* g *durch diesen Punkt hindurchgehe, soll besagen, daß* g *mit* a *in einer Ebene liegt, ebenso* g *mit* b, *ebenso* g *mit* c.*"*
Daraus ergibt sich dann, wann zwei solche ideale Punkte als identisch zu betrachten sind: Wenn jedes g, welches durch den ersten geht, auch durch den zweiten geht und umgekehrt. Nach 1880 bemerken wir ein Zusammenspiel von Extensionalem und Intensionalem: In einer "Menge" von Geradentripeln wird eine Äquivalenzrelation dadurch gestiftet, daß man sagt, wann zwei von ihnen zu dem gleichen idealen Punkt gehören: Wenn die beiden Tripel bezüglich einer bestimmten geometrischen Eigenschaft nicht unterschieden werden können.

Der Exkurs sollte zeigen: Euler steht mit den Problemen der Gleichheit durchaus nicht allein da.

Eulers Begriffe sind offen. Es gibt für ihn selbstverständlich keine festen Mengen von Zahlen oder Funktionen. Je nach den Bedürfnissen erweitert sich der Umfang. Ein expliziter Ausdruck, der eine Zahl oder Funktion darstellt, braucht nicht etwa eine endliche Zeichenkombination zu sein. Es kann sich bei der Funktion auch um die Lösung einer Differentialgleichung handeln, wobei zwar die Differentialgleichung selbst als endliche Formel dargestellt ist, über die Lösung aber, außer der Existenz, vielleicht nichts weiter bekannt ist. Der Vorteil ist, daß nur wirklich brauchbare Zahlen und Funktionen auftreten und Monster, die nur beim Abgrenzen der



Gültigkeit von Begriffen in der "Menge aller" Funktionen überhaupt interessant werden könnten, überhaupt nicht ins Blickfeld geraten.

Was die von Euler oft so genannte "expressio analytica", den analytischen (expliziten) Ausdruck angeht, so scheint mir, daß die Aussonderung der internen Funktionen ein im heutigen Sinne wohldefiniertes Analogon ist.

## 6.5 Augustin-Louis Cauchy (1789-1857)

Wie Euler verdanken wir auch Cauchy ein umfangreiches Forschungswerk zur Mathematik, Mechanik, Physik; und wie Euler hat er einflußreiche Lehrbücher zur Analysis geschrieben. Sie sind aber aus der tatsächlichen Vorlesungspraxis entstanden, aus dem Umgang mit Studenten besonders an der École polytechnique in Paris, während Euler keine Lehrtätigkeit an einer Universität ausübte. Es mag sein, daß Cauchys Bemühen, die Begriffe gleich zu Beginn der Lehrbücher sauber zu definieren, aus dieser Praxis herrührt. Allerdings sind diese Einführungen sehr knapp gehalten, kein Wort ist überflüssig, und man muß sehr genau lesen. Vor Mißverständnissen waren auch Cauchys Texte nicht sicher.

In der Zielsetzung verwandt mit Eulers Introductio ist der Cours d'analyse de l'École Royale polytechnique (1821; Oeuvres compl. (2),3). In diesem Band kommen Ableitungen und Integrale noch nicht vor. Es werden Grundlagen wie Stetigkeit untersucht, unendliche Reihen und elementare Funktionen.

In den Vorbemerkungen (S. 19) sagt Cauchy, nachdem er den Begriff der Größe auf die reellen positiven und negativen Größen beschränkt wissen will - komplexe Zahlen sind also keine Größen -, was er unter einer variablen Größe verstehen will: Sie ist fähig, nacheinander mehrere voneinander verschiedene Werte anzunehmen. Wenn die nacheinander einer Variablen zugeschriebenen Werte sich unbegrenzt einem festen Wert nähern, so daß sie sich schließlich so wenig wie man will von ihm unterscheiden, dann heißt dieser Wert die Grenze (la limite) der anderen. Beispielsweise ist eine irrationale Zahl die Grenze von Brüchen.

Wenn die Absolutbeträge unbegrenzt abnehmen, so daß sie schließlich unter jeder gegebenen Zahl liegen, dann wird diese Variable das, was man ein unendlich Kleines oder eine unendlich kleine Größe nennt. Eine derartige

Variable hat Null als Grenze.

Zu Anfang von Kapitel II (S. 37) erläutert er noch: Die verschiedenen Terme der Folge $\frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \ldots$ nehmen zwar beständig ab, aber sie nehmen nicht unbegrenzt ab, sondern konvergieren zur Grenze 1. Hingegen nehmen die Glieder der Folge $\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{8}, \frac{1}{7}, \ldots$ zwar nicht beständig ab, aber sie nehmen unbegrenzt ab. Der erste Satz des Kapitels lautet: "On dit qu'une quantité variable devient *infiniment petite*, lorsque sa valeur numérique (d.i. Absolutbetrag) décroît indéfiniment de manière à converger vers la limite zéro."

Zum unendlich Großen heißt es auf S. 19: "Wenn die aufeinanderfolgenden Absolutbeträge (les valeurs numériques successives) einer Variablen mehr und mehr wachsen, so daß sie schließlich jede gegebene Zahl übersteigen, sagt man, daß diese Variable das *positive Unendlich* als Grenze hat, bezeichnet mit $\infty$, wenn es sich um eine positive Veränderliche handelt, und das *negative Unendlich*, bezeichnet $-\infty$, wenn es sich um eine negative Variable handelt. Die positiven und negativen Unendlich werden gemeinsam mit dem Namen *unendliche Größen* bezeichnet (quantités infinies)."

Von den letzteren zu unterscheiden sind offenbar "die unendlich Großen", die auf S. 38 analog zu "den unendlich Kleinen" erläutert werden: "On dit qu'une quantité variable devient *infiniment grand* lorsque sa valeur numérique croît indéfiniment de manière à converger vers la limite $\infty$." Als Beispiel wird die Folge der natürlichen Zahlen angegeben.

Die Äußerungen sind nicht eindeutig interpretiert worden. Was *sind* die "unendlich Kleinen" und "unendlich Großen" denn nun eigentlich? Als explizite Beispiele finden sich zunächst nur zwei Folgen rationaler Zahlen!

Drei Interpretationen sind bekannt: Die des 19. Jahrhunderts à la Weierstraß ersetzt die unendlich Kleinen einfach durch Nullfolgen und übersetzt Cauchys Mathematik in die Sprache der Epsilontik. Robinson 1966 nimmt das Wort Variable im heutigen Wortsinne und will die Infinitesimalien von Cauchy als Variable interpretieren, welche gegen Null konvergieren. Die dritte Möglichkeit, die ich für angemessener halte, ist an den expliziten Beispielen mehr orientiert als an den mehrdeutigen Worten: Es handelt sich um eigenständige mathematische Entitäten, welche durch Folgen dargestellt werden (können). Damit erscheint die Theorie von $^{\Omega}\mathbb{R}$ aus Abschnitt 2.3 als ein möglicher Hintergrund. (Eine allgemeinere Auffassung in Cauchy 1823 bespreche ich am Ende dieses Abschnitts.) Wir sind es heute gewöhnt, Funktionen und speziell auch Folgen als mathematische Entitäten anzusehen;



ob Cauchy so dachte, weiß ich nicht. Analysieren wir den tatsächlichen Gebrauch!

Cauchy fährt fort (S. 38) mit ein paar Worten (peu de mots) über die Eigenschaften der unendlich kleinen und unendlich großen Größen, welche zur Lösung wichtiger Fragen führen, wie er sagt. Da geht es nun gleich zweideutig weiter: "Soit $\alpha$ une quantité infiniment petite, c'est-à-dire une variable dont la valeur numérique décroisse indéfiniment." Wenn nun in ein und derselben Rechnung die ganzen Potenzen $\alpha, \alpha^2, \alpha^3, \ldots$ auftreten, so heißen sie unendlich Kleine der ersten, zweiten, dritten, ... Ordnung. Ist $k$ eine von Null verschiedene endliche Größe und bezeichnet $\varepsilon$ eine variable Zahl, die mit dem Absolutbetrag von $\alpha$ unbegrenzt abnimmt, dann ist die allgemeine Gestalt der unendlich Kleinen n-ter Ordnung $k\alpha^n$ oder allenfalls $k\alpha^n(1 \pm \varepsilon)$. In den Formeln werden $\alpha$ und $\varepsilon$ als eigenständige Entitäten behandelt; im Text benutzt Cauchy die Sprachen der Variablen und Grenzen einerseits und die der unendlich Kleinen und Großen andererseits parallel zueinander.

Man kann ihn, mit Freudenthal, als Opportunisten bezeichnen. In der Tat benutzt er im konkreten Fall jeweils die zweckmäßigere Auffassung. Das mag in Vorlesungen mit seinen eigenen zusätzlichen Erläuterungen sehr einleuchtend gewesen sein, aber die Leser scheinen immer große Schwierigkeiten gehabt zu haben. Die Mehrdeutigkeit der sprachlichen Ausdrucksweise erlaubt es dem Leser, seine eigene Hintergrundauffassung zu haben: Auf diese kommt es für die tatsächliche Rechnung nicht an. Cauchy ist liberal.

Über die Ordnungen gibt Cauchy acht Theoreme an, von denen ich Theorem 7 herausgreife: Wenn ein Polynom $a + b\alpha^{n'} + c\alpha^{n} + \ldots$ nach aufsteigenden Potenzen von $\alpha$ geordnet ist und $n'$ eine gerade Zahl ist, dann entscheidet das Vorzeichen von $b$ darüber, ob ein Maximum oder Minimum vorliegt: Wenn $b$ negativ (positiv) ist, dann sind die Funktionswerte für unendlich kleine Werte von $\alpha$ stets kleiner (größer) als der an der Stelle Null, nämlich $a$. Es geht um Bestimmung von Extrema ohne Differentialrechnung.

Für die Stetigkeit bevorzugt Cauchy die Sprache der unendlich Kleinen (S. 43). Es sei $f(x)$ eine Funktion der Variablen $x$, deren Werte in einem Intervall (pour chaque valeur de $x$ intermédiaire entre deux limites données) überall eindeutig und endlich sind. Nun wird $f(x+\alpha) - f(x)$ betrachtet, in Abhängigkeit von der neuen Variablen $\alpha$ und dem Wert von $x$. (Hier käme man schon in Schwierigkeiten, scheint mir, wenn die einzelnen Werte von $\alpha$ selbst als Variable aufzufassen wären und nicht als Entitäten für sich.) Nun heißt es aber zunächst, $f(x)$ sei eine stetige Funktion im Intervall, wenn $f(x+\alpha) - f(x)$ für jeden Wert von $x$ im Intervall zusammen mit dem von $\alpha$ unbegrenzt abnimmt. Dann folgt, mit der Hervorhebung durch Cauchy selbst: "En d'autres termes, *la fonction* $f(x)$ *restera continue par rapport à* $x$ *entre les limites données, si, entre ces limites, un accroissement infiniment petit de la variable produit toujours un accroissement infiniment petit de la fonction elle-même.*"

Die herausgehobene Definition der Stetigkeit, zunächst in einem Intervall, ist die infinitesimalmathematische. Cauchy gibt noch die Definition der Stetigkeit in der Nachbarschaft eines speziellen Wertes von $x$: Dazu wird verlangt, daß die Funktion in einem Intervall um diese Stelle stetig sei.

Ich habe schon früher Beispiele dafür erwähnt, daß Cauchy seine infinitesimalmathematische Definition der Stetigkeit in Beweisen wirklich verwendet, und daß Beweise und Sätze auch nur in dieser Auffassung richtig sind. Das gilt für die Sätze über die Stetigkeit der Funktionen mehrerer Veränderlicher (3.5) und über die Reihen stetiger Funktionen (1.16). Im zweiten Fall ist es dann auch noch nötig, die Funktionen selbst an "Nichtstandard"-Werten im Intervall zu betrachten und auch dort die Konvergenz zu verlangen. Cauchy verwendet also ein Zahlkontinuum, das dichter ist als das der reellen (Dezimal-) Zahlen; so drückt Lakatos den Sachverhalt gelegentlich einmal aus.

Aber Cauchys Begriffsbildung war offenbar für die Zeitgenossen nicht deutlich genug! So blieb Abels Behauptung unwidersprochen, vor ihm (1826) habe noch niemand den Binomialsatz allgemein bewiesen. Es lohnt, Cauchys eleganten Beweis zu erwähnen. Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\mu}{n} x^n$ konvergiert infolge des Quotiententests für beliebige $x$ mit $|x| < 1$ und alle reellen $\mu$. Dann wird für ein festes solches $x$ die Funktion von $\mu$ allein betrachtet,

$$\phi(\mu) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\mu}{n} x^n .$$

Nach seinem Satz über die Reihenmultiplikation und aus den Beziehungen für Binomialkoeffizienten kann Cauchy auf die Funktionalgleichung $\phi(\mu)\phi(\mu') = \phi(\mu + \mu')$ schließen. Nun wird die Stetigkeit von $\phi(\mu)$ gezeigt: Da $u_n(\mu) = \binom{\mu}{n} x^n$ als Polynom in $\mu$ überall stetig ist, und da die Reihe $\Sigma\, u_n(\mu)$ für alle $\mu$ konvergiert, ist nach dem Summensatz (!) auch $\phi$ überall stetig. Nun folgt für rationale $\mu$ sofort $\phi(\mu) = (\phi(1))^{\mu} = (1+x)^{\mu}$. Da beide Funktionen $\phi(\mu)$ und $(1+x)^{\mu} = \exp\,(\mu \log(1+x))$ für alle $\mu$ stetig sind, folgt die Gleichheit überall. Cauchy gibt später im Cours auch einen Beweis für komplexe $x$.



Wie Euler in der Introductio, so benutzt auch Cauchy den "versteckten Hilfssatz", den ich hier als Lemma von der Stabilität des Grenzwerts bezeichnet habe (3.4). Er wendet den Binomialsatz bei infinitesimalem $\alpha$ an auf

$$(1 + x\alpha)^{1/\alpha} = 1 + x + \frac{x^2}{2!}(1-\alpha) + \frac{x^3}{3!}(1-\alpha)(1-2\alpha) + \ldots$$

und das geht für $|x\alpha| < 1$, also jedenfalls für alle beschränkten $x$. Da $\alpha$ infinitesimal ist, ersetzt er die rechte Seite durch die Exponentialreihe, und das ist wegen deren Konvergenz nach dem Lemma erlaubt. Daß man die linke Seite für endliche $x$ durch die Exponentialfunktion ersetzen kann, schließt man für $x\alpha = \beta$, also $(1 + x\alpha)^{1/\alpha} = (1+\beta)^{x/\beta}$, und für $(1+\beta)^{1/\beta}$ hat man die Reihe für $e$. Entsprechend folgt die Logarithmus-Reihe mit $\frac{(1+x)^{\alpha} - 1}{\alpha}$ wieder für infinitesimales $\alpha$ und $|x| < 1$. Unter Voraussetzung des Lemmas gilt sie sogar für $x = 1$ und gibt $\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} -+ \ldots$

Cauchy verwendet als weiteren versteckten Hilfssatz noch die Vollständigkeit der reellen Zahlen beim Beweis des Zwischenwertsatzes für stetige Funktionen, den er im Anhang III zum Cours im Zusammenhang mit numerischen Verfahren zur Lösung von Gleichungen gibt. Der Beweis läuft darauf hinaus, daß bei einer infinitesimalen Intervallteilung, die er durch Schachtelung erhält, an zwei benachbarten Teilstellen verschiedene Vorzeichen von $f$ auftreten müssen, wenn die Vorzeichen in den Enden des Ausgangsintervalls verschieden waren. Wegen der Stetigkeit von $f$ sind aber die beiden Werte an den Teilstellen infinitesimal benachbart, also (nahe bei) 0. (Das versteckte Lemma ist in unserer Sprache die Existenz des Standardteils.)

Alles bisherige läßt sich, wie man sieht, in die in diesem Buch behandelte Theorie von ${}^{\Omega}\mathbb{R}$ einordnen, wenn man Zahlfolgen als Repräsentanten der unendlich kleinen und unendlich großen Zahlen Cauchys nimmt. Auch in den Einleitungen zu seinen späteren Lehrbüchern hat Cauchy es als sein Hauptziel (but principal) bezeichnet, die Anschaulichkeit der Infinitesimalien mit der in der Analysis nötigen Strenge zu verbinden (Cauchy 1823, 1829). Die Definitionen und Sätze über Infinitesimalien aus Cauchy 1821 werden zum Teil wiederholt, und zwar wörtlich. Zusätzliches findet sich in 1829: "Désignons par $a$ une nombre constant, rationel ou irrationel; par $i$

une quantité infiniment petite, et par $r$ une nombre variable. Dans le système de quantités infiniment petites dont $i$ sera la base, une fonction de $i$ représentée par $f(i)$ sera un infiniment petit de *l'ordre* $a$ si la limite du rapport $f(i)/i^r$ est nulle pour toutes les valeurs de $r$ plus petites que $a$, et infini pour toutes les valeurs de $r$ plus grandes que $a$." (1829, p. 281)

In der sechsten Vorlesung von 1829 entwickelt Cauchy ausführlich eine Theorie der Infinitesimalien verschiedener Ordnungen, um sie auf Taylorsche Reihen anzuwenden. Von prinzipiellem Interesse für uns ist: Eine reelle Funktion $g(x)$ mit $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$ *repräsentiert* eine unendlich kleine Größe. Der frühere Fall der Nullfolgen $(a_n)$ ist als Sonderfall enthalten, für $a_n = g(x_n)$ bei $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Die Basis $i$ *kann* durch die Funktion $f(x) = x$ repräsentiert werden. Es ist müßig, darüber zu streiten, ob Infinitesimalien "Variable mit Grenze Null" sind und ob man Variable von Funktionen begrifflich unterscheiden muß: Cauchy sagt selbst, daß Infinitesimalien durch Funktionen repräsentiert werden können. Modern würde man sagen: Zwei Funktionen repräsentieren die gleiche Infinitesimalzahl, wenn sie in einer Umgebung von 0 gleiche Werte haben. Die Äquivalenzklassen nennt man manchmal Funktionenkeime, sie entsprechen Cauchys unendlich kleinen Größen. Der Leser wird selbst nachprüfen, daß sich alle Überlegungen Cauchys, welche wir in diesem Buche wiedergegeben haben, in diesem Sinne auffassen lassen.

## 6.6 Bernard Bolzano (1781-1848)

Cauchys Zeitgenosse Bolzano hat in seinen beiden letzten Lebensjahrzehnten bedeutende Überlegungen zur Begründung der Zahlen- und Größenlehre als Basis der Analysis angestellt. Leider sind sie ohne Einfluß geblieben. Bolzanos Kontaktschwierigkeiten mit den mathematischen Zeitgenossen und die Tatsache, daß er nur Entwürfe anfertigte, welche nicht zur Publikation geeignet waren, haben das verhindert. Erst seit wenigen Jahrzehnten sind die Manuskripte publiziert. (Hervorragend sind die beiden Editionen von Jan Berg in der Bernard-Bolzano-Gesamtausgabe, Stuttgart - Bad Cannstatt: Band 2.A.7 (1975), Größenlehre und Band 2.A.8 (1976) Größenlehre II, Reine Zahlenlehre.)



Man kann fragen, ob Gedanken, die in der Wissenschaftsgeschichte ohne Wirkung geblieben sind, für uns sehr interessant sind. Den Mathematikhistoriker interessiert so etwas natürlich; aber auch mir erscheint, wegen der deutlichen Verwandtschaft von Bolzanos Ansätzen zur hier gegebenen Grundlegung, die Darstellung wenigstens in knapper Form wichtig.

Bolzano geht aus von Größen- oder *Zahlenausdrücken*. Ein solcher Ausdruck entsteht durch endlich- oder unendlichoftmalige Anwendung der rationalen Rechenoperationen auf ganze Zahlen. Bei ihm finden sich u.a. die folgenden Beispiele:

(a) $1 + 1 + 1 + \ldots$ in inf,

(b) $1 + 2 + 3 + \ldots$ in inf,

(c) $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \ldots$ in inf,

(d) $\frac{1}{q} - \frac{b}{1+1+1+\ldots \text{ in inf}} = \frac{(1+1+\ldots \text{ in inf}) - qb}{q(1+1+1+\ldots \text{ in inf})}$

(e) $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$ in inf,

(f) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$ in inf.

Die Versuchung ist groß, die später üblich gewordene Sprache der Folgen zu verwenden, $a(n) = n$, $b(n) = \sum\limits_{k=1}^{n} k$ etc. zu schreiben und Bolzano als Entdecker der Zahlbereichserweiterung in § 2.3 zu feiern. Freilich steht er mit seinen Zahlenausdrücken noch nahe an Eulers expressio analytica und benötigt den mengentheoretischen Folgenbegriff nicht.

Mit den Ausdrücken kann man rationale Verbindungen bilden und erhält wieder solche Ausdrücke. Sie bilden, in unserer Sprache, einen Ring. Und Bolzano führt die wenigstens teilweise Anordnung in der uns schon bekannten Weise ein; in der Folgensprache ist der Ausdruck (a) als kleiner als der Ausdruck (b) zu erkennen. Daß es unvergleichbare Ausdrücke gibt wie (e) und die Rationalzahl $\frac{1}{2}$, bemerkt er natürlich.

Nun kommt die Aussonderung von *meßbaren Ausdrücken* $A$; das sind solche, bei denen es zu jeder natürlichen Zahl $q$ eine ganze Zahl $p = p(q)$ so gibt, daß

$$\text{(I)} \quad \frac{p}{q} \leqq A < \frac{p+1}{q}.$$

Die $\frac{p}{q}$ heißen die *messenden Brüche* zum Ausdruck $A$. Man kann das als einen "Dedekindschen" Schnitt in den rationalen Zahlen deuten und sieht, daß eine Definition der reellen Zahlen vor der Tür steht.

Ist bei einem meßbaren Ausdruck jedes $p=0$, so ist $A$ positiv unendlich klein, sind alle $p=-1$, so ist $A$ negativ unendlich klein.

Zunächst hat Bolzano nicht bedacht, daß er damit "alternierende" unendlich kleine Zahlen ausschließt; daher mißlingt der Beweis eines Satzes, der ihm wichtig ist: Summe und Differenz unendlich kleiner Zahlen sind unendlich klein. Aber das hat er gemerkt, und ganz am Ende seines Manuskripts hat er einen Ausweg angedeutet: $A$ heißt meßbar, wenn es zu jeder natürlichen Zahl $q$ eine ganze Zahl $p(q)$ gibt mit

$$\text{(II)} \quad \frac{p-1}{q} < A < \frac{p+1}{q}.$$

Es kann sein, daß $p$ nicht eindeutig bestimmt ist, aber das muß man in Kauf nehmen. Hier zeigt sich übrigens eine Schwierigkeit, die auch bei anderen Begründungen der reellen aus den rationalen Zahlen in ähnlicher Weise auftritt und die wir schon bei Eudoxos bemerkten. Sie ergibt sich aus der Sonderstellung der rationalen Zahlen selbst. Bolzanos Definition (I) kann nämlich nur dann versagen, wenn zum meßbaren Ausdruck $A$ eine rationale Zahl gehört, $r=\frac{m}{n}$. Ist der gegebene Nenner $q$ ein Vielfaches von $n$, $q=j\cdot n$, so betrachte man die beiden Möglichkeiten $p(q)=j\cdot m$ und $p'(q)=j\cdot m-1$; für andere Nenner $q$ ist $p'(q)=p(q)$ eindeutig festgelegt durch die Ungleichungen (I). Die beiden Folgen von messenden Brüchen sollten äquivalent sein und zur gegebenen Zahl $r$ gehören; das gilt aber nicht. - Bei den Dedekindschen Schnitten entspricht dem die Alternative, $r$ zur Rechts- oder zur Linksklasse des erzeugten Schnitts rechnen zu können. Bei der Zifferndarstellung, beispielsweise im Dezimalsystem, gehört dazu die Möglichkeit der Neunerperiode bei abbrechenden Dezimalzahlen; in diesem System interessieren nur "messende Brüche" mit $q$ = Zehnerpotenz.

Übrigens sind "alternierende" Ausdrücke durchaus nichts Ungewöhnliches; man kann Beispiele in Bolzanos Ausdrucksweise leicht angeben:

$$1-(1+\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}+\frac{1}{3})-(\frac{1}{3}+\frac{1}{4})+- \text{ in inf.}$$

$$=1-\frac{2+1}{2\cdot 1}+\frac{3+2}{3\cdot 2}-\frac{4+3}{4\cdot 3}+- \text{ in inf.}$$

Gibt es zu jedem $q$ ein $p(q)$, so daß $\frac{p}{q}<A$, aber für kein $p$ gilt $A<\frac{p+1}{q}$, so ist $A$ unendlich groß. Entsprechend definiert man negative,



absolut unendlich große Zahlen. Aber ein unmeßbarer Ausdruck braucht nicht notwendigerweise (absolut) unendlich groß zu sein. Das Beispiel $1-1+1-+$ in inf. ist bekannt.

Die nicht meßbaren Ausdrücke sind zunächst durchaus zugelassen, aber von jetzt an konzentriert sich Bolzano auf die meßbaren: Zwei meßbare Größenausdrücke heißen *gleichgeltend*, wenn die messenden Brüche $\frac{p}{q}$ übereinstimmend gewählt werden können. Das ist offenbar dasselbe wie daß ihre Differenz infinitesimal ist, und es handelt sich um eine Äquivalenzrelation. Mit dieser Begriffsbildung hat auch Bolzano noch etwas Schwierigkeiten.

Leider schreibt Bolzano auch bei gleichgeltenden Zahlen $A=B$, "soferne nur beyde meßbar und bey dem Geschäfte dieses Messens einerley Zahlen darbieten, in dem Sinne, daß zu jedem beliebigen $q$ immer dasselbe positive oder negative $p$ für $A$ sowohl als für $B$ gehöret ..." (Größenlehre 2, S. 134; auf S. 135 weiter:)

"Um einen möglichen Mißverstand zu verhüten, bemerke ich, daß es nicht der Begriff der *Gleichheit* an sich selbst sey, der durch die vorstehende Erklärung eine gewisse Erweiterung erfährt, sondern daß ich hier nur den *Gegenstand*, auf den die Gleichheit bezogen werden soll, einiger Maßen abgeändert habe. Ich setze nähmlich durch die Aufstellung meiner Erklärung nur fest, daß ich in Zukunft, wenn es sich um die Beurtheilung der Gleichheit oder Ungleichheit der Zahlen handeln wird, *nur ihr Verhalten beim Geschäfte des Messens*, oder genauer zu reden, *nur die Beschaffenheit ihres messenden Bruches* berücksichtigen wolle, ohngefehr eben so, wie auch der Geometer nicht den Begriff der Gleichheit, sondern nur das Object derselben ändert, wenn er erklärt, daß er zwei Linien einander gleich nennen wollte, wenn sie nur gleiche Längen haben ..."

Die Ausdrucksweise ist deutlicher als bei Euler, aber leider wird kein neues Zeichen eingeführt, und die Gefahren des Rechnens mit relativen Nullen, wie die unendlich kleinen Zahlen jetzt auch genannt werden, sind für den Benutzer nicht ganz beseitigt.

Allerdings ist Bolzano nie so weit gelangt, eine Infinitesimalrechnung systematisch zu begründen; dabei hätten die Nullen dann stören können. Eines von Bolzanos - allerdings nicht erreichten - Hauptzielen ist der Beweis dessen, was man später die Vollständigkeit der reellen Zahlen nennen sollte. Deren Beweisnotwendigkeit hatte er schon 1817 erkannt, im Zusammenhang mit dem Beweis des Nullstellensatzes für stetige Funktionen. Ein Beweis dafür, daß die durch Größenausdrücke in Bolzanos Sinn darstellbaren reellen Zahlen vollständig sind, ist nicht offensichtlich. Am nächsten kommt einem solchen Ziel wohl die konstruktive Auffassung in P. Lorenzen, Differential und Integral, Frankfurt 1965.

In unserem Zusammenhang kommt es darauf an, daß Bolzano begrifflich und faktisch sorgfältig unterscheidet zwischen Zahlenausdrücken für das Rechnen einerseits und den reellen Maßzahlen andererseits. Als *Rechen*ausdrücke haben auch infinitesimale und infinite Zahlen einen mathematischen Sinn; die Frage nach ihrer wie auch immer bestimmten Realität tritt dabei nicht auf. Bolzano rechtfertigt damit die Infinitesimalmathematik: Es ist nicht so, daß man für Rechnen und Messen notwendigerweise dasselbe - und, wie sich im 19. Jahrhundert dann immer mehr durchsetzte, das reelle - Zahlsystem verwenden muß. Wie die Rechenausdrücke und die fürs Messen geeigneten ("reellen") Zahlen zusammenhängen, hat Bolzano erklärt.

## 6.7 Wege ins 20. Jahrhundert

Von Cauchy an sieht man deutlich zwei Möglichkeiten der Weiterentwicklung: Die Grenzwertanalysis einerseits und die Infinitesimalmathematik andererseits. Ich habe gezeigt, daß die letztere mit Cauchys eigenen Sätzen und Beweisen besser übereinstimmt. Die Geschichte hat sich für die erstere Möglichkeit entschieden. Besonders die Vorlesungen von Weierstraß in Berlin in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts sorgten dafür, daß eine *für alle* lehrbare, strenge Begründung der Analysis aus dem Grenzwertbegriff sich durchsetzte. Damit konnten die Infinitesimalien eliminiert werden. Sind die grundlegenden Sätze erst einmal bewiesen, so benötigt man für den weiteren Ausbau ja nur diese, und ihre Beweise selbst werden für den "arbeitenden" Mathematiker uninteressant. Die Frage nach dem Einstieg ist eine didaktische Angelegenheit, nicht eine fachwissenschaftliche. Die Elimination der Infinitesimalien erfordert einen Preis: Die Definitionen von Konvergenz und Stetigkeit enthalten in der Grenzwertmathematik jeweils zwei Quantoren mehr als in der Infinitesimalauffassung, und zusätzliche Begriffe (Gleichmäßigkeit) werden erforderlich. Das äußere Zeichen für die Elimination des Infinitesimalen ist die Übernahme der archimedischen Eigenschaft der rationalen Zahlen als ein Axiom für alle (reellen) Zahlen und die - unrichtige - Ansicht, daß Archimedizität notwendige Voraussetzung für Stetigkeitsüberlegungen sei. Konsequent nimmt dann Hilbert in den Grundlagen der Geometrie von 1899 die Archimedizität neben der Vollständigkeit in die Stetigkeitsaxiome auf.



Die Bekämpfung des Infinitesimalen geschah zuweilen mit untauglichen oder unfairen Mitteln. Untauglich war selbstverständlich Cantors "Beweis" für die Nichtexistenz des unendlich Kleinen. Unfair war das Vorgehen mengentheoretisch orientierter Mathematiker gegen einen gleich noch zu besprechenden Ansatz von Veronese und Levi-Cività. Über diesen Streit kann man sich in den Bänden des Jahresberichts der DMV aus den Jahren um 1900 unterrichten.

Veroneses Fondamenti di geometria (1891; deutsch 1894) behandelten die n-dimensionale Geometrie axiomatisch, und die Koordinaten waren nicht auf die reellen Zahlen beschränkt. Mit einem unendlich großen $\infty_1$ treten bei ihm Ausdrücke auf wie $1,\ 1+\frac{1}{\infty_1},\ 1+\frac{1}{\infty_1}+\frac{1}{\infty_1^{\ 1}}, \ldots$ Das erinnert sehr an Eulers analytische Ausdrücke, aber für die Zeitgenossen war das nicht streng. Veroneses Schüler Tullio Levi-Cività, später in der Differentialgeometrie und Mechanik bedeutend, hat in zwei Aufsätzen interessante Begründungen dazu geleistet. Die erste Arbeit erschien, als der Autor noch nicht einmal zwanzig Jahre alt war (Sugli infiniti ed infinitesimi attuali quali elementi analitici, Atti Istituto Veneto di Sc., lett. ed arti, ser. $7^a$, t.4, 1892/93, p. 1765-1815). Das ist eine der ersten Arbeiten zur "modernen Algebra", welche es gibt: Es werden nicht-archimedische Körper explizit konstruiert. Im einfachsten Fall betrachte man formale Potenzreihen $A = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \omega^{\alpha_k}$. (Das ist meine Schreibweise mit $\omega = \frac{1}{\infty_1}$; Levi-Cività will sich nicht neue Einwände einhandeln und spricht von Paaren von Zahlfolgen, legt die Rechenregeln aber entsprechend denen für Potenzreihen fest.) Die $a_k$, $\alpha_k$ sind reell, und zu jedem reellen $r$ gibt es höchstens endlich viele $\alpha_k \leq r$ mit $a_k \neq 0$. Das Vorzeichen von $A$ ist gleich dem Vorzeichen des ersten nicht-verschwindenden $a_k$, sagen wir $a_o$. Dann ist $A$ infinitesimal, wenn $\alpha_o > 0$ und unendlich groß, wenn $\alpha_o < 0$. Diese $A$ bilden einen nicht-archimedischen Körper.

Es wurde sofort eingewendet, daß damit die Veroneseschen Zahlen nicht sämtlich erfaßt sind. In zwei Noten geht Levi-Cività dann auf weitgehende Verallgemeinerungen ein (Sui numeri transfiniti, Rend. Acc. Lincei, ser. $5^a$, vol. 7, 1898, p. 91-96, 113-121.) Jetzt entstammen die $a_k$ einem beliebigen angeordneten Körper und die $\alpha_k$ einer angeordneten Gruppe, und für diese Körper und Gruppen kann man bereits konstruierte Körper und deren additive Gruppe nehmen. Schließlich bilde man die Vereinigung von solchen Körpern. Das alles waren wohl verfrühte Entdeckungen, und sie blieben fast ohne Resonanz; Hans Hahn hat seine Dissertation angeschlossen (Über die nichtarchimedischen Größensysteme, Sitzungsber. Akad. Wiss.