It's a long way to infinity

L. Halbeisen
N. Hungerbühler

Was Sie erwartet:

Einleitung

Das Unendliche ist eine tragende Säule der Analysis.

L. Halbeisen
N. Hungerbühler

Einleitung

Die klassische Analysis nähert sich dem unzugänglichen Unendlichen mit Hilfe des Limesbegriffs. Auf entsprechenden Konstruktionen ruhen, unter anderem:

Einleitung

Die klassische Analysis nähert sich dem unzugänglichen Unendlichen mit Hilfe des Limesbegriffs. Auf entsprechenden Konstruktionen ruhen, unter anderem:

- eine Konstruktion der reellen Zahlen

Einleitung

Die klassische Analysis nähert sich dem unzugänglichen Unendlichen mit Hilfe des Limesbegriffs. Auf entsprechenden Konstruktionen ruhen, unter anderem:

- eine Konstruktion der reellen Zahlen
- die Begriffe der Stetigkeit, der Reihe, der Ableitung und des Integrals

Einleitung

Die klassische Analysis nähert sich dem unzugänglichen Unendlichen mit Hilfe des Limesbegriffs. Auf entsprechenden Konstruktionen ruhen, unter anderem:

- eine Konstruktion der reellen Zahlen
- die Begriffe der Stetigkeit, der Reihe, der Ableitung und des Integrals
- die Konstruktion von Lösungen von Gleichungen: Zwischenwertsatz von Bolzano, Existenzsatz von Picard-Lindelöf, Existenzaussagen für partielle Differentalgleichungen

Einleitung

Die klassische Analysis nähert sich dem unzugänglichen Unendlichen mit Hilfe des Limesbegriffs. Auf entsprechenden Konstruktionen ruhen, unter anderem:

- eine Konstruktion der reellen Zahlen
- die Begriffe der Stetigkeit, der Reihe, der Ableitung und des Integrals
- die Konstruktion von Lösungen von Gleichungen: Zwischenwertsatz von Bolzano, Existenzsatz von Picard-Lindelöf, Existenzaussagen für partielle Differentalgleichungen
- zahllose Anwendungen im Bereich der Numerik

Einleitung

Warum ist die Geschichte der Genese der Begriffe *Unendlich* und *Limes* relevant für die Didaktik?

Einleitung

Warum ist die Geschichte der Genese der Begriffe *Unendlich* und *Limes* relevant für die Didaktik?

- Die grössten Denker der Geschichte haben über zwei Jahrtausende um diese Begriffe gerungen.

Einleitung

Warum ist die Geschichte der Genese der Begriffe *Unendlich* und *Limes* relevant für die Didaktik?

- Die grössten Denker der Geschichte haben über zwei Jahrtausende um diese Begriffe gerungen.
- Das gymnasiale Curriculum orientiert sich an der historischen Entwicklung: Die Ontogenese rekapituliert die Phylogenese.

Einleitung

Warum ist die Geschichte der Genese der Begriffe *Unendlich* und *Limes* relevant für die Didaktik?

- Die grössten Denker der Geschichte haben über zwei Jahrtausende um diese Begriffe gerungen.
- Das gymnasiale Curriculum orientiert sich an der historischen Entwicklung: Die Ontogenese rekapituliert die Phylogenese.
- Genese: Wie kommt man zu einem bestimmten Begriff? Warum so? Wozu braucht man den Begriff?

Einleitung

Warum ist die Geschichte der Genese der Begriffe *Unendlich* und *Limes* relevant für die Didaktik?

- Die grössten Denker der Geschichte haben über zwei Jahrtausende um diese Begriffe gerungen.
- Das gymnasiale Curriculum orientiert sich an der historischen Entwicklung: Die Ontogenese rekapituliert die Phylogenese.
- Genese: Wie kommt man zu einem bestimmten Begriff? Warum so? Wozu braucht man den Begriff?
- Schlüsselstellen der Geschichte sind Schlüsselstellen für die Fachdidaktik der Mathematik.

Warum sind nicht abbrechende Prozesse so wichtig?

Konstruktiver Aspekt des Grenzwertbegriffs: Approximation sonst unzugänglicher Objekte oder Grössen durch Folgen.

Warum sind nicht abbrechende Prozesse so wichtig?

Konstruktiver Aspekt des Grenzwertbegriffs: Approximation sonst unzugänglicher Objekte oder Grössen durch Folgen.

- **Gemetrie:** Approximation der Zahl π durch Exhaustion

Warum sind nicht abbrechende Prozesse so wichtig?

Konstruktiver Aspekt des Grenzwertbegriffs: Approximation sonst unzugänglicher Objekte oder Grössen durch Folgen.

- **Gemetrie:** Approximation der Zahl π durch Exhaustion
- **Physik:**
  - Zusammenhang zwischen Ortsfunktion, Geschwindigkeit und Beschleunigung, Newtons zweites Gesetz.
  - Als Ergänzung zu Oberfächen- und Volumenberechnungen von Rotationskörpern: Trägheitsmomente, Schwerpunktsberechnungen (Sätze von Steiner und Guldin) als Illustration von Riemannsummen.

Warum sind nicht abbrechende Prozesse so wichtig?

Konstruktiver Aspekt des Grenzwertbegriffs: Approximation sonst unzugänglicher Objekte oder Grössen durch Folgen.

Warum sind nicht abbrechende Prozesse so wichtig?

Konstruktiver Aspekt des Grenzwertbegriffs: Approximation sonst unzugänglicher Objekte oder Grössen durch Folgen.

- **Numerik:** Bisektionsverfahren, Lösung einfacher Fixpunktgleichungen durch Iteration, Heron- oder Aitkenverfahren (algorithmischer Aspekt, Innenleben des TR).

Warum sind nicht abbrechende Prozesse so wichtig?

Konstruktiver Aspekt des Grenzwertbegriffs: Approximation sonst unzugänglicher Objekte oder Grössen durch Folgen.

- **Numerik:** Bisektionsverfahren, Lösung einfacher Fixpunktgleichungen durch Iteration, Heron- oder Aitkenverfahren (algorithmischer Aspekt, Innenleben des TR).
- **Fraktale**: Kochsche Schneeflocke, Sierpinski-Dreieck, Einzugsgebiet der Nullstellen der Newton-Methode für $z^3 - 1$.

Warum sind nicht abbrechende Prozesse so wichtig?

Konstruktiver Aspekt des Grenzwertbegriffs: Approximation sonst unzugänglicher Objekte oder Grössen durch Folgen.

- **Numerik:** Bisektionsverfahren, Lösung einfacher Fixpunktgleichungen durch Iteration, Heron- oder Aitkenverfahren (algorithmischer Aspekt, Innenleben des TR).
- **Fraktale**: Kochsche Schneeflocke, Sierpinski-Dreieck, Einzugsgebiet der Nullstellen der Newton-Methode für $z^3 - 1$.
- **Stochastik:** Gesetz der grossen Zahlen, Monte Carlo Simulationen.

Der klassische Weg der Antike

Euklid

- berechnet Flächen mit der Exhaustionsmethode

Der klassische Weg der Antike

Euklid

- berechnet Flächen mit der Exhaustionsmethode
- beweist in Satz 2 aus dem Buch XII der *Elemente* mit Hilfe der Exhaustionsmethode:

Kreissatz

Kreisflächen verhalten sich zueinander wie die Quadrate ihrer Radien.

Der klassische Weg der Antike

Euklid

- berechnet Flächen mit der Exhaustionsmethode
- beweist in Satz 2 aus dem Buch XII der *Elemente* mit Hilfe der Exhaustionsmethode:

Kreissatz

Kreisflächen verhalten sich zueinander wie die Quadrate ihrer Radien.

$$\bullet : \bullet = R^2 : r^2$$

Der klassische Weg der Antike

Euklid

- berechnet Flächen mit der Exhaustionsmethode
- beweist in Satz 2 aus dem Buch XII der *Elemente* mit Hilfe der Exhaustionsmethode:

Kreissatz

Kreisflächen verhalten sich zueinander wie die Quadrate ihrer Radien.

$$0 = \bullet : \bullet - R^2 : r^2$$

Der klassische Weg der Antike

Euklid

- berechnet Flächen mit der Exhaustionsmethode
- beweist in Satz 2 aus dem Buch XII der *Elemente* mit Hilfe der Exhaustionsmethode:

Kreissatz

Kreisflächen verhalten sich zueinander wie die Quadrate ihrer Radien.

$$0 = \left| \bullet : \bullet - R^2 : r^2 \right|$$

Der klassische Weg der Antike

Euklid

- berechnet Flächen mit der Exhaustionsmethode
- beweist in Satz 2 aus dem Buch XII der *Elemente* mit Hilfe der Exhaustionsmethode:

Kreissatz

Kreisflächen verhalten sich zueinander wie die Quadrate ihrer Radien.

$$0 < \lambda = \left| \bullet : \bullet - R^2 : r^2 \right|$$

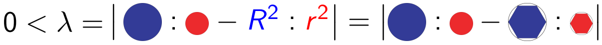
Der klassische Weg der Antike

Euklid

- berechnet Flächen mit der Exhaustionsmethode
- beweist in Satz 2 aus dem Buch XII der *Elemente* mit Hilfe der Exhaustionsmethode:

Kreissatz

Kreisflächen verhalten sich zueinander wie die Quadrate ihrer Radien.



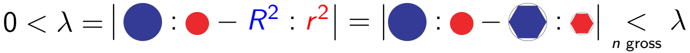
Der klassische Weg der Antike

Euklid

- berechnet Flächen mit der Exhaustionsmethode
- beweist in Satz 2 aus dem Buch XII der *Elemente* mit Hilfe der Exhaustionsmethode:

Kreissatz

Kreisflächen verhalten sich zueinander wie die Quadrate ihrer Radien.



Der klassische Weg der Antike

Euklid

- berechnet Flächen mit der Exhaustionsmethode
- beweist in Satz 2 aus dem Buch XII der *Elemente* mit Hilfe der Exhaustionsmethode:

Kreissatz

Kreisflächen verhalten sich zueinander wie die Quadrate ihrer Radien.

$$0 < \lambda = \left| \text{⬤} : \text{●} - R^2 : r^2 \right| = \left| \text{⬤} : \text{●} - \text{⬢} : \text{⬢} \right| \underset{n \text{ gross}}{<} \lambda \ \lightning$$

Exhaustionsmethode

- Eine Fläche wird durch eingeschriebene Flächen "ausgeschöpft".

Exhaustionsmethode

- Eine Fläche wird durch eingeschriebene Flächen "ausgeschöpft".
- Grundlage ist ein Satz von Eudoxos von Knidos.

Exhaustionsmethode

- Eine Fläche wird durch eingeschriebene Flächen "ausgeschöpft".
- Grundlage ist ein Satz von Eudoxos von Knidos.

Exhaustionslemma

Zieht man von irgendeiner Grösse einen Teil ab, der nicht kleiner als die Hälfte dieser Grösse ist, vom Rest einen Teil, der nicht kleiner als die Hälfte ist, und so weiter, so bleibt schliesslich eine Grösse übrig, die kleiner als jede vorgegebene Grösse derselben Art ist.

Exhaustionsmethode

- Eine Fläche wird durch eingeschriebene Flächen "ausgeschöpft".
- Grundlage ist ein Satz von Eudoxos von Knidos.

Exhaustionslemma

Zieht man von irgendeiner Grösse einen Teil ab, der nicht kleiner als die Hälfte dieser Grösse ist, vom Rest einen Teil, der nicht kleiner als die Hälfte ist, und so weiter, so bleibt schliesslich eine Grösse übrig, die kleiner als jede vorgegebene Grösse derselben Art ist.

- Exhaustion kommt ohne Grenzwertbegriff aus!

Die Griechen hatten eine “heilige Scheu” vor dem Unendlichen:

Die Griechen hatten eine “heilige Scheu” vor dem Unendlichen:

- **Das Paradoxon von Zenon:** Der Wettlauf zwischen Achilles und der Schildkröte zeigt, dass Argumente mit unendlich vielen Schritten undurchsichtig werden.

Die Griechen hatten eine “heilige Scheu” vor dem Unendlichen:

- **Das Paradoxon von Zenon:** Der Wettlauf zwischen Achilles und der Schildkröte zeigt, dass Argumente mit unendlich vielen Schritten undurchsichtig werden.

- **Das Paradoxon vom fliegenden Pfeil**: Es zeigt, dass der Begriff der Geschwindigkeit einer Klärung bedarf.

Die Griechen hatten eine "heilige Scheu" vor dem Unendlichen:

- **Das Paradoxon von Zenon:** Der Wettlauf zwischen Achilles und der Schildkröte zeigt, dass Argumente mit unendlich vielen Schritten undurchsichtig werden.

- **Das Paradoxon vom fliegenden Pfeil**: Es zeigt, dass der Begriff der Geschwindigkeit einer Klärung bedarf.
- Euklid formulierte seinen Primzahlsatz im Buch IX der Elemente sehr vorsichtig:

  Es gibt mehr Primzahlen als jede vorgelegte Anzahl von Primzahlen.

Die Griechen hatten eine “heilige Scheu” vor dem Unendlichen:

- **Das Paradoxon von Zenon:** Der Wettlauf zwischen Achilles und der Schildkröte zeigt, dass Argumente mit unendlich vielen Schritten undurchsichtig werden.

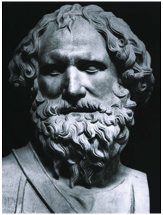
- **Das Paradoxon vom fliegenden Pfeil**: Es zeigt, dass der Begriff der Geschwindigkeit einer Klärung bedarf.

- Euklid formulierte seinen Primzahlsatz im Buch IX der Elemente sehr vorsichtig:

  Es gibt mehr Primzahlen als jede vorgelegte Anzahl von Primzahlen.

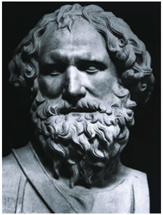
  Also nicht etwa so: *Es gibt unendlich viele Primzahlen.*

Blüte der Exhaustionsmethode



Archimedes

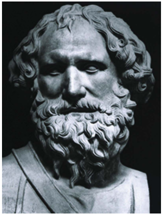
Blüte der Exhaustionsmethode



Archimedes (Happy Birthday!)

- trieb die Exhaustionsmethode zur Blüte

Blüte der Exhaustionsmethode



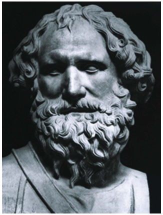
Archimedes (Happy Birthday!)

- trieb die Exhaustionsmethode zur Blüte
- berechnete unter anderem die Fläche eines Parabelsegments:

Parabelsegment

Der Inhalt eines Parabelsegments ist 4/3 des Inhalts des Dreiecks, das mit ihm gleiche Grundfläche und Höhe hat.

Blüte der Exhaustionsmethode



Archimedes (Happy Birthday!)

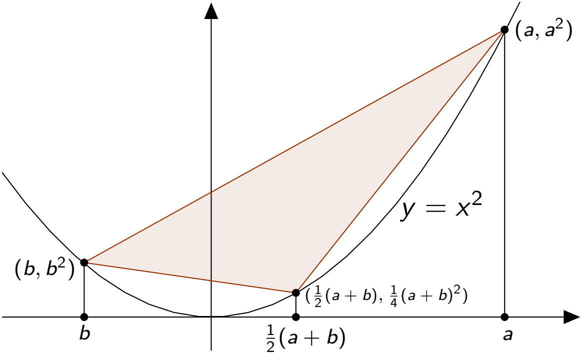
- trieb die Exhaustionsmethode zur Blüte
- berechnete unter anderem die Fläche eines Parabelsegments:

Parabelsegment

Der Inhalt eines Parabelsegments ist $4/3$ des Inhalts des Dreiecks, das mit ihm gleiche Grundfläche und Höhe hat.

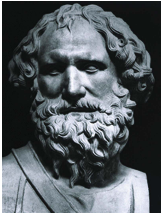
Die Fläche unter der Kurve minus ein Sandkorn ist kleiner als die Gesamtfläche des Mosaiks aus den vielen Dreiecken.

In der Schule?



$$\text{Dreiecksfläche} = \frac{1}{2}\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & \frac{1}{2}(a+b) \\ a^2 & b^2 & \frac{1}{4}(a+b)^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{8}(a-b)^3$$

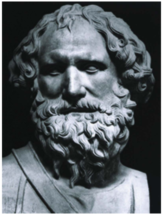
Archimedes' Vision



Archimedes

- entwickelte eine mechanische Methode

Archimedes' Vision



Archimedes

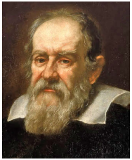
- entwickelte eine mechanische Methode

Die mechanische Methode (im Palimpsest)

Archimedes fand vor dem Exhaustionsbeweis ein heuristisches Argument, indem er die Flächen als "Summe" paralleler Strecken (Indivisiblen) auffasste und gegeneinander abwog.

Genial, aber ad hoc!

Der klassische Weg in die Neuzeit: Das 16. und 17. Jahrhundert



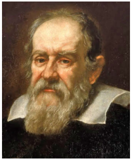
Galileo Galileis Programm für die Physik:

qualitativ beschreibende (aristotelische) Lehre

$\downarrow$

quantitativ erklärende (mathematische) Grundlage

Der klassische Weg in die Neuzeit: Das 16. und 17. Jahrhundert



Galileo Galileis Programm für die Physik:

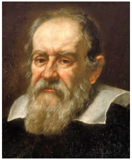
qualitativ beschreibende (aristotelische) Lehre

$\downarrow$

quantitativ erklärende (mathematische) Grundlage

Galileo untersuchte insbesondere die Begriffe Geschwindigkeit und Beschleunigung mit Hilfe der Indivisiblenmethode.

Der klassische Weg in die Neuzeit: Das 16. und 17. Jahrhundert



Galileo Galileis Programm für die Physik:

qualitativ beschreibende (aristotelische) Lehre

$\downarrow$

quantitativ erklärende (mathematische) Grundlage

Galileo untersuchte insbesondere die Begriffe Geschwindigkeit und Beschleunigung mit Hilfe der Indivisiblenmethode.

James Gregory erkannte:

Quadraturen und Kubaturen erfordern eine ganz neue Operation: den Grenzübergang. Mit Geometrie und Algebra allein sind erst einige Zimmer im Haus der Mathematik zugänglich!

Das 16. und 17. Jahrhundert

Isaac Newton

- entdeckte die binomische Reihe (1665),

Das 16. und 17. Jahrhundert

Isaac Newton

- entdeckte die binomische Reihe (1665),
- löste das Problem Momentangeschwindigkeit (1665)

Das 16. und 17. Jahrhundert

Isaac Newton

- entdeckte die binomische Reihe (1665),
- löste das Problem Momentangeschwindigkeit (1665)
- fand den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (1666).

Das 16. und 17. Jahrhundert

Isaac Newton

- entdeckte die binomische Reihe (1665),
- löste das Problem Momentangeschwindigkeit (1665)
- fand den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (1666).

Newton zum Grenzwert des Differenzenquotienten

"Die letzten Verhältnisse, mit denen Grössen verschwinden, sind nicht die Verhältnisse letzter Grössen sondern Grenzwerte, denen sich die Verhältnisse unbegrenzt abnehmender Grössen ständig nähern und denen sie näher kommen als irgendeine vorgegebene Differenz..."

Das 16. und 17. Jahrhundert

Gottfried Wilhelm Leibniz

- entwickelte die Infinitesimalrechnung (ab 1675)

Das 16. und 17. Jahrhundert

Gottfried Wilhelm Leibniz

- entwickelte die Infinitesimalrechnung (ab 1675)
- führte die heute gebräuchliche suggestive Notation ein

Das 16. und 17. Jahrhundert

Gottfried Wilhelm Leibniz

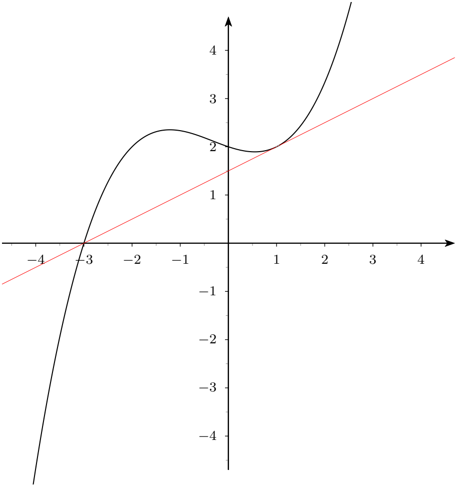
- entwickelte die Infinitesimalrechnung (ab 1675)
- führte die heute gebräuchliche suggestive Notation ein

Leibniz über die Tangente

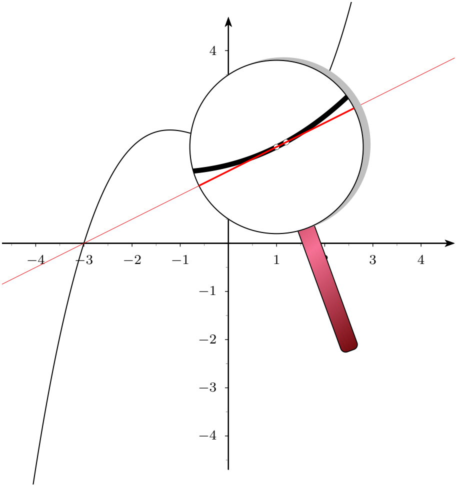
"Eine Tangente ist die Verbindungslinie zweier Kurvenpunkte, die einen unendlich kleinen Abstand voneinander haben."

Im erst 1993 transkribierten *De quadratum arithmetica circuli ellipseos et hyperbolae cujus corollarium est trigonometria sine tabulis* fomuliert Leibnitz jedoch sorgfältig und modern, *"dass eine krummlinig begrenzte Flache durch eine geradlinig begrenzte treppenförmige Fläche beliebig genau angenähert werden kann, indem der Fehler kleiner gemacht werden kann als jede vorgegebene positive Zahl"*.

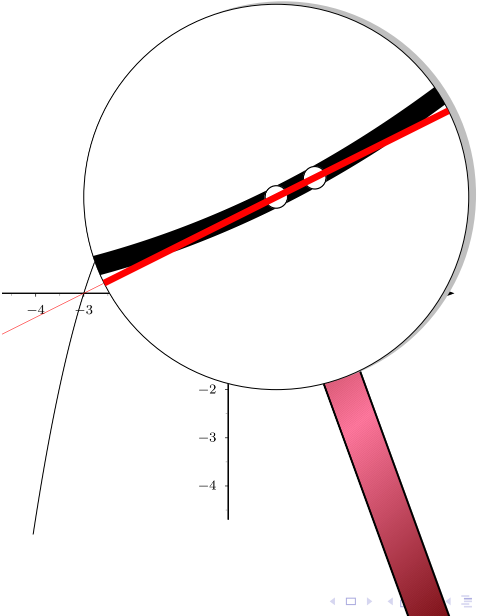
Tangenten an Kurven



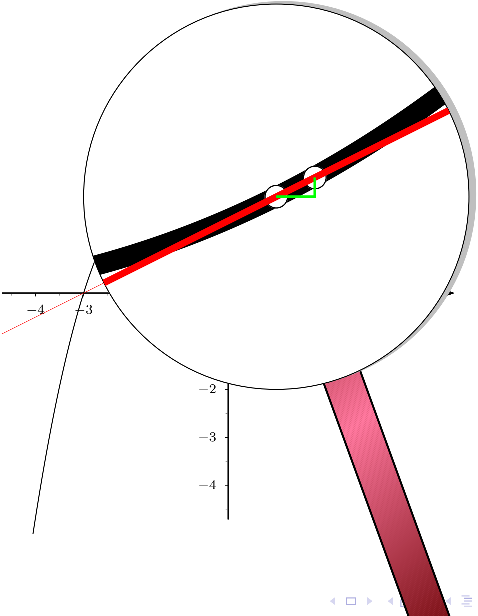
Tangenten an Kurven



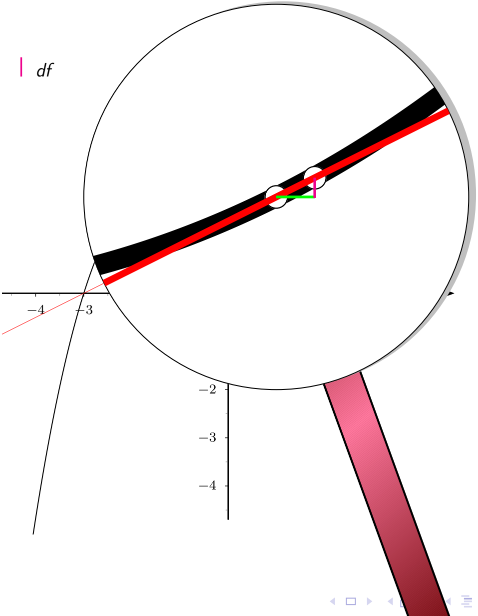
Tangenten an Kurven



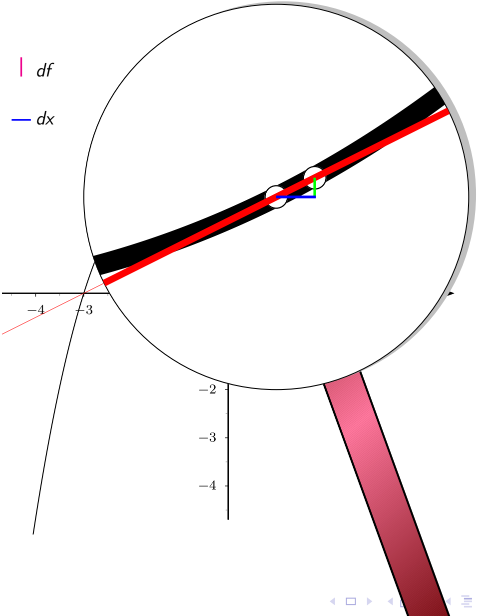
Tangenten an Kurven



Tangenten an Kurven



Tangenten an Kurven



Der Differentialquotient

$$f' = \frac{df}{dx}$$

wobei df und dx unendlich kleine Grössen sind

Der Differentialquotient

$$f' = \frac{df}{dx}$$

wobei df und dx unendlich kleine Grössen sind

Fragen zu diesem Konzept

- Was ist mit “unendlich klein” gemeint?

Der Differentialquotient

$$f' = \frac{df}{dx}$$

wobei df und dx unendlich kleine Grössen sind

Fragen zu diesem Konzept

- Was ist mit "unendlich klein" gemeint?
- Darf mit unendlich kleinen Grössen gerechnet werden?

Der Differentialquotient

$$f' = \frac{df}{dx}$$

wobei df und dx unendlich kleine Grössen sind

Fragen zu diesem Konzept

- Was ist mit "unendlich klein" gemeint?
- Darf mit unendlich kleinen Grössen gerechnet werden?
- Welche Rechenregeln sollen gelten?

Der Differentialquotient

$$f' = \frac{df}{dx}$$

wobei df und dx unendlich kleine Grössen sind

Fragen zu diesem Konzept

- Was ist mit "unendlich klein" gemeint?
- Darf mit unendlich kleinen Grössen gerechnet werden?
- Welche Rechenregeln sollen gelten?
- ...

Das 18. Jahrhundert

Explosion der Analysis: Neue Gebiete und Anwendungen wurden in atemberaubendem Tempo erobert.

Das 18. Jahrhundert

Explosion der Analysis: Neue Gebiete und Anwendungen wurden in atemberaubendem Tempo erobert.

Genialer und virtuoser Umgang mit Reihen, intuitiver und variabler Konvergenzbegriff. Die geometrische Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

wird für $x = -1$ zum

Das 18. Jahrhundert

Explosion der Analysis: Neue Gebiete und Anwendungen wurden in atemberaubendem Tempo erobert.

Genialer und virtuoser Umgang mit Reihen, intuitiver und variabler Konvergenzbegriff. Die geometrische Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

wird für $x = -1$ zum *paradoxon non inelegans*:

$$1 - 1 + 1 - 1 + - \ldots = \frac{1}{2}$$

Das 18. Jahrhundert

Explosion der Analysis: Neue Gebiete und Anwendungen wurden in atemberaubendem Tempo erobert.

Genialer und virtuoser Umgang mit Reihen, intuitiver und variabler Konvergenzbegriff. Die geometrische Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

wird für $x = -1$ zum *paradoxon non inelegans*:

$$1 - 1 + 1 - 1 + - \ldots = \frac{1}{2}$$

1784 fordert die Berliner Akademie der Wissenschaften

Das 18. Jahrhundert

Explosion der Analysis: Neue Gebiete und Anwendungen wurden in atemberaubendem Tempo erobert.

Genialer und virtuoser Umgang mit Reihen, intuitiver und variabler Konvergenzbegriff. Die geometrische Reihe

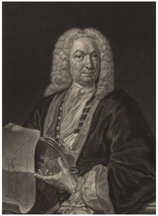
$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

wird für $x = -1$ zum *paradoxon non inelegans*:

$$1 - 1 + 1 - 1 + - \ldots = \frac{1}{2}$$

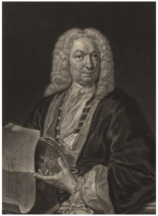
1784 fordert die Berliner Akademie der Wissenschaften *"... dass man erkläre, wie aus einer widersprüchlichen Annahme so viele richtige Sätze entstanden sind".*

De L'Hôpital und Bernoulli



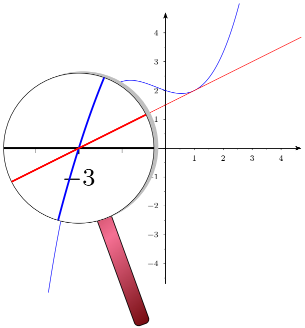
- Guillaume François Antoine, Marquis de L'Hôpital und Johann Bernoulli trugen wesentlich zur Entwicklung der Infinitesimalrechnung bei.

De L'Hôpital und Bernoulli

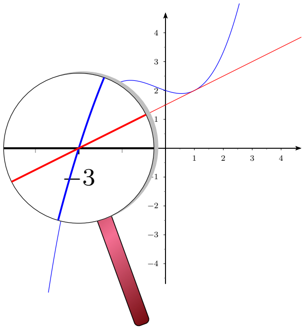


- Guillaume François Antoine, Marquis de L'Hôpital und Johann Bernoulli trugen wesentlich zur Entwicklung der Infinitesimalrechnung bei.
- Sie rechneten relativ unbeschwert mit unendlich kleinen Grössen.

Die Regel von de L'Hôpital



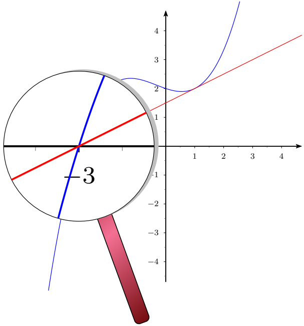
Die Regel von de L'Hôpital



Das Problem

- $f(a) = 0 = g(a)$
- $\dfrac{f(a)}{g(a)} = \dfrac{0}{0}$

Die Regel von de L'Hôpital



Das Problem

- $f(a) = 0 = g(a)$
- $\dfrac{f(a)}{g(a)} = \dfrac{0}{0} = ??$

Die Regel von de L'Hôpital

Herleitung

Die Regel von de L'Hôpital

Herleitung

$$df = f(a+dx) - f(a) = f(a+dx) \approx f(a)$$
$$dg = g(a+dx) - g(a) = g(a+dx) \approx g(a)$$

Die Regel von de L'Hôpital

L. Halbeisen
N. Hungerbühler

Herleitung

$$df = f(a+dx) - f(a) = f(a+dx) \approx f(a)$$

$$dg = g(a+dx) - g(a) = g(a+dx) \approx g(a)$$

$$\frac{f(a)}{g(a)} \approx \frac{df}{dg} = \frac{df \cdot dx}{dg \cdot dx} = \frac{df \cdot dx}{dx \cdot dg}$$

Die Regel von de L'Hôpital

Herleitung

$$df = f(a+dx) - f(a) = f(a+dx) \approx f(a)$$
$$dg = g(a+dx) - g(a) = g(a+dx) \approx g(a)$$

$$\frac{f(a)}{g(a)} \approx \frac{df}{dg} = \frac{df \cdot dx}{dg \cdot dx} = \frac{df \cdot dx}{dx \cdot dg}$$

$$f' = \frac{df}{dx} \qquad g' = \frac{dg}{dx}$$

Die Regel von de L'Hôpital

Herleitung

$$df = f(a+dx) - f(a) = f(a+dx) \approx f(a)$$
$$dg = g(a+dx) - g(a) = g(a+dx) \approx g(a)$$

$$\frac{f(a)}{g(a)} \approx \frac{df}{dg} = \frac{df \cdot dx}{dg \cdot dx} = \frac{df \cdot dx}{dx \cdot dg}$$

$$f' = \frac{df}{dx} \qquad g' = \frac{dg}{dx}$$

$$\frac{f(a)}{g(a)} \approx \frac{f'}{g'}$$

Das 19. Jahrhundert

Bernhard Bolzano 1816

§. 12.

2. Zusatz. Ist aber x ein echter Bruch, so tritt der merkwürdige Umstand ein, daß die Binomialreihe $1-x+x^2-x^3+\ldots\pm x^r$ bloß durch hinlängliche Vermehrung ihrer Glieder dem Werthe von $(1+x)^{-1}$ so nahe gebracht werden kann, als man nur will. Denn der Unterschied zwischen beyden ist $x^r - \frac{x^r}{1+x} = \frac{x^{r+1}}{1+x}$, welches, wenn x ein echter Bruch ist, kleiner als jede gegebene Größe gemacht werden kann, wenn man r groß genug nimmt. Denn ist $x < +1$, so wird $\frac{1}{x}=(1+u)$ seyn, wo u eine positive Größe bezeichnet. Soll nun $\frac{x^{r+1}}{1+x} <$ als z. B. D werden; so nehme man nur einen

Werth für $r > \frac{\frac{1}{D(1+x)}-1}{u}-1$, so ist $r+1 > \frac{\frac{1}{D(1+x)}-1}{u}$

und $(r+1)u > \frac{1}{D(1+x)}-1$ oder $1+(r+1)u > \frac{1}{D(1+x)}$

Aber nach §. 7 ist $(1+u)^{r+1} = 1+(r+1)u+(r+1)\frac{r}{2}u^2$

$+\ldots > 1+(r+1)u$. Also um so mehr $(1+u)^{r+1} > \frac{1}{D(1+x)}$

Also $\frac{1}{(1+u)^{r+1}} = x^{r+1} < D(1+x)$. Also $\frac{x^{r+1}}{1+x} < D$.

Fast eben so wird der Beweis geführt, wenn x negativ ist. So oft also x eine Größe bezeichnet, die $< \pm 1$ ist; so gilt die Binomialgleichung auch für den Werth $n = -1$, zwar nicht genau, aber der Unterschied kann doch kleiner als jede gegebene Größe gemacht werden, wenn man r, d. h. die Menge der Glieder groß genug nimmt.

Augustin-Louis Cauchy 1821

conque. Si, pour des valeurs de n toujours croissantes, la somme s_n s'approche indéfiniment d'une certaine limite s, la série sera dite *convergente*, et la limite en question s'appellera la *somme* de la série. Au contraire, si, tandis que n croît indéfiniment, la somme s_n ne s'approche d'aucune limite fixe, la série sera *divergente* et n'aura plus de somme. Dans l'un et l'autre cas, le terme qui correspond à l'indice n,

...

niment petites. D'ailleurs, les différences successives entre la première somme s_n et chacune des suivantes sont respectivement déterminées par les équations

$$s_{n+1}-s_n = u_n,$$
$$s_{n+2}-s_n = u_n+u_{n+1},$$
$$s_{n+3}-s_n = u_n+u_{n+1}+u_{n+2},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Donc, pour que la série (1) soit convergente, il est d'abord nécessaire que le terme général u_n décroisse indéfiniment, tandis que n augmente: mais cette condition ne suffit pas, et il faut encore que, pour des valeurs croissantes de n, les différentes sommes

$$u_n+u_{n+1},$$
$$u_n+u_{n+1}+u_{n+2},$$
$$\ldots\ldots\ldots,$$

c'est-à-dire les sommes des quantités

$$u_n,\quad u_{n+1},\quad u_{n+2},\quad \ldots,$$

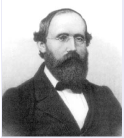
prises, à partir de la première, en tel nombre que l'on voudra, finissent par obtenir constamment des valeurs numériques inférieures à toute limite assignable. Réciproquement, lorsque ces diverses conditions sont remplies, la convergence de la série est assurée.

Satz (Dirichlet, 1828)

Für stückweise stetige Funktionen mit höchstens endlich vielen Maxima und Minima gilt punktweise die Fourierreihendarstellung (mit der bekannten Konvention an Sprungstellen).

Die aus der Anschauung durch Abstraktion geborenen reinen Begriffe der Mathematik haben eine Tendenz, im nachhinein Monster zu gebären. Etwa Funktionen mit besonders schlechten Eigenschaften (stetig aber nirgends differenzierbar; nicht messbare Funktionen; Banach-Tarski-Paradoxon; stetige Kurven, die $\mathbb{R}^2$ bedecken, etc.).

Das Riemann-Integral (Bernhard Riemann, 1854)



In: *Über die Darstellbarkeit einer Funktion durch trigonometrische Reihen*

Zweck: Erweiterung der Fourier-Theorie auf Funktionen mit beschränkter Variation.

Das Riemann-Integral

Darboux: Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ und $Z = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ eine Zerlegung von $[a, b]$. Dann sind

$$
\begin{aligned}
O(Z) &:= \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) \sup_{x_{k-1}<x<x_k} f(x) \\
U(Z) &:= \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) \inf_{x_{k-1}<x<x_k} f(x)
\end{aligned}
$$

Ober- respektive Untersumme von f bezüglich Z. Falls

$$
\inf_{\text{Zerlegungen}} O(Z) = \sup_{\text{Zerlegungen}} U(Z)
$$

so heisst dieser Wert **Riemann-Integral** von f auf $[a, b]$.

Riemann: Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ und $Z = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ eine Zerlegung von $[a, b]$ mit $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$. Dann sei

$$S(Z; t_1, \ldots, t_n) := \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) f(t_k)$$

Falls für festes I und jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für jede Zerlegung mit $\max |x_k - x_{k-1}| < \delta$ und beliebige t_i

$$|S(Z; t_1, \ldots, t_n) - I| < \epsilon$$

so heisst I **Riemann-Integral** von f auf $[a, b]$.

Riemann: Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ und $Z = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ eine Zerlegung von $[a, b]$ mit $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$. Dann sei

$$S(Z; t_1, \dots, t_n) := \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) f(t_k)$$

Falls für festes I und jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für jede Zerlegung mit $\max |x_k - x_{k-1}| < \delta$ und beliebige t_i

$$|S(Z; t_1, \dots, t_n) - I| < \epsilon$$

so heisst I **Riemann-Integral** von f auf $[a, b]$.

Moore-Smith oder Filter: Das Riemann-Integral lässt sich auch als Grenzwert von Moore-Smith-Folgen (Netze) respektive mit Filtern definieren.

Riemann: Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ und $Z = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ eine Zerlegung von $[a, b]$ mit $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$. Dann sei

$$S(Z; t_1, \ldots, t_n) := \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) f(t_k)$$

Falls für festes I und jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für jede Zerlegung mit $\max |x_k - x_{k-1}| < \delta$ und beliebige t_i

$$|S(Z; t_1, \ldots, t_n) - I| < \epsilon$$

so heisst I **Riemann-Integral** von f auf $[a, b]$.

Moore-Smith oder Filter: Das Riemann-Integral lässt sich auch als Grenzwert von Moore-Smith-Folgen (Netze) respektive mit Filtern definieren.

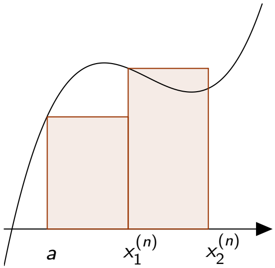
Bemerkung: Im Gegensatz zur Ableitung ist das Integral kein simpler Grenzwert. Für die Schule ist das problematisch. Und erst recht die Integrationstheorien von Lebesgue, Daniell, Stieltjes, Carathéodory :-)

Daher: Das Riemann-Integral für steige Funktionen

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, $n \in \mathbb{N}$, $\Delta x_n := \frac{1}{n}(b-a)$ und $x_k^{(n)} := a + k\Delta x_n$. Dann ist

$$R_n := \Delta x_n \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k^{(n)})$$

die n-te Rechteck-Summe von f.



Lemma

$(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchy-Folge.

Beweis: Sei $\epsilon > 0$. Dann existiert $n \in \mathbb{N}$ so dass $\forall x, y \in [a, b]$ mit $|x - y| < \frac{|b-a|}{n}$ gilt

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{2|b-a|}.$$

Weiter sei $\ell = \alpha n$ für ein $\alpha \in \mathbb{N}$. Dann ist

$$\begin{aligned}
|R_n - R_\ell| &= |\Delta x_n \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k^{(n)}) - \Delta x_\ell \sum_{k=0}^{\ell-1} f(x_k^{(\ell)})| \\
&= |\Delta x_\ell \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{\alpha-1} f(x_k^{(n)}) - \Delta x_\ell \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{\alpha-1} f(x_{\alpha k+j}^{(\ell)})| \\
&\leq \Delta x_\ell \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{\alpha-1} |f(x_k^{(n)}) - f(x_{\alpha k+j}^{(\ell)})| \\
&< \Delta x_\ell \, \alpha \, n \, \frac{\epsilon}{2|b-a|} = \frac{\epsilon}{2}
\end{aligned}$$

Sei nun $m > n$, dann gilt für $\ell = \mathrm{kgV}(m, n)$

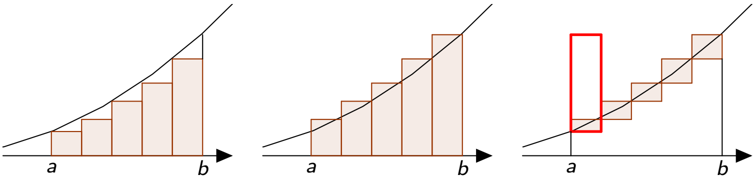
$$|R_m - R_n| \leq |R_m - R_\ell| + |R_\ell - R_n| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \qquad \square$$

Für die Schule: Betrachte nur den Fall einer monoton wachsenden, positiven, stetigen Funktion f mit Ober- und Untersumme:

$$\text{Untersumme} \leq \text{“Fläche”} \leq \text{Obersumme}$$

wobei

$$0 < \text{Obersumme} - \text{Untersumme} = \big(f(b) - f(a)\big)\Delta x_n \to 0$$

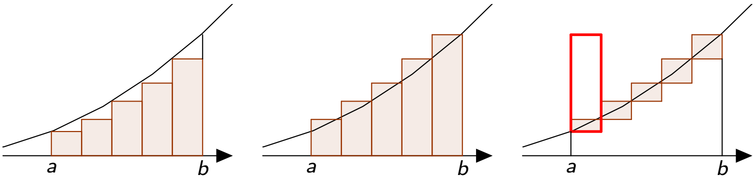


Für die Schule: Betrachte nur den Fall einer monoton wachsenden, positiven, stetigen Funktion f mit Ober- und Untersumme:

$$\text{Untersumme} \leq \text{“Fläche”} \leq \text{Obersumme}$$

wobei

$$0 < \text{Obersumme} - \text{Untersumme} = \big(f(b) - f(a)\big)\Delta x_n \to 0$$



Achtung: Die Folge der Obersummen respektve Untersummen ist i.A. nicht monoton!

Der Mittelwertsatz der Integralrechnung

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann existiert $\xi \in [a, b]$ so, dass

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b - a)$$

Beweis: Es gibt (nach Weierstrass) $x_{\min}, x_{\max} \in [a, b]$ mit

$$f(x_{\min}) \leq f(x) \leq f(x_{\max}) \quad \forall x \in [a, b].$$

Somit

$$(b - a)f(x_{\min}) \leq \Delta x_n \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k^{(n)}) \leq (b - a)f(x_{\max})$$

und im Limes $n \to \infty$

$$(b - a)f(x_{\min}) \leq \int_a^b f(x)dx \leq (b - a)f(x_{\max})$$

Nach dem Zwischenwertsatz für stetige Funktionen gibt es ξ zwischen $x_{\min}$ und $x_{\max}$ mit

$$f(\xi) = \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x)dx \in [f(x_{\min}), f(x_{\max})]$$

□

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung I

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und $\xi \in\,]a, b[$. Dann gilt

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\Big(\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt\Big)\\
&\overset{(*)}{=} \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt\\
&= f(x)
\end{aligned}$$

wegen des Mittelwertsatzes der Integralrechnung. $\square$

$(*)$ siehe später!

Korollar: Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung II

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und G eine Stammfunktion, d.h. $G' = f$. Dann gilt

$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a)$$

Beweis: Sei

$$F(x) := \int_a^x f(t)dt$$

Nach dem Hauptsatz I ist auch F eine Stammfunktion von f. Somit ist $F - G$ konstant (laut dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung). Also

$$\underbrace{F(a)}_{=0} - G(a) = \underbrace{F(b)}_{=\int_a^b f(t)dt} - G(b) \qquad \square$$

Lemma

Die Funktion $f \mapsto \int_a^b f(x)dx$ ist linear.

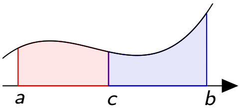
Beweis: Aus der Definition folgt sofort

- $\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$
- $\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx$ für $\lambda \in \mathbb{R}$. $\square$

Lemma

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, $c \in]a,b[$. Dann gilt

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$



Beweis: 1. Schritt. Sei c ein rationaler Teilpunkt von $[a,b]$, d.h. $\frac{b-a}{c-a} =: \rho \in \mathbb{Q}$. Dann ist $c = x_k^{(n)} = a + k\Delta x_k^{(n)}$ für alle n, k mit $\frac{n}{k} = \rho$. Es folgt

$$\sum_{j=0}^{n-1} f(x_j^{(n)})\Delta x_n = \sum_{j=0}^{k-1} f(x_j^{(n)})\Delta x_n + \sum_{j=k}^{n-1} f(x_j^{(n)})\Delta x_n$$

D.h. $R_n(a,b) = R_k(a,c) + R_{n-k}(c,b)$ und im Limes $n, k \to \infty$ mit $n = \rho k$ ergibt sich die Behauptung.

2. Schritt: Sei $\epsilon > 0$ und $\delta > 0$ so, dass für alle $x, y \in [a, b]$ mit $|x - y| < \delta$ gilt

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{\epsilon}{2|b-a|}$$

Weiter sei $\tilde{b} < b$, $|b - \tilde{b}| < \max(\delta, \frac{\epsilon}{2\max|f|})$ und $\Delta x_n = \frac{1}{n}(b-a)$, $\tilde{\Delta} x_n = \frac{1}{n}(\tilde{b} - a)$, $x_k^{(n)} = a + k\Delta x_n$, $\tilde{x}_k^{(n)} = a + k\tilde{\Delta} x_n$, wobei n so gross sein soll, dass $\Delta x_n < \delta$. Dann gilt

$$R_n := \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k^{(n)})\Delta x_n \to \int_a^b f(x)dx$$

$$\tilde{R}_n := \sum_{k=0}^{n-1} f(\tilde{x}_k^{(n)})\tilde{\Delta} x_n \to \int_a^{\tilde{b}} f(x)dx$$

$$
\begin{aligned}
&|R_n - \tilde{R}_n| \\
&\leq \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_k^{(n)})\Delta x_n - f(\tilde{x}_k^{(n)})\tilde{\Delta} x_n| \\
&\leq \sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{|f(x_k^{(n)})\Delta x_n - f(\tilde{x}_k^{(n)})\Delta x_n|}_{=\Delta x_n |f(x_k^{(n)}) - f(\tilde{x}_k^{(n)})| \leq \Delta x_n \frac{\epsilon}{2|b-a|}} + \underbrace{|f(\tilde{x}_k^{(n)})\Delta x_n - f(\tilde{x}_k^{(n)})\tilde{\Delta} x_n|}_{|f(\tilde{\Delta} x_k^{(n)})||\Delta x_n - \tilde{\Delta} x_n| < \max|f| \frac{|b-\tilde{b}|}{n}} \\
&\leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon
\end{aligned}
$$

Somit

$$
|\int_a^b f(x)dx - \int_a^{\tilde{b}} f(x)dx| \leq \epsilon
$$

3. Schritt: Sei $\tilde{b}$ wie oben und so, dass c das Intervall $[a, \tilde{b}]$ rational teilt. Dann gilt

$$
\begin{aligned}
&\left|\int_a^c + \int_c^b - \int_a^b\right| = \\
&= \left|\int_a^c + {\color{red}\int_c^{\tilde{b}}} {\color{red}-} {\color{red}\int_c^{\tilde{b}}} + \int_c^b {\color{red}-} {\color{red}\int_a^{\tilde{b}}} {\color{red}+} {\color{red}\int_a^{\tilde{b}}} - \int_a^b\right| \\
&\le \underbrace{\left|\int_a^c + \int_c^{\tilde{b}} - \int_a^{\tilde{b}}\right|}_{=0 \text{ (1. Schritt)}} + \underbrace{\left|\int_c^{\tilde{b}} - \int_c^b\right|}_{\le\epsilon \text{ (2. Schritt)}} + \underbrace{\left|\int_a^{\tilde{b}} - \int_a^b\right|}_{\le\epsilon \text{ (2. Schritt)}} \le 2\epsilon \qquad \square
\end{aligned}
$$

Bemerkung: Wenn man das Riemann-Integral über allgemeine Zerlegungen definiert, ist dieses Lemma sehr einfach zu beweisen.

Beobachtung: Die didaktischen und die fachlichen Schwierigkeiten liegen nicht immer an der selben Stelle.

Das Riemann-Integral ist ziemlich cool. Es löst nicht nur das Flächenproblem, sondern auch

- das Problem eine Stammfunktion zu finden
- Volumen, Oberfläche, Kurvenlänge
- Schwerpunktberechnungen
- Problem der Rekonstruktion der Position aus der Geschwindigkeit/Beschleunigung
- Wahrscheinlichkeitsberechnung aus der Wahrscheinlichkeitsdichte
- ...

Lemma

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann konvergiert auch

$$\tilde{R}_n := \Delta x_n \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k^{(n)})$$

mit $\xi_k^{(n)} \in [x_k^{(n)}, x_{k+1}^{(n)}]$ gegen $\int_a^b f(x)dx =: I$.

Beweis: Sei $\epsilon > 0$ und n so gross, dass $|f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{|b-a|}$ für alle $x, y \in [a, b]$ mit $|x - y| \leq \frac{|b-a|}{n}$. Dann gilt

$$|R_n - \tilde{R}_n| \leq \Delta x_n \sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{|f(x_k^{(n)}) - f(\xi_k^{(n)})|}_{\frac{\epsilon}{|b-a|}} < \epsilon$$

Somit

$$|I - \tilde{R}_n| \leq \underbrace{|I - R_n|}_{\to 0 \text{ für } n \to \infty} + \underbrace{|R_n - \tilde{R}_n|}_{<\epsilon} < 2\epsilon$$

für n genügend gross. $\square$

Rotationsvolumen

Sei $f : [a, b] \to [0, \infty[$ stetig, der Graph rotiere über $[a, b]$ um die x-Achse. Dann ist das Rotationsvolumen

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx$$

Wir unterteilen $[a, b]$ wie zuvor äquidistant: $x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, \ldots, x_n^{(n)}$. Seien $\xi_k^{(n)}, \eta_k^{(n)} \in [x_k^{(n)}, x_{k+1}^{(n)}]$ so, dass

$$\begin{aligned}
|f(\xi_k^{(n)}| &= \max_{[x_k^{(n)}, x_{k+1}^{(n)}]} |f(x)| \\
|f(\eta_k^{(n)}| &= \min_{[x_k^{(n)}, x_{k+1}^{(n)}]} |f(x)|
\end{aligned}$$

Dann ist

$$\Delta x_n \pi \sum_{k=0}^{n-1} f^2(\eta_k^{(n)}) \leq V \leq \Delta x_n \pi \sum_{k=0}^{n-1} f^2(\xi_k^{(n)})$$

Da f^2 stetig ist, konvergieren die obere und die untere Schranke gegen $\pi \int_a^b f^2(x)dx$.

Kurvenlänge

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Dann ist die Kurvenlänge des Graphen

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}dx$$

Wir teilen $[a, b]$ wieder äquidistant. Dann ist die Länge der polygonalen Approximation:

$$\begin{aligned} L_n &= \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{\Delta x_n^2 + (f(x_{k+1}^{(n)}) - f(x_k^{(n)}))^2} \\ &= \Delta x_n \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{1 + \Big(\frac{f(x_{k+1}^{(n)}) - f(x_k^{(n)})}{\Delta x_n}\Big)^2} \\ &= \Delta x_n \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{1 + f'(\xi_k^{(n)})^2} \end{aligned}$$

für geeignete Zwischenwerte $\xi_k^{(n)}$. Da $x \mapsto \sqrt{1 + f'(x)^2}$ stetig ist, konvergiert L_n gegen

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}dx$$

Die reellen Zahlen

Problem bei all diesen Errungenschaften war: **Niemand konnte Mitte des 19. Jahrhunderts genau sagen, was eine reelle Zahl ist!**

Die reellen Zahlen

Problem bei all diesen Errungenschaften war: **Niemand konnte Mitte des 19. Jahrhunderts genau sagen, was eine reelle Zahl ist!**

Richard Dedekind (Professor am Eidgenössischen Polytechnikum Zürich) erfindet am 24. November 1858 in Zürich die Dedekindschen Schnitte und damit ein erstes Modell der reellen Zahlen.

Die reellen Zahlen

Problem bei all diesen Errungenschaften war: **Niemand konnte Mitte des 19. Jahrhunderts genau sagen, was eine reelle Zahl ist!**

Richard Dedekind (Professor am Eidgenössischen Polytechnikum Zürich) erfindet am 24. November 1858 in Zürich die Dedekindschen Schnitte und damit ein erstes Modell der reellen Zahlen.

Rodolf Lipschitz schrieb 1876 an Dedekind: *Ich kann nur sagen, dass ich die von Euklid aufgestellte Definiton für genauso befriedigend halte, wie Ihre Definition. Aus diesem Grunde würde ich wünschen, dass namentlich die Behauptung wegfiele, dass solche Sätze wie $\sqrt{2}\sqrt{3} = \sqrt{6}$ bisher nicht wirklich bewiesen seien. Was Sie an der Vollständigkeit des Gebietes erwähnen, die aus Ihren Prinzipien abgeleitet wird, so fällt dieselbe in der Sache mit der Grundeigenschaft einer Linie zusammen, ohne die kein Mensch sich eine Linie vorstellen kann.*

Dedekind schreibt an Lipschitz im Hinblick auf die Vollständigkeitseigenschaft: *Aber Euklid schweigt vollständig über diesen, für die Arithmetik wichtigsten Punkt, und deshalb kann ich Ihrer Ansicht nicht zustimmen, dass bei Euklid die vollständigen Grundlagen für die Theorie der irrationalen Zahlen zu finden seien.*

1869 publizieren Charles Méray und 1883 Georg Cantor eine Konstruktion der reellen Zahlen via Cauchy-Folgen. Cantor sagt dazu, dass *die Definition Dedekinds den grossen Nachteil habe, dass die Zahlen in der Analysis sich niemals in der Form von Schnitten darbieten, in welche sie erst mit grosser Kunst und Umständlichkeit gebracht werden müssen.* Dagegen sei seine Definition *die einfachste und natürlichste von allen.*

Was sind die reellen Zahlen?

Der nichtstandard Weg der Moderne

Abraham Robinson

- begründete 1961 die nichtstandard Analysis

Der nichtstandard Weg der Moderne

Abraham Robinson

- begründete 1961 die nichtstandard Analysis

Logische Grundlage: Der Kompaktheitssatz

- Beweise sind endliche Folgen von Aussagen.

Der nichtstandard Weg der Moderne

Abraham Robinson

- begründete 1961 die nichtstandard Analysis

Logische Grundlage: Der Kompaktheitssatz

- Beweise sind endliche Folgen von Aussagen.
- Lässt sich ein Widerspruch herleiten, so brauchen wir dazu nur endlich viele Axiome.

Der nichtstandard Weg der Moderne

Abraham Robinson

- begründete 1961 die nichtstandard Analysis

Logische Grundlage: Der Kompaktheitssatz

- Beweise sind endliche Folgen von Aussagen.
- Lässt sich ein Widerspruch herleiten, so brauchen wir dazu nur endlich viele Axiome.
- Wenn jeweils endlich viele Axiome widerspruchsfrei sind, so ist das *ganze* Axiomensystem widerspruchsfrei.

Axiome der reellen Zahlen

- Körperaxiome

Axiome der reellen Zahlen

- Körperaxiome
- Axiome der Ordnung, inkl. $\forall x \exists n \in \mathbb{N} \big(|n \cdot x| > 1 \big)$

Axiome der reellen Zahlen

- Körperaxiome
- Axiome der Ordnung, inkl. $\forall x \exists n \in \mathbb{N} \big(|n \cdot x| > 1 \big)$
- Axiom der Vollständigkeit

Axiome der reellen Zahlen

- Körperaxiome
- Axiome der Ordnung, inkl. $\forall x \exists n \in \mathbb{N} \big(|n \cdot x| > 1 \big)$
- Axiom der Vollständigkeit

Erweiterung dieses Axiomensystems

- δ_0 sei ein Konstantensymbol

Axiome der reellen Zahlen

- Körperaxiome
- Axiome der Ordnung, inkl. $\forall x \exists n \in \mathbb{N} \big(|n \cdot x| > 1 \big)$
- Axiom der Vollständigkeit

Erweiterung dieses Axiomensystems

- δ_0 sei ein Konstantensymbol
- $0 < \delta_0$

Axiome der reellen Zahlen

- Körperaxiome
- Axiome der Ordnung, inkl. $\forall x \exists n \in \mathbb{N} \big(|n \cdot x| > 1 \big)$
- Axiom der Vollständigkeit

Erweiterung dieses Axiomensystems

- δ_0 sei ein Konstantensymbol
- $0 < \delta_0$, $\delta_0 < 1/2$

Axiome der reellen Zahlen

- Körperaxiome
- Axiome der Ordnung, inkl. $\forall x \exists n \in \mathbb{N}\big(|n \cdot x| > 1\big)$
- Axiom der Vollständigkeit

Erweiterung dieses Axiomensystems

- δ_0 sei ein Konstantensymbol
- $0 < \delta_0$, $\delta_0 < 1/2$, $\delta_0 < 1/3$

Axiome der reellen Zahlen

- Körperaxiome
- Axiome der Ordnung, inkl. $\forall x \exists n \in \mathbb{N} \big(|n \cdot x| > 1 \big)$
- Axiom der Vollständigkeit

Erweiterung dieses Axiomensystems

- δ_0 sei ein Konstantensymbol
- $0 < \delta_0,\ \delta_0 < 1/2,\ \delta_0 < 1/3,\ \delta_0 < 1/4,\ \ldots$

Axiome der reellen Zahlen

- Körperaxiome
- Axiome der Ordnung, inkl. $\forall x \exists n \in \mathbb{N}\big(|n \cdot x| > 1\big)$
- Axiom der Vollständigkeit

Erweiterung dieses Axiomensystems

- δ_0 sei ein Konstantensymbol
- $0 < \delta_0$, $\delta_0 < 1/2$, $\delta_0 < 1/3$, $\delta_0 < 1/4$, $\ldots$

Eigenschaften dieses erweiterten Axiomensystems

Axiome der reellen Zahlen

- Körperaxiome
- Axiome der Ordnung, inkl. $\forall x \exists n \in \mathbb{N}\big(|n \cdot x| > 1\big)$
- Axiom der Vollständigkeit

Erweiterung dieses Axiomensystems

- δ_0 sei ein Konstantensymbol
- $0 < \delta_0$, $\delta_0 < 1/2$, $\delta_0 < 1/3$, $\delta_0 < 1/4$, $\ldots$

Eigenschaften dieses erweiterten Axiomensystems

- Durch die Erweiterung werden keine Widersprüche hinzugefügt.

Axiome der reellen Zahlen

- Körperaxiome
- Axiome der Ordnung, inkl. $\forall x \exists n \in \mathbb{N}\big(|n \cdot x| > 1\big)$
- Axiom der Vollständigkeit

Erweiterung dieses Axiomensystems

- δ_0 sei ein Konstantensymbol
- $0 < \delta_0$, $\delta_0 < 1/2$, $\delta_0 < 1/3$, $\delta_0 < 1/4$, $\ldots$

Eigenschaften dieses erweiterten Axiomensystems

- Durch die Erweiterung werden keine Widersprüche hinzugefügt.
- Jedes Modell $\mathbb{R}^*$ dieses Axiomensystems enhält alle standard reellen Zahlen $\mathbb{R}$.

Axiome der reellen Zahlen

- Körperaxiome
- Axiome der Ordnung, inkl. $\forall x \exists n \in \mathbb{N}\big(|n \cdot x| > 1\big)$
- Axiom der Vollständigkeit

Erweiterung dieses Axiomensystems

- δ_0 sei ein Konstantensymbol
- $0 < \delta_0$, $\delta_0 < 1/2$, $\delta_0 < 1/3$, $\delta_0 < 1/4$, ...

Eigenschaften dieses erweiterten Axiomensystems

- Durch die Erweiterung werden keine Widersprüche hinzugefügt.
- Jedes Modell $\mathbb{R}^*$ dieses Axiomensystems enhält alle standard reellen Zahlen $\mathbb{R}$.
- δ_0 ist eine unendlich kleine positive reelle Zahl.

Nichtstandard Modelle der reellen Zahlen

L. Halbeisen
N. Hungerbühler

$\mathbb{R}^*$ aus der Sicht von $\mathbb{R}^*$

- in $\mathbb{R}^*$ ist δ_0 eine ganz normale reelle positive Zahl.

Nichtstandard Modelle der reellen Zahlen

$\mathbb{R}^*$ aus der Sicht von $\mathbb{R}^*$

- in $\mathbb{R}^*$ ist δ_0 eine ganz normale reelle positive Zahl.
- in $\mathbb{R}^*$ existiert auch $1/\delta_0$

Nichtstandard Modelle der reellen Zahlen

$\mathbb{R}^*$ aus der Sicht von $\mathbb{R}^*$

- in $\mathbb{R}^*$ ist δ_0 eine ganz normale reelle positive Zahl.
- in $\mathbb{R}^*$ existiert auch $1/\delta_0$
- in $\mathbb{R}^*$ haben wir als natürliche Zahlen $\mathbb{N}^*$

Nichtstandard Modelle der reellen Zahlen

$\mathbb{R}^*$ aus der Sicht von $\mathbb{R}^*$

- in $\mathbb{R}^*$ ist δ_0 eine ganz normale reelle positive Zahl.
- in $\mathbb{R}^*$ existiert auch $1/\delta_0$
- in $\mathbb{R}^*$ haben wir als natürliche Zahlen $\mathbb{N}^*$
- in $\mathbb{R}^*$ existiert auch $r \cdot \delta_0$ (für alle r aus $\mathbb{R}^*$)

Nichtstandard Modelle der reellen Zahlen

L. Halbeisen
N. Hungerbühler

$\mathbb{R}^*$ aus der Sicht von $\mathbb{R}^*$

- in $\mathbb{R}^*$ ist δ_0 eine ganz normale reelle positive Zahl.
- in $\mathbb{R}^*$ existiert auch $1/\delta_0$
- in $\mathbb{R}^*$ haben wir als natürliche Zahlen $\mathbb{N}^*$
- in $\mathbb{R}^*$ existiert auch $r \cdot \delta_0$ (für alle r aus $\mathbb{R}^*$)
- In $\mathbb{R}^*$ gelten dieselben Rechenregeln wie in $\mathbb{R}$.

Nichtstandard Modelle der reellen Zahlen

$\mathbb{R}^*$ aus der Sicht von $\mathbb{R}^*$

- in $\mathbb{R}^*$ ist δ_0 eine ganz normale reelle positive Zahl.
- in $\mathbb{R}^*$ existiert auch $1/\delta_0$
- in $\mathbb{R}^*$ haben wir als natürliche Zahlen $\mathbb{N}^*$
- in $\mathbb{R}^*$ existiert auch $r \cdot \delta_0$ (für alle r aus $\mathbb{R}^*$)
- In $\mathbb{R}^*$ gelten dieselben Rechenregeln wie in $\mathbb{R}$.

$\mathbb{R}$ aus der Sicht von $\mathbb{R}^*$

Nichtstandard Modelle der reellen Zahlen

$\mathbb{R}^*$ aus der Sicht von $\mathbb{R}^*$

- in $\mathbb{R}^*$ ist δ_0 eine ganz normale reelle positive Zahl.
- in $\mathbb{R}^*$ existiert auch $1/\delta_0$
- in $\mathbb{R}^*$ haben wir als natürliche Zahlen $\mathbb{N}^*$
- in $\mathbb{R}^*$ existiert auch $r \cdot \delta_0$ (für alle r aus $\mathbb{R}^*$)
- In $\mathbb{R}^*$ gelten dieselben Rechenregeln wie in $\mathbb{R}$.

$\mathbb{R}$ aus der Sicht von $\mathbb{R}^*$

- in $\mathbb{R}$ gibt es die Zahl δ_0 nicht

Nichtstandard Modelle der reellen Zahlen

$\mathbb{R}^*$ aus der Sicht von $\mathbb{R}^*$

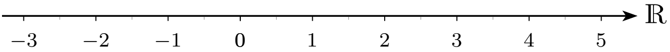
- in $\mathbb{R}^*$ ist δ_0 eine ganz normale reelle positive Zahl.
- in $\mathbb{R}^*$ existiert auch $1/\delta_0$
- in $\mathbb{R}^*$ haben wir als natürliche Zahlen $\mathbb{N}^*$
- in $\mathbb{R}^*$ existiert auch $r \cdot \delta_0$ (für alle r aus $\mathbb{R}^*$)
- In $\mathbb{R}^*$ gelten dieselben Rechenregeln wie in $\mathbb{R}$.

$\mathbb{R}$ aus der Sicht von $\mathbb{R}^*$

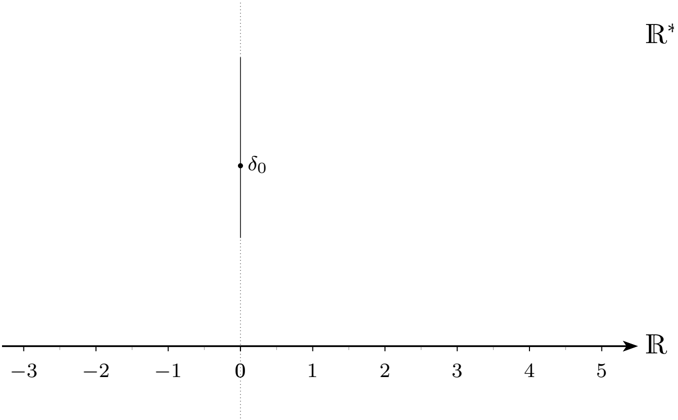
- in $\mathbb{R}$ gibt es die Zahl δ_0 nicht
- eine reelle Zahl $a + \delta_0$ in $\mathbb{R}^*$ (mit a aus $\mathbb{R}$) "entspricht" der Zahl a in $\mathbb{R}$

Nichtstandard Modelle der reellen Zahlen

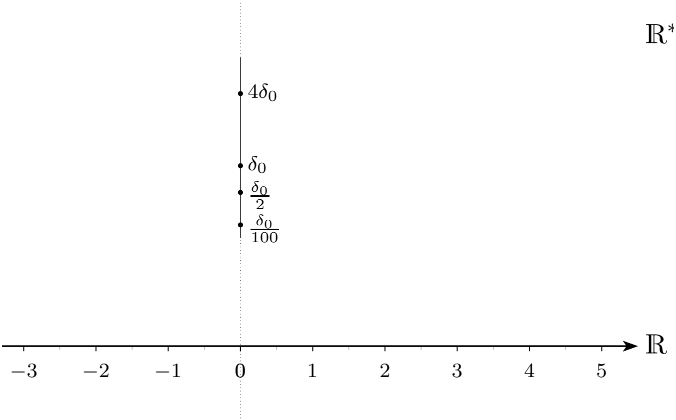
Nichtstandard Modelle der reellen Zahlen



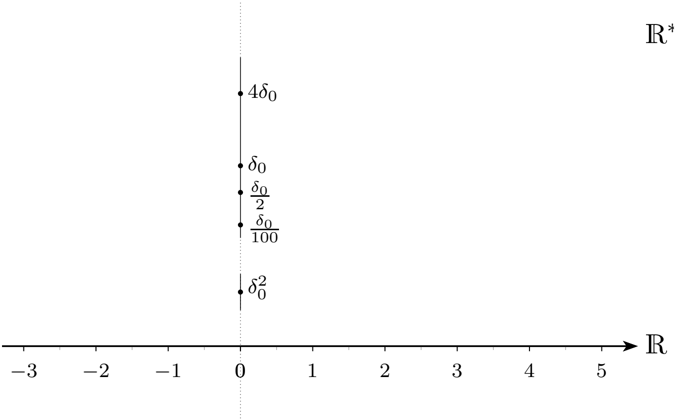
Nichtstandard Modelle der reellen Zahlen



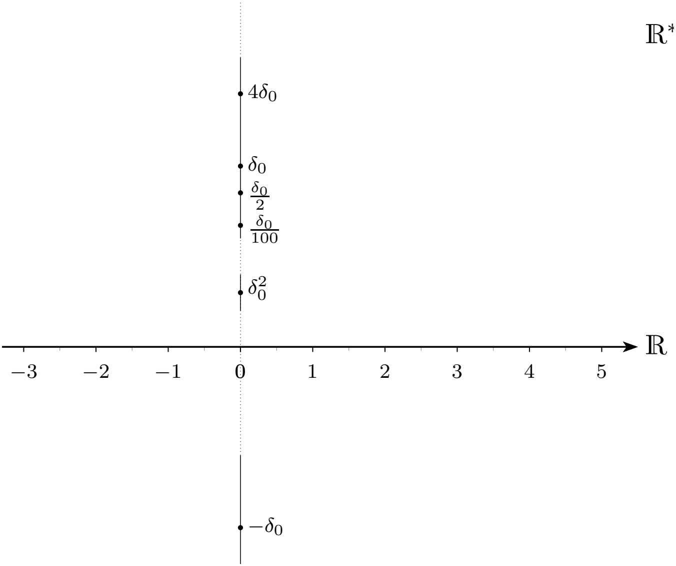
Nichtstandard Modelle der reellen Zahlen



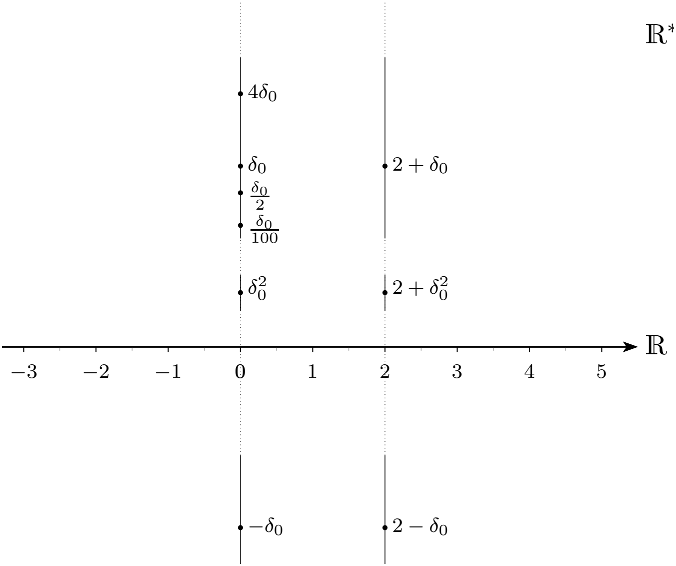
Nichtstandard Modelle der reellen Zahlen



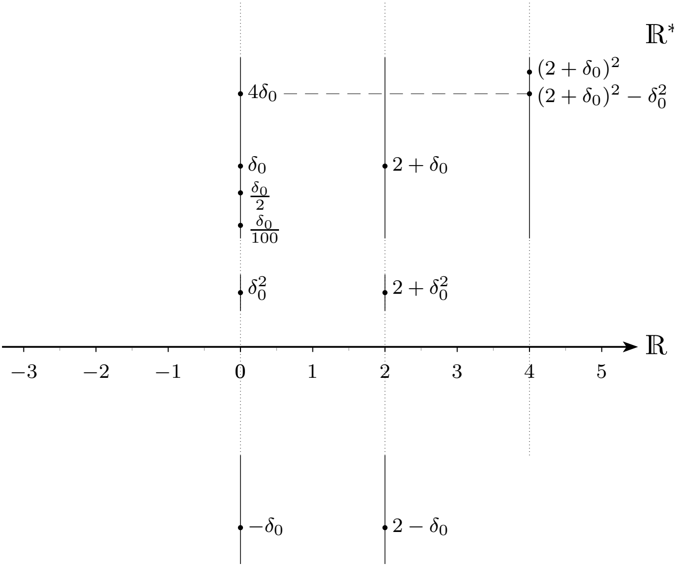
Nichtstandard Modelle der reellen Zahlen



Nichtstandard Modelle der reellen Zahlen



Nichtstandard Modelle der reellen Zahlen



Standardteil von Zahlen aus $\mathbb{R}^*$

Im Folgenden schreiben wir dx für δ_0, dx^2 für δ_0^2, ...

Standardteil: Umklappen von $\mathbb{R}^*$

Standardteil von Zahlen aus $\mathbb{R}^*$

L. Halbeisen
N. Hungerbühler

Im Folgenden schreiben wir dx für δ_0, dx^2 für δ_0^2, ...

Standardteil: Umklappen von $\mathbb{R}^*$

- $$a \cdot dx \approx$$

Standardteil von Zahlen aus $\mathbb{R}^*$

Im Folgenden schreiben wir dx für δ_0, dx^2 für δ_0^2, ...

Standardteil: Umklappen von $\mathbb{R}^*$

- $$a \cdot dx \approx 0$$

Standardteil von Zahlen aus $\mathbb{R}^*$

Im Folgenden schreiben wir dx für δ_0, dx^2 für δ_0^2, ...

Standardteil: Umklappen von $\mathbb{R}^*$

- $$a \cdot dx \approx 0$$
- $$a + b \cdot dx + c \cdot dx^2 + \ldots \approx$$

Standardteil von Zahlen aus $\mathbb{R}^*$

Im Folgenden schreiben wir dx für δ_0, dx^2 für δ_0^2, ...

Standardteil: Umklappen von $\mathbb{R}^*$

- $$a \cdot dx \approx 0$$
- $$a + b \cdot dx + c \cdot dx^2 + \ldots \approx a$$

Standardteil von Zahlen aus $\mathbb{R}^*$

Im Folgenden schreiben wir dx für δ_0, dx^2 für δ_0^2, ...

Standardteil: Umklappen von $\mathbb{R}^*$

- $$a \cdot dx \approx 0$$
- $$a + b \cdot dx + c \cdot dx^2 + \ldots \approx a$$

Zahlen wie zum Beispiel $1/dx$ haben keinen Standardteil!

Standardteil von Zahlen aus $\mathbb{R}^*$

Im Folgenden schreiben wir dx für δ_0, dx^2 für δ_0^2, ...

Standardteil: Umklappen von $\mathbb{R}^*$

- $$a \cdot dx \approx 0$$
- $$a + b \cdot dx + c \cdot dx^2 + \ldots \approx a$$

Zahlen wie zum Beispiel $1/dx$ haben keinen Standardteil!

Für nichtstandard natürliche Zahlen N^* gilt:

$$\frac{1}{N^*} \approx$$

Standardteil von Zahlen aus $\mathbb{R}^*$

L. Halbeisen
N. Hungerbühler

Im Folgenden schreiben wir dx für δ_0, dx^2 für δ_0^2, ...

Standardteil: Umklappen von $\mathbb{R}^*$

- $$a \cdot dx \approx 0$$
- $$a + b \cdot dx + c \cdot dx^2 + \ldots \approx a$$

Zahlen wie zum Beispiel $1/dx$ haben keinen Standardteil!

Für nichtstandard natürliche Zahlen N^* gilt:

$$\frac{1}{N^*} \approx 0$$

Nichtstandard Analysis

Differenzieren

Die Ableitung $f'(x)$ einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist der

Standardteil des Differenzenquotienten

$$\frac{f(x + dx) - f(x)}{dx}$$

Nichtstandard Analysis

Ein Beispiel

$$\exp'(x) = \frac{\exp(x + dx) - \exp(x)}{dx}$$

Nichtstandard Analysis

Ein Beispiel

$$\exp'(x) = \frac{\exp(x+dx) - \exp(x)}{dx} = \exp(x) \cdot \frac{\exp(dx) - 1}{dx}$$

Nichtstandard Analysis

Ein Beispiel

$$\exp'(x) = \frac{\exp(x + dx) - \exp(x)}{dx} = \exp(x) \cdot \frac{\exp(dx) - 1}{dx}$$

$$\exp(dx) = 1 + \frac{dx}{1!} + \frac{dx^2}{2!} + \frac{dx^3}{3!} + \dots$$

Nichtstandard Analysis

Ein Beispiel

$$\exp'(x) = \frac{\exp(x+dx)-\exp(x)}{dx} = \exp(x)\cdot\frac{\exp(dx)-1}{dx}$$

$$\exp(dx) = 1 + \frac{dx}{1!} + \frac{dx^2}{2!} + \frac{dx^3}{3!} + \dots$$

$$\frac{\exp(dx)-1}{dx} \quad = \quad \frac{dx\cdot\left(\frac{1}{1!}+\frac{dx}{2!}+\frac{dx^2}{3!}+\dots\right)}{dx}$$

Nichtstandard Analysis

Ein Beispiel

$$\exp'(x) = \frac{\exp(x+dx) - \exp(x)}{dx} = \exp(x) \cdot \frac{\exp(dx) - 1}{dx}$$

$$\exp(dx) = 1 + \frac{dx}{1!} + \frac{dx^2}{2!} + \frac{dx^3}{3!} + \ldots$$

$$\begin{aligned} \frac{\exp(dx) - 1}{dx} &= \frac{dx \cdot \left(\frac{1}{1!} + \frac{dx}{2!} + \frac{dx^2}{3!} + \ldots\right)}{dx} \\ &= \frac{1}{1!} + \frac{dx}{2!} + \frac{dx^2}{3!} + \ldots \end{aligned}$$

Nichtstandard Analysis

Ein Beispiel

$$\exp'(x) = \frac{\exp(x+dx)-\exp(x)}{dx} = \exp(x)\cdot\frac{\exp(dx)-1}{dx}$$

$$\exp(dx) = 1 + \frac{dx}{1!} + \frac{dx^2}{2!} + \frac{dx^3}{3!} + \dots$$

$$\begin{aligned}\frac{\exp(dx)-1}{dx} &= \frac{dx\cdot\left(\frac{1}{1!}+\frac{dx}{2!}+\frac{dx^2}{3!}+\dots\right)}{dx}\\ &= \frac{1}{1!}+\frac{dx}{2!}+\frac{dx^2}{3!}+\dots \approx 1\end{aligned}$$

Nichtstandard Analysis

L. Halbeisen
N. Hungerbühler

Ein Beispiel

$$\exp'(x) = \frac{\exp(x+dx)-\exp(x)}{dx} = \exp(x)\cdot\frac{\exp(dx)-1}{dx}$$

$$\exp(dx) = 1 + \frac{dx}{1!} + \frac{dx^2}{2!} + \frac{dx^3}{3!} + \ldots$$

$$\begin{aligned}\frac{\exp(dx)-1}{dx} &= \frac{dx\cdot\left(\frac{1}{1!}+\frac{dx}{2!}+\frac{dx^2}{3!}+\ldots\right)}{dx} \\ &= \frac{1}{1!}+\frac{dx}{2!}+\frac{dx^2}{3!}+\ldots \approx 1\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \exp'(x) = \exp(x)$$

Nichtstandard Analysis

Integrieren

Das Integral $\int\limits_a^b f(x)dx$ einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist der

Standardteil der Summe

$$\sum_{j=1}^{N^*} \frac{b-a}{N^*} \cdot f\left(a + j\frac{b-a}{N^*}\right)$$

(N^* eine beliebige nichtstandard natürliche Zahl in $\mathbb{R}^*$)

Nichtstandard Analysis

Ein Beispiel

$$\int_0^b x^2 dx$$

Nichtstandard Analysis

Ein Beispiel

$$\int_0^b x^2 dx \quad = \quad \frac{b}{N^*} \cdot \sum_{j=1}^{N^*} \left(j \frac{b}{N^*}\right)^2$$

Nichtstandard Analysis

Ein Beispiel

$$\int_0^b x^2 dx \quad = \quad \frac{b}{N^*} \cdot \sum_{j=1}^{N^*} \left(j \frac{b}{N^*} \right)^2 = \frac{b^3}{{N^*}^3} \cdot \sum_{j=1}^{N^*} j^2$$

Nichtstandard Analysis

Ein Beispiel

$$\int_0^b x^2 dx = \frac{b}{N^*} \cdot \sum_{j=1}^{N^*} \left(j \frac{b}{N^*}\right)^2 = \frac{b^3}{{N^*}^3} \cdot \sum_{j=1}^{N^*} j^2$$

$$= \frac{b^3}{{N^*}^3} \cdot \frac{1}{6} N^* (N^* + 1)(2N^* + 1)$$

Nichtstandard Analysis

Ein Beispiel

$$
\begin{aligned}
\int\limits_0^b x^2 dx &= \frac{b}{N^*} \cdot \sum_{j=1}^{N^*} \Big(j \frac{b}{N^*}\Big)^2 = \frac{b^3}{{N^*}^3} \cdot \sum_{j=1}^{N^*} j^2 \\
&= \frac{b^3}{{N^*}^3} \cdot \frac{1}{6} N^*(N^* + 1)(2N^* + 1) \\
&= \frac{b^3}{{N^*}^3} \cdot \frac{1}{6} (2{N^*}^3 + 3{N^*}^2 + N^*)
\end{aligned}
$$

Nichtstandard Analysis

Ein Beispiel

$$
\begin{aligned}
\int_0^b x^2 dx &= \frac{b}{N^*} \cdot \sum_{j=1}^{N^*} \left(j \frac{b}{N^*}\right)^2 = \frac{b^3}{{N^*}^3} \cdot \sum_{j=1}^{N^*} j^2 \\
&= \frac{b^3}{{N^*}^3} \cdot \frac{1}{6} N^*(N^* + 1)(2N^* + 1) \\
&= \frac{b^3}{{N^*}^3} \cdot \frac{1}{6}(2{N^*}^3 + 3{N^*}^2 + N^*) \\
&= \frac{b^3}{3} + \frac{b^3}{2N^*} + \frac{b^3}{6{N^*}^2}
\end{aligned}
$$

Nichtstandard Analysis

Ein Beispiel

$$
\begin{aligned}
\int_0^b x^2 dx &= \frac{b}{N^*} \cdot \sum_{j=1}^{N^*} \left(j \frac{b}{N^*}\right)^2 = \frac{b^3}{{N^*}^3} \cdot \sum_{j=1}^{N^*} j^2 \\
&= \frac{b^3}{{N^*}^3} \cdot \frac{1}{6} N^*(N^*+1)(2N^*+1) \\
&= \frac{b^3}{{N^*}^3} \cdot \frac{1}{6}(2{N^*}^3 + 3{N^*}^2 + N^*) \\
&= \frac{b^3}{3} + \frac{b^3}{2N^*} + \frac{b^3}{6{N^*}^2} \approx \frac{b^3}{3}
\end{aligned}
$$

Nichtstandard Analysis

Noch ein Beispiel: Kurvendiskussion.

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^3 + 5x^2 + 3x + 1$. Dann gilt

$$
\begin{aligned}
f(x+dx) &= \\
&= (x+dx)^3 + 5(x+dx)^2 + 3(x+dx) + 1 \\
&= 1 + 3x + 5x^2 + x^3 + {\color{red}(3 + 10x + 3x^2)}dx + {\color{blue}(5 + 3x)}dx^2 + dx^3
\end{aligned}
$$

Extremalpunkte: ${\color{red}3 + 10x + 3x^2} = 0 \iff x \in \{-3, -\frac{1}{3}\}$
Wendepunkt: ${\color{blue}5 + 3x} = 0 \iff x = -\frac{5}{3}$

Nichtstandard Analysis

Kurvendiskussion: Ableiten ohne Ableiten.

Sei $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$. Dann ist

$$\begin{aligned} f(x+dx) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x+dx)^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} x^{k-j} dx^j \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \underbrace{\sum_{k=j}^{\infty} a_k \binom{k}{j} x^{k-j}}_{=:A_j} dx^j \end{aligned}$$

Die Koeffizienten sind

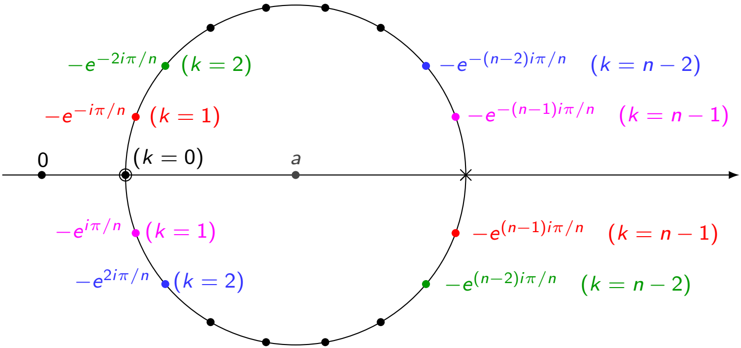
$$A_j = \sum_{k=j}^{\infty} a_k \frac{k(k-1)\dots(k-j+1)}{j!} x^{k-j} = \frac{f^{(j)}(x)}{j!}$$

…und noch ein Beispiel: Sei $a^2 \neq 1$. Dann ist

$$\int_0^\pi \ln\left(1-2a\cos(x)+a^2\right)dx =$$

$$= \quad \mathrm{st}\Big(\frac{\pi}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\log(1-2a\cos(\frac{k\pi}{n})+a^2)\Big)$$

$$= \quad \mathrm{st}\Big(\frac{\pi}{n}\log\prod_{k=0}^{n-1}\underbrace{(1-a(e^{ik\pi/n}+e^{-ik\pi/n})+a^2)}_{(a-e^{ik\pi/n})(a-e^{-ik\pi/n})}\Big)$$



Gleichfarbige Terme zusammenfassen

$$I = \int_0^\pi \ln\left(1 - 2a\cos(x) + a^2\right) dx =$$
$$= \quad \operatorname{st}\left(\frac{\pi}{n} \log\left(\frac{a-1}{a+1} \underbrace{\prod_{k=0}^{n-1}\left(a^2 - e^{2\pi ik/n}\right)}_{a^{2n}-1}\right)\right)$$

(Betrachte im letzten Schritt den roten Term als Polynom in der Variable $z = a^2$.) Ist $|a| < 1$, so erhalten wir

$$I = \operatorname{st}\left(\frac{\pi}{n} \underbrace{\log\left(\frac{a-1}{a+1}(a^{2n} - 1)\right)}_{\text{beschränkt}}\right) = 0$$

Für $|a| > 1$ ist $\operatorname{st}\left(\frac{\pi}{n} \log \frac{a-1}{a+1}\right) = 0$, also bleibt

$$I = \operatorname{st}\left(\frac{\pi}{n} \underbrace{\log(a^{2n} - 1)}_{\log a^{2n} + \log(1 - \frac{1}{a^{2n}})}\right) = \operatorname{st}\left(\pi \log a^2 + \frac{\pi}{n} \underbrace{\log(1 - \frac{1}{a^{2n}})}_{\text{beschränkt}}\right) = \pi \log a^2$$

Also zusammen:

$$\int_0^\pi \ln\left(1 - 2a\cos(x) + a^2\right) dx = \begin{cases} 0 & \text{falls } |a| < 1 \\ \pi \log a^2 & \text{falls } |a| > 1 \end{cases}$$