Nicht-Standardanalysis nach Robinson

Antje Hölscher

Vortrag I, Vortrag II

Vortrag I, Vortrag II

Heute:

Vortrag I, Vortrag II

Heute:

- Was ist nicht-standard Arithmetik?

Vortrag I, Vortrag II

Heute:

- Was ist nicht-standard Arithmetik?
- Was ist ${}^{\star}\mathbb{N}$?

Vortrag I, Vortrag II

Heute:

- Was ist nicht-standard Arithmetik?
- Was ist ${}^{\star}\mathbb{N}$?
- Was ist nicht-standard Analysis?

Vortrag I, Vortrag II

Heute:

- Was ist nicht-standard Arithmetik?
- Was ist ${}^\star\mathbb{N}$?
- Was ist nicht-standard Analysis?
- Was ist ${}^\star\mathbb{R}$?

Vortrag I, Vortrag II

Heute:

- Was ist nicht-standard Arithmetik?
- Was ist ${}^\star\mathbb{N}$?
- Was ist nicht-standard Analysis?
- Was ist ${}^\star\mathbb{R}$?

Nächstes Mal:

Vortrag I, Vortrag II

Heute:

- Was ist nicht-standard Arithmetik?
- Was ist ${}^\star\mathbb{N}$?
- Was ist nicht-standard Analysis?
- Was ist ${}^\star\mathbb{R}$?

Nächstes Mal:
Wie rechnen (differenzieren) wir in ${}^\star\mathbb{R}$?

Vortrag I, Vortrag II

Heute:

- Was ist nicht-standard Arithmetik?
- Was ist ${}^{\star}\mathbb{N}$?
- Was ist nicht-standard Analysis?
- Was ist ${}^{\star}\mathbb{R}$?

Nächstes Mal:
Wie rechnen (differenzieren) wir in ${}^{\star}\mathbb{R}$?
Philosophische Einwände:

Vortrag I, Vortrag II

Heute:

- Was ist nicht-standard Arithmetik?
- Was ist ${}^\star\mathbb{N}$?
- Was ist nicht-standard Analysis?
- Was ist ${}^\star\mathbb{R}$?

Nächstes Mal:
Wie rechnen (differenzieren) wir in ${}^\star\mathbb{R}$?
Philosophische Einwände: Publikum

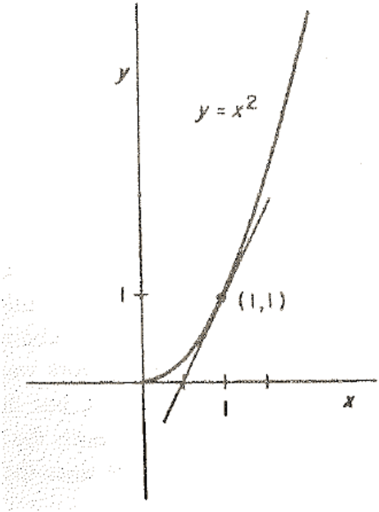
Wir knüpften an

Wir knüpften an

Was ist die Steigung von $y = x^2$ im Punkt $(1, 1)$?

Wir knüpften an

Was ist die Steigung von $y = x^2$ im Punkt $(1, 1)$?



Die Lösung aus der Analysis I

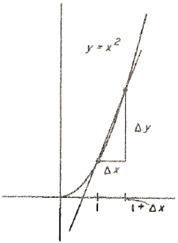
Die Lösung aus der Analysis I

Gegeben ein $\varepsilon > 0$ ...

Die Lösung aus der Analysis I

Gegeben ein $\varepsilon > 0$ . . .

For contrast, let's look at a Newton-style proof that the slope is 2: For any Δx the ratio $\Delta y/\Delta x$ is an approximation of the true slope of the curve.



As Δx becomes smaller and smaller, the approximation improves, and the *limit*, as Δx approaches 0, is the desired slope. To be precise, if $f(x)$ is any function, we define *the limit of $f(x)$, as x approaches a*, equals b

$$\left(\lim_{x\to a} f(x) = b\right)$$

by "for all $\varepsilon > 0$, there is a $\delta > 0$ such that whenever $0 < |x - a| < \delta$, then $|f(x) - b| < \varepsilon$." To apply this, we first define a function $m(\Delta x) = \Delta y/\Delta x$. By calculations we find that, given Δx, Δy is

$2\Delta x + (\Delta x)^2$. Thus

$$m(\Delta x) = \frac{2\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x}.$$

Finally we prove that according to the definition of limit,

$$\lim_{\Delta x\to 0} m(\Delta x) = 2,$$

that is, for every $\varepsilon > 0$, there is a $\delta > 0$ such that whenever

$$0 < |\Delta x - 0| < \delta,$$

then

$$\left|\frac{2\Delta x - (\Delta x)^2}{\Delta x} - 2\right| < \varepsilon.$$

The proof goes as follows: Suppose $\varepsilon > 0$ is given. Then let (by guessing) δ equal ε. We can now check that this δ works: If $0 < |\Delta x - 0| < \delta$, then

$$\begin{aligned}\left|\frac{2\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} - 2\right| &= |2 + \Delta x - 2| \\ &= |\Delta x| \\ &= |\Delta x - 0| \\ &< \delta = \varepsilon.\end{aligned}$$

Das geht kürzer!

Das geht kürzer!

- Sei $(1 + \circledcirc, (1 + \circledcirc)^2)$ der Punkt, der infinitesimal nahe an $(1, 1)$ liegt.

Das geht kürzer!

- Sei $(1 + \circledcirc, (1 + \circledcirc)^2)$ der Punkt, der infinitesimal nahe an $(1, 1)$ liegt.
- Steigung der (infinitesimal langen) Sekante zwischen diesen Punkten:

Das geht kürzer!

- Sei $(1 + \circledcirc, (1 + \circledcirc)^2)$ der Punkt, der infinitesimal nahe an $(1, 1)$ liegt.
- Steigung der (infinitesimal langen) Sekante zwischen diesen Punkten:
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(1 + \circledcirc)^2 - 1}{(1 + \circledcirc) - 1}$$

Das geht kürzer!

- Sei $(1 + \circledcirc, (1 + \circledcirc)^2)$ der Punkt, der infinitesimal nahe an $(1, 1)$ liegt.
- Steigung der (infinitesimal langen) Sekante zwischen diesen Punkten:
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(1 + \circledcirc)^2 - 1}{(1 + \circledcirc) - 1}$$
$$= \frac{\circledcirc^2 + 2\circledcirc}{\circledcirc} = \circledcirc + 2$$

Das geht kürzer!

- Sei $(1+\circledcirc, (1+\circledcirc)^2)$ der Punkt, der infinitesimal nahe an $(1,1)$ liegt.
- Steigung der (infinitesimal langen) Sekante zwischen diesen Punkten:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(1+\circledcirc)^2 - 1}{(1+\circledcirc) - 1}$$

$$= \frac{\circledcirc^2 + 2\circledcirc}{\circledcirc} = \circledcirc + 2$$

- Jetzt schmeißen wir den nicht-reellen Teil "$\circledcirc$" einfach weg. Die Lösung ist 2.

Frage: Wer sieht hier ein Problem?

Seit 1961 . . .

Seit 1961 ...

...kann man diese Rechnung auch Mathematikern vorzeigen.

1) "First things first": ${}^{\star}\mathbb{N}$

1) "First things first": ${}^\star\mathbb{N}$

- Definiere ${}^\star\mathbb{N}$ als "nicht-standard" natürliche Zahlen.

1) "First things first": ${}^\star\mathbb{N}$

- Definiere ${}^\star\mathbb{N}$ als "nicht-standard" natürliche Zahlen.
- ${}^\star\mathbb{N}$ erfülle alle Regeln von $\mathbb{N}$:

1) "First things first": ${}^\star\mathbb{N}$

- Definiere ${}^\star\mathbb{N}$ als "nicht-standard" natürliche Zahlen.
- ${}^\star\mathbb{N}$ erfülle alle Regeln von $\mathbb{N}$: Addition,

1) "First things first": ${}^\star\mathbb{N}$

- Definiere ${}^\star\mathbb{N}$ als "nicht-standard" natürliche Zahlen.
- ${}^\star\mathbb{N}$ erfülle alle Regeln von $\mathbb{N}$: Addition, Multiplikation,

1) "First things first": ${}^\star\mathbb{N}$

- Definiere ${}^\star\mathbb{N}$ als "nicht-standard" natürliche Zahlen.
- ${}^\star\mathbb{N}$ erfülle alle Regeln von $\mathbb{N}$: Addition, Multiplikation, hat eine Ordnungsrelation.

1) "First things first": ${}^\star\mathbb{N}$

- Definiere ${}^\star\mathbb{N}$ als "nicht-standard" natürliche Zahlen.
- ${}^\star\mathbb{N}$ erfülle alle Regeln von $\mathbb{N}$: Addition, Multiplikation, hat eine Ordnungsrelation.
- Alle Eigenschaften aus $\mathbb{N}$ können auf ${}^\star\mathbb{N}$ übertragen werden.

1) "First things first": $^{\star}\mathbb{N}$

- Definiere $^{\star}\mathbb{N}$ als "nicht-standard" natürliche Zahlen.
- $^{\star}\mathbb{N}$ erfülle alle Regeln von $\mathbb{N}$: Addition, Multiplikation, hat eine Ordnungsrelation.
- Alle Eigenschaften aus $\mathbb{N}$ können auf $^{\star}\mathbb{N}$ übertragen werden. Aber nicht alle Eigenschaften von $^{\star}\mathbb{N}$ können aus $\mathbb{N}$ hergeleitet werden.

1) "First things first": ${}^\star\mathbb{N}$

- Definiere ${}^\star\mathbb{N}$ als "nicht-standard" natürliche Zahlen.
- ${}^\star\mathbb{N}$ erfülle alle Regeln von $\mathbb{N}$: Addition, Multiplikation, hat eine Ordnungsrelation.
- Alle Eigenschaften aus $\mathbb{N}$ können auf ${}^\star\mathbb{N}$ übertragen werden. Aber nicht alle Eigenschaften von ${}^\star\mathbb{N}$ können aus $\mathbb{N}$ hergeleitet werden.
- Was ist neu?

- Neues Axiom:

- Neues Axiom: ${}^\star\mathbb{N}$ besitze ein Element, das (bezüglich der Ordnungsrelation auf $\mathbb{N}$ und ${}^\star\mathbb{N}$) größer ist, als alle Elemente aus $\mathbb{N}$.

- Neues Axiom: ${}^\star\mathbb{N}$ besitze ein Element, das (bezüglich der Ordnungsrelation auf $\mathbb{N}$ und ${}^\star\mathbb{N}$) größer ist, als alle Elemente aus $\mathbb{N}$.
- D.h $\mathbb{N} \subset {}^\star\mathbb{N}$.

- Neues Axiom: ${}^{\star}\mathbb{N}$ besitze ein Element, das (bezüglich der Ordnungsrelation auf $\mathbb{N}$ und ${}^{\star}\mathbb{N}$) größer ist, als alle Elemente aus $\mathbb{N}$.
- D.h $\mathbb{N} \subset {}^{\star}\mathbb{N}$.

Wir nennen Zahlen ...

- Neues Axiom: ${}^\star\mathbb{N}$ besitze ein Element, das (bezüglich der Ordnungsrelation auf $\mathbb{N}$ und ${}^\star\mathbb{N}$) größer ist, als alle Elemente aus $\mathbb{N}$.
- D.h $\mathbb{N} \subset {}^\star\mathbb{N}$.

Wir nennen Zahlen ...

- ... aus $\mathbb{N}$ "endlich".

- Neues Axiom: ${}^\star\mathbb{N}$ besitze ein Element, das (bezüglich der Ordnungsrelation auf $\mathbb{N}$ und ${}^\star\mathbb{N}$) größer ist, als alle Elemente aus $\mathbb{N}$.
- D.h $\mathbb{N} \subset {}^\star\mathbb{N}$.

Wir nennen Zahlen …

- … aus $\mathbb{N}$ "endlich".
- … aus ${}^\star\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ "unendlich".

- Neues Axiom: ${}^\star\mathbb{N}$ besitze ein Element, das (bezüglich der Ordnungsrelation auf $\mathbb{N}$ und ${}^\star\mathbb{N}$) größer ist, als alle Elemente aus $\mathbb{N}$.
- D.h $\mathbb{N} \subset {}^\star\mathbb{N}$.

Wir nennen Zahlen …

- …aus $\mathbb{N}$ "endlich".
- …aus ${}^\star\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ "unendlich".

In ${}^\star\mathbb{N}$ gibt es neue Theoreme!

- Neues Axiom: ${}^\star\mathbb{N}$ besitze ein Element, das (bezüglich der Ordnungsrelation auf $\mathbb{N}$ und ${}^\star\mathbb{N}$) größer ist, als alle Elemente aus $\mathbb{N}$.
- D.h $\mathbb{N} \subset {}^\star\mathbb{N}$.

Wir nennen Zahlen ...

- ... aus $\mathbb{N}$ "endlich".
- ... aus ${}^\star\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ "unendlich".

In ${}^\star\mathbb{N}$ gibt es neue Theoreme! Z.B. den Satz:

- Neues Axiom: ${}^\star\mathbb{N}$ besitze ein Element, das (bezüglich der Ordnungsrelation auf $\mathbb{N}$ und ${}^\star\mathbb{N}$) größer ist, als alle Elemente aus $\mathbb{N}$.
- D.h $\mathbb{N} \subset {}^\star\mathbb{N}$.

Wir nennen Zahlen ...

- ... aus $\mathbb{N}$ "endlich".
- ... aus ${}^\star\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ "unendlich".

In ${}^\star\mathbb{N}$ gibt es neue Theoreme! Z.B. den Satz: *Es gibt keine kleinste unendliche Zahl.*

2) Nicht-Standard Analysis nach Robinson

2) Nicht-Standard Analysis nach Robinson

Jetzt haben wir Übung.

2) Nicht-Standard Analysis nach Robinson

Jetzt haben wir Übung. Und konstruieren uns ${}^{\star}\mathbb{R}$ als nicht-standard reelle Zahlen.

2) Nicht-Standard Analysis nach Robinson

Jetzt haben wir Übung. Und konstruieren uns ${}^\star\mathbb{R}$ als nicht-standard reelle Zahlen.
("Hyperreell")

2) Nicht-Standard Analysis nach Robinson

Jetzt haben wir Übung. Und konstruieren uns ${}^{\star}\mathbb{R}$ als nicht-standard reelle Zahlen.
("Hyperreell") In ${}^{\star}\mathbb{R}$ gibt es die Zahl "$\circledcirc$"! (Aus der Leibniz Rechnung von oben)

Ausgangspunkt: Was ist überhaupt $\mathbb{R}$?

Ausgangspunkt: Was ist überhaupt $\mathbb{R}$?

$\mathbb{R}$ ist das, was wir uns mit einer Liste von Axiomen bauen:

Ausgangspunkt: Was ist überhaupt $\mathbb{R}$?

$\mathbb{R}$ ist das, was wir uns mit einer Liste von Axiomen bauen:

1. Die reellen Zahlen sind ein Körper.

Ausgangspunkt: Was ist überhaupt $\mathbb{R}$?

$\mathbb{R}$ ist das, was wir uns mit einer Liste von Axiomen bauen:

1. Die reellen Zahlen sind ein Körper.
2. Die reellen Zahlen sind total geordnet.

Ausgangspunkt: Was ist überhaupt $\mathbb{R}$?

$\mathbb{R}$ ist das, was wir uns mit einer Liste von Axiomen bauen:

1. Die reellen Zahlen sind ein Körper.
2. Die reellen Zahlen sind total geordnet.
3. Die reellen Zahlen sind ordnungsvollständig.

Frage: Was ist $\mathbb{R}$?

$\mathbb{R}$ ist, was wir mit einer Liste von Axiomen bauen:

1. Die reellen Zahlen sind ein Körper.
    1.1 $(\mathbb{R}, +)$ ist eine abelsche Gruppe.

Frage: Was ist $\mathbb{R}$?

$\mathbb{R}$ ist, was wir mit einer Liste von Axiomen bauen:

1. Die reellen Zahlen sind ein Körper.
    1.1 $(\mathbb{R}, +)$ ist eine abelsche Gruppe. (0 ist neutrales Element)

Frage: Was ist $\mathbb{R}$?

$\mathbb{R}$ ist, was wir mit einer Liste von Axiomen bauen:

1. Die reellen Zahlen sind ein Körper.
   1.1 $(\mathbb{R}, +)$ ist eine abelsche Gruppe. (0 ist neutrales Element)
   1.2 $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ ist eine abelsche Gruppe.

Frage: Was ist $\mathbb{R}$?

$\mathbb{R}$ ist, was wir mit einer Liste von Axiomen bauen:

1. Die reellen Zahlen sind ein Körper.
    1.1 $(\mathbb{R}, +)$ ist eine abelsche Gruppe. (0 ist neutrales Element)
    1.2 $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ ist eine abelsche Gruppe. (1 ist neutrales Element)

Frage: Was ist $\mathbb{R}$?

$\mathbb{R}$ ist, was wir mit einer Liste von Axiomen bauen:

1. Die reellen Zahlen sind ein Körper.
   1.1 $(\mathbb{R}, +)$ ist eine abelsche Gruppe. (0 ist neutrales Element)
   1.2 $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ ist eine abelsche Gruppe. (1 ist neutrales Element)
   1.3 Distributivität:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$

Frage: Was ist $\mathbb{R}$?

$\mathbb{R}$ ist, was wir mit einer Liste von Axiomen bauen:

1. Die reellen Zahlen sind ein Körper.
    1.1 $(\mathbb{R}, +)$ ist eine abelsche Gruppe. (0 ist neutrales Element)
    1.2 $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ ist eine abelsche Gruppe. (1 ist neutrales Element)
    1.3 Distributivität:
    $$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$
    $$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$
2. Die reellen Zahlen sind total geordnet.
3. Die reellen Zahlen sind ordnungsvollständig.

Frage: Was ist $\mathbb{R}$?

$\mathbb{R}$ ist, was wir mit einer Liste von Axiomen bauen:

1. Die reellen Zahlen sind ein Körper.
2. Die reellen Zahlen sind total geordnet.

Frage: Was ist $\mathbb{R}$?

$\mathbb{R}$ ist, was wir mit einer Liste von Axiomen bauen:

1. Die reellen Zahlen sind ein Körper.
2. Die reellen Zahlen sind total geordnet.
   2.1 $a < b$, $a = b$ oder $a > b$ gilt sicher.

Frage: Was ist $\mathbb{R}$?

$\mathbb{R}$ ist, was wir mit einer Liste von Axiomen bauen:

1. Die reellen Zahlen sind ein Körper.
2. Die reellen Zahlen sind total geordnet.
   2.1 $a < b$, $a = b$ oder $a > b$ gilt sicher.
   2.2 Ist $a < b$ und $b < c$, so ist $a < c$.

Frage: Was ist $\mathbb{R}$?

$\mathbb{R}$ ist, was wir mit einer Liste von Axiomen bauen:

1. Die reellen Zahlen sind ein Körper.
2. Die reellen Zahlen sind total geordnet.
   - 2.1 $a < b$, $a = b$ oder $a > b$ gilt sicher.
   - 2.2 Ist $a < b$ und $b < c$, so ist $a < c$.
   - 2.3 $a < b$ impliziert $a + c < b + c$.

Frage: Was ist $\mathbb{R}$?

$\mathbb{R}$ ist, was wir mit einer Liste von Axiomen bauen:

1. Die reellen Zahlen sind ein Körper.
2. Die reellen Zahlen sind total geordnet.
   2.1 $a < b$, $a = b$ oder $a > b$ gilt sicher.
   2.2 Ist $a < b$ und $b < c$, so ist $a < c$.
   2.3 $a < b$ impliziert $a + c < b + c$.
   2.4 Ist $c > 0$, so impliziert $a < b$, $ac < bc$.

Frage: Was ist $\mathbb{R}$?

$\mathbb{R}$ ist, was wir mit einer Liste von Axiomen bauen:

1. Die reellen Zahlen sind ein Körper.
2. Die reellen Zahlen sind total geordnet.
   2.1 $a < b$, $a = b$ oder $a > b$ gilt sicher.
   2.2 Ist $a < b$ und $b < c$, so ist $a < c$.
   2.3 $a < b$ impliziert $a + c < b + c$.
   2.4 Ist $c > 0$, so impliziert $a < b$, $ac < bc$.
3. Die reellen Zahlen sind ordnungsvollständig.

Frage: Was ist $\mathbb{R}$?

$\mathbb{R}$ ist, was wir mit einer Liste von Axiomen bauen:

1. Die reellen Zahlen sind ein Körper.
2. Die reellen Zahlen sind total geordnet.
3. Die reellen Zahlen sind ordnungsvollständig:

Frage: Was ist $\mathbb{R}$?

$\mathbb{R}$ ist, was wir mit einer Liste von Axiomen bauen:

1. Die reellen Zahlen sind ein Körper.
2. Die reellen Zahlen sind total geordnet.
3. Die reellen Zahlen sind ordnungsvollständig: Jede

Frage: Was ist $\mathbb{R}$?

$\mathbb{R}$ ist, was wir mit einer Liste von Axiomen bauen:

1. Die reellen Zahlen sind ein Körper.
2. Die reellen Zahlen sind total geordnet.
3. Die reellen Zahlen sind ordnungsvollständig: Jede nichtleere,

Frage: Was ist $\mathbb{R}$?

$\mathbb{R}$ ist, was wir mit einer Liste von Axiomen bauen:

1. Die reellen Zahlen sind ein Körper.
2. Die reellen Zahlen sind total geordnet.
3. Die reellen Zahlen sind ordnungsvollständig: Jede nichtleere, nach oben beschränkte

Frage: Was ist $\mathbb{R}$?

$\mathbb{R}$ ist, was wir mit einer Liste von Axiomen bauen:

1. Die reellen Zahlen sind ein Körper.
2. Die reellen Zahlen sind total geordnet.
3. Die reellen Zahlen sind ordnungsvollständig: Jede nichtleere, nach oben beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$

Frage: Was ist $\mathbb{R}$?

$\mathbb{R}$ ist, was wir mit einer Liste von Axiomen bauen:

1. Die reellen Zahlen sind ein Körper.
2. Die reellen Zahlen sind total geordnet.
3. Die reellen Zahlen sind ordnungsvollständig: Jede nichtleere, nach oben beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ besitzt ein Supremum.

Frage: Was ist $\mathbb{R}$?

$\mathbb{R}$ ist, was wir mit einer Liste von Axiomen bauen:

1. Die reellen Zahlen sind ein Körper.
2. Die reellen Zahlen sind total geordnet.
3. Die reellen Zahlen sind ordnungsvollständig.

Was ist jetzt neu in "${}^\star\mathbb{R}$"?

Wieder gibt ein neues Axiom in ${}^\star\mathbb{R}$!

Wieder gibt ein neues Axiom in ${}^\star\mathbb{R}$!

Neu dabei: Sei δ_0 ein "Konstantensymbol", sodass ...

Wieder gibt ein neues Axiom in ${}^\star\mathbb{R}$!

Neu dabei: Sei δ_0 ein "Konstantensymbol", sodass ...

$$0 < \delta_0$$

Wieder gibt ein neues Axiom in ${}^\star\mathbb{R}$!

Neu dabei: Sei δ_0 ein "Konstantensymbol", sodass ...

$$0 < \delta_0$$

$$\delta_0 < \frac{1}{2}$$

Wieder gibt ein neues Axiom in ${}^\star\mathbb{R}$!

Neu dabei: Sei δ_0 ein "Konstantensymbol", sodass ...

$$0 < \delta_0$$

$$\delta_0 < \frac{1}{2}$$

$$\delta_0 < \frac{1}{3}$$

Wieder gibt ein neues Axiom in ${}^\star\mathbb{R}$!

Neu dabei: Sei δ_0 ein "Konstantensymbol", sodass ...

$$0 < \delta_0$$

$$\delta_0 < \frac{1}{2}$$

$$\delta_0 < \frac{1}{3}$$

$$\delta_0 < \frac{1}{4}$$

$$\vdots$$

Wieder gibt ein neues Axiom in ${}^\star\mathbb{R}$!

Neu dabei: Sei δ_0 ein "Konstantensymbol", sodass ...

$$0 < \delta_0$$

$$\delta_0 < \frac{1}{2}$$

$$\delta_0 < \frac{1}{3}$$

$$\delta_0 < \frac{1}{4}$$

$$\vdots$$

δ_0 ist eine **unendlich kleine, positive** reelle Zahl.

Wieder gibt ein neues Axiom in ${}^\star\mathbb{R}$!

Neu dabei: Sei δ_0 ein "Konstantensymbol", sodass ...

$$0 < \delta_0$$

$$\delta_0 < \frac{1}{2}$$

$$\delta_0 < \frac{1}{3}$$

$$\delta_0 < \frac{1}{4}$$

$$\vdots$$

δ_0 ist eine **unendlich kleine, positive** reelle Zahl.
Frage: Gibt es δ_0 denn im Standard $\mathbb{R}$ noch nicht?

Wieder gibt ein neues Axiom in ${}^{\star}\mathbb{R}$!

Neu dabei: Sei δ_0 ein "Konstantensymbol", sodass ...

$$0 < \delta_0$$

$$\delta_0 < \frac{1}{2}$$

$$\delta_0 < \frac{1}{3}$$

$$\delta_0 < \frac{1}{4}$$

$$\vdots$$

δ_0 ist eine **unendlich kleine, positive** reelle Zahl.
Frage: Gibt es δ_0 denn im Standard $\mathbb{R}$ noch nicht?
Antwort: Nein,

Wieder gibt ein neues Axiom in ${}^\star\mathbb{R}$!

Neu dabei: Sei δ_0 ein "Konstantensymbol", sodass ...

$$0 < \delta_0$$

$$\delta_0 < \frac{1}{2}$$

$$\delta_0 < \frac{1}{3}$$

$$\delta_0 < \frac{1}{4}$$

$$\vdots$$

δ_0 ist eine **unendlich kleine, positive** reelle Zahl.
Frage: Gibt es δ_0 denn im Standard $\mathbb{R}$ noch nicht?
Antwort: Nein, denn weil δ_0 **kleiner** sein soll, als **jede** standard-reelle Zahl,

Wieder gibt ein neues Axiom in ${}^\star\mathbb{R}$!

Neu dabei: Sei δ_0 ein "Konstantensymbol", sodass ...

$$0 < \delta_0$$

$$\delta_0 < \frac{1}{2}$$

$$\delta_0 < \frac{1}{3}$$

$$\delta_0 < \frac{1}{4}$$

$$\vdots$$

δ_0 ist eine **unendlich kleine, positive** reelle Zahl.
Frage: Gibt es δ_0 denn im Standard $\mathbb{R}$ noch nicht?
Antwort: Nein, denn weil δ_0 **kleiner** sein soll, als **jede** standard-reelle Zahl, ist $\frac{1}{\delta_0}$ auch **größer** als **jede** standard reelle Zahl.

Wieder gibt ein neues Axiom in ${}^\star\mathbb{R}$!

Neu dabei: Sei δ_0 ein "Konstantensymbol", sodass ...

$$0 < \delta_0$$

$$\delta_0 < \frac{1}{2}$$

$$\delta_0 < \frac{1}{3}$$

$$\delta_0 < \frac{1}{4}$$

$$\vdots$$

δ_0 ist eine **unendlich kleine, positive** reelle Zahl.
Frage: Gibt es δ_0 denn im Standard $\mathbb{R}$ noch nicht?
Antwort: Nein, denn weil δ_0 **kleiner** sein soll, als **jede** standard-reelle Zahl, ist $\frac{1}{\delta_0}$ auch **größer** als **jede** standard reelle Zahl.
Das heißt auch:

Wieder gibt ein neues Axiom in ${}^\star\mathbb{R}$!

Neu dabei: Sei δ_0 ein "Konstantensymbol", sodass ...

$$0 < \delta_0$$

$$\delta_0 < \frac{1}{2}$$

$$\delta_0 < \frac{1}{3}$$

$$\delta_0 < \frac{1}{4}$$

$$\vdots$$

δ_0 ist eine **unendlich kleine, positive** reelle Zahl.
Frage: Gibt es δ_0 denn im Standard $\mathbb{R}$ noch nicht?
Antwort: Nein, denn weil δ_0 **kleiner** sein soll, als **jede** standard-reelle Zahl, ist $\frac{1}{\delta_0}$ auch **größer** als **jede** standard reelle Zahl.
Das heißt auch: Mit δ_0 ist ${}^\star\mathbb{R}$ kein archimedischer Körper mehr.

$\mathbb{R}$ ist aber ein archimedischer Körper.

${}^\star\mathbb{R}$ ist jetzt kein archimedischer Körper mehr.

${}^{\star}\mathbb{R}$ ist jetzt kein archimedischer Körper mehr.

Das Archimedische Prinzip:

${}^\star\mathbb{R}$ ist jetzt kein archimedischer Körper mehr.

Das Archimedische Prinzip:
Zu je zwei Größen $y > x > 0$

${}^\star\mathbb{R}$ ist jetzt kein archimedischer Körper mehr.

Das Archimedische Prinzip:
Zu je zwei Größen $y > x > 0$ existiert eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$,

${}^{\star}\mathbb{R}$ ist jetzt kein archimedischer Körper mehr.

Das Archimedische Prinzip:
Zu je zwei Größen $y > x > 0$ existiert eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$, sodass $nx > y$.

${}^{\star}\mathbb{R}$ ist jetzt kein archimedischer Körper mehr.

Das Archimedische Prinzip:
Zu je zwei Größen $y > x > 0$ existiert eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$, sodass $nx > y$.
Frage:

${}^\star\mathbb{R}$ ist jetzt kein archimedischer Körper mehr.

Das Archimedische Prinzip:
Zu je zwei Größen $y > x > 0$ existiert eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$, sodass $nx > y$.
Frage: Ist denn das Archimedische Prinzip "real" /

$^\star\mathbb{R}$ ist jetzt kein archimedischer Körper mehr.

Das Archimedische Prinzip:
Zu je zwei Größen $y > x > 0$ existiert eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$, sodass $nx > y$.
Frage: Ist denn das Archimedische Prinzip "real" / Voraussetzung zur Beschreibung der Natur?

${}^{\star}\mathbb{R}$ ist jetzt kein archimedischer Körper mehr.

Das Archimedische Prinzip:
Zu je zwei Größen $y > x > 0$ existiert eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$, sodass $nx > y$.
Frage: Ist denn das Archimedische Prinzip "real" / Voraussetzung zur Beschreibung der Natur? Beschreibt ${}^{\star}\mathbb{R}$ darum die Natur nicht?

Mehr Definitionen und Eigenschaften in $^\star\mathbb{R}$

Mehr Definitionen und Eigenschaften in ${}^\star\mathbb{R}$

- Jede Zahl $a \in \mathbb{R}$ nennen wir jetzt "standard-reell". Jede Zahl $a \in {}^\star\mathbb{R}$ ist von nun an "reell".

Mehr Definitionen und Eigenschaften in ${}^{\star}\mathbb{R}$

- Jede Zahl $a \in \mathbb{R}$ nennen wir jetzt "standard-reell". Jede Zahl $a \in {}^{\star}\mathbb{R}$ ist von nun an "reell".
- Eine reelle Zahl $a \in {}^{\star}\mathbb{R}$ ist **endlich**, falls es eine Standardzahl $m \in \mathbb{R}$ gibt, die größer ist: $|a| \leqslant m$.

Mehr Definitionen und Eigenschaften in ${}^\star\mathbb{R}$

- Jede Zahl $a \in \mathbb{R}$ nennen wir jetzt "standard-reell". Jede Zahl $a \in {}^\star\mathbb{R}$ ist von nun an "reell".
- Eine reelle Zahl $a \in {}^\star\mathbb{R}$ ist **endlich**, falls es eine Standardzahl $m \in \mathbb{R}$ gibt, die größer ist: $|a| \leqslant m$. Alle anderen Zahlen aus ${}^\star\mathbb{R}$ nennen wir **unendlich**.

Mehr Definitionen und Eigenschaften in ${}^\star\mathbb{R}$

- Jede Zahl $a \in \mathbb{R}$ nennen wir jetzt "standard-reell". Jede Zahl $a \in {}^\star\mathbb{R}$ ist von nun an "reell".
- Eine reelle Zahl $a \in {}^\star\mathbb{R}$ ist **endlich**, falls es eine Standardzahl $m \in \mathbb{R}$ gibt, die größer ist: $|a| \leqslant m$. Alle anderen Zahlen aus ${}^\star\mathbb{R}$ nennen wir **unendlich**.
- Eine Zahl $a \in {}^\star\mathbb{R}$ heißt **infinitesimal**, falls alle positiven Zahlen $m > 0$ aus $\mathbb{R}$ größer sind: $|a| < m$.

Mehr Definitionen und Eigenschaften in ${}^\star\mathbb{R}$

- Jede Zahl $a \in \mathbb{R}$ nennen wir jetzt "standard-reell". Jede Zahl $a \in {}^\star\mathbb{R}$ ist von nun an "reell".
- Eine reelle Zahl $a \in {}^\star\mathbb{R}$ ist **endlich**, falls es eine Standardzahl $m \in \mathbb{R}$ gibt, die größer ist: $|a| \leqslant m$. Alle anderen Zahlen aus ${}^\star\mathbb{R}$ nennen wir **unendlich**.
- Eine Zahl $a \in {}^\star\mathbb{R}$ heißt **infinitesimal**, falls alle positiven Zahlen $m > 0$ aus $\mathbb{R}$ größer sind: $|a| < m$. Beispiel: 0 ist infinitesimal.

Mehr Definitionen und Eigenschaften in ${}^\star\mathbb{R}$

- Jede Zahl $a \in \mathbb{R}$ nennen wir jetzt "standard-reell". Jede Zahl $a \in {}^\star\mathbb{R}$ ist von nun an "reell".
- Eine reelle Zahl $a \in {}^\star\mathbb{R}$ ist **endlich**, falls es eine Standardzahl $m \in \mathbb{R}$ gibt, die größer ist: $|a| \leqslant m$. Alle anderen Zahlen aus ${}^\star\mathbb{R}$ nennen wir **unendlich**.
- Eine Zahl $a \in {}^\star\mathbb{R}$ heißt **infinitesimal**, falls alle positiven Zahlen $m > 0$ aus $\mathbb{R}$ größer sind: $|a| < m$. Beispiel: 0 ist infinitesimal.
- Eine Zahl $r \in {}^\star\mathbb{R}$, $r \neq 0$ ist infinitesimal $\Leftrightarrow$ r^{-1} ist unendlich.

Mehr Definitionen und Eigenschaften in ${}^\star\mathbb{R}$

- Jede Zahl $a \in \mathbb{R}$ nennen wir jetzt "standard-reell". Jede Zahl $a \in {}^\star\mathbb{R}$ ist von nun an "reell".
- Eine reelle Zahl $a \in {}^\star\mathbb{R}$ ist **endlich**, falls es eine Standardzahl $m \in \mathbb{R}$ gibt, die größer ist: $|a| \leqslant m$. Alle anderen Zahlen aus ${}^\star\mathbb{R}$ nennen wir **unendlich**.
- Eine Zahl $a \in {}^\star\mathbb{R}$ heißt **infinitesimal**, falls alle positiven Zahlen $m > 0$ aus $\mathbb{R}$ größer sind: $|a| < m$. Beispiel: 0 ist infinitesimal.
- Eine Zahl $r \in {}^\star\mathbb{R}$, $r \neq 0$ ist infinitesimal $\Leftrightarrow$ r^{-1} ist unendlich.
- Ist $b - a$ infinitesimal, so sagen wir a liege "unendlich nahe bei" b, $a \approx b$.

Mehr Definitionen und Eigenschaften in ${}^\star\mathbb{R}$

- Jede Zahl $a \in \mathbb{R}$ nennen wir jetzt "standard-reell". Jede Zahl $a \in {}^\star\mathbb{R}$ ist von nun an "reell".
- Eine reelle Zahl $a \in {}^\star\mathbb{R}$ ist **endlich**, falls es eine Standardzahl $m \in \mathbb{R}$ gibt, die größer ist: $|a| \leqslant m$. Alle anderen Zahlen aus ${}^\star\mathbb{R}$ nennen wir **unendlich**.
- Eine Zahl $a \in {}^\star\mathbb{R}$ heißt **infinitesimal**, falls alle positiven Zahlen $m > 0$ aus $\mathbb{R}$ größer sind: $|a| < m$. Beispiel: 0 ist infinitesimal.
- Eine Zahl $r \in {}^\star\mathbb{R}$, $r \neq 0$ ist infinitesimal $\Leftrightarrow$ r^{-1} ist unendlich.
- Ist $b - a$ infinitesimal, so sagen wir a liege "unendlich nahe bei" b, $a \approx b$.

"Fun Fact" (für Mathematiker): Die Verknüpfung von ${}^\star\mathbb{R}$ und $\mathbb{R}$

"Fun Fact" (für Mathematiker): Die Verknüpfung von ${}^\star\mathbb{R}$ und $\mathbb{R}$

Zwei Definitionen ...

- Die Menge endlicher Zahlen aus ${}^\star\mathbb{R}$ bilden einen Ring in $\mathbb{R}$, bezeichnet mit M_0.

"Fun Fact" (für Mathematiker): Die Verknüpfung von ${}^\star\mathbb{R}$ und $\mathbb{R}$

Zwei Definitionen ...

- Die Menge endlicher Zahlen aus ${}^\star\mathbb{R}$ bilden einen Ring in $\mathbb{R}$, bezeichnet mit M_0.
- Die Menge der unendlichen Zahlen, M_1, bilden einen Ring in ${}^\star\mathbb{R}$.

"Fun Fact" (für Mathematiker): Die Verknüpfung von ${}^\star\mathbb{R}$ und $\mathbb{R}$

Zwei Definitionen ...

- Die Menge endlicher Zahlen aus ${}^\star\mathbb{R}$ bilden einen Ring in $\mathbb{R}$, bezeichnet mit M_0.
- Die Menge der unendlichen Zahlen, M_1, bilden einen Ring in ${}^\star\mathbb{R}$.

... ein Theorem: Der Quotientenring M_0/M_1 ist isomorph zum Körper der standard-reellen Zahlen $\mathbb{R}$.

"Fun Fact" (für Mathematiker): Die Verknüpfung von ${}^\star\mathbb{R}$ und $\mathbb{R}$

Zwei Definitionen ...

- Die Menge endlicher Zahlen aus ${}^\star\mathbb{R}$ bilden einen Ring in $\mathbb{R}$, bezeichnet mit M_0.
- Die Menge der unendlichen Zahlen, M_1, bilden einen Ring in ${}^\star\mathbb{R}$.

... ein Theorem: Der Quotientenring M_0/M_1 ist isomorph zum Körper der standard-reellen Zahlen $\mathbb{R}$.

Standardteil, Nicht-Standardteil

Standardteil, Nicht-Standardteil

Sei a eine endliche,

Standardteil, Nicht-Standardteil

Sei a eine endliche, reelle Zahl aus ${}^\star\mathbb{R}$.

Standardteil, Nicht-Standardteil

Sei a eine endliche, reelle Zahl aus ${}^\star\mathbb{R}$. Wir nennen die standard-reelle Zahl $r \in \mathbb{R}$,

Standardteil, Nicht-Standardteil

Sei a eine endliche, reelle Zahl aus ${}^{\star}\mathbb{R}$. Wir nennen die standard-reelle Zahl $r \in \mathbb{R}$, die unendlich nahe bei a liegt,

Standardteil, Nicht-Standardteil

Sei a eine endliche, reelle Zahl aus ${}^\star\mathbb{R}$. Wir nennen die standard-reelle Zahl $r \in \mathbb{R}$, die unendlich nahe bei a liegt, den **Standardteil** von a:

Standardteil, Nicht-Standardteil

Sei a eine endliche, reelle Zahl aus ${}^\star\mathbb{R}$. Wir nennen die standard-reelle Zahl $r \in \mathbb{R}$, die unendlich nahe bei a liegt, den **Standardteil** von a: $r = \mathrm{Standardteil}(a)$.

Rechnen mit Standardteil, Nicht-Standardteil

Rechnen mit Standardteil, Nicht-Standardteil

Schreiben wir jetzt $\mathrm{d}x$ für δ_0 und auch $\circledcirc$, so rechnen wir wie immer:

Rechnen mit Standardteil, Nicht-Standardteil

Schreiben wir jetzt $\mathrm{d}x$ für δ_0 und auch $\circledcirc$, so rechnen wir wie immer:
Jetzt in ${}^\star\mathbb{R}$ aber mit Lizenz!

Rechnen mit Standardteil, Nicht-Standardteil

Schreiben wir jetzt $\mathrm{d}x$ für δ_0 und auch $\circledcirc$, so rechnen wir wie immer:
Jetzt in ${}^\star\mathbb{R}$ aber mit Lizenz!
Es gilt etwa für $a, b, c, \ldots \in \mathbb{R}$:

Rechnen mit Standardteil, Nicht-Standardteil

Schreiben wir jetzt $\mathrm{d}x$ für δ_0 und auch $\circledcirc$, so rechnen wir wie immer:
Jetzt in ${}^\star\mathbb{R}$ aber mit Lizenz!
Es gilt etwa für $a, b, c, \ldots \in \mathbb{R}$:

$$a \cdot \mathrm{d}x \approx 0$$

Rechnen mit Standardteil, Nicht-Standardteil

Schreiben wir jetzt $\mathrm{d}x$ für δ_0 und auch $\circledcirc$, so rechnen wir wie immer:
Jetzt in $^\star\mathbb{R}$ aber mit Lizenz!
Es gilt etwa für $a, b, c, \ldots \in \mathbb{R}$:

$$a \cdot \mathrm{d}x \approx 0$$

$$a + b \cdot \mathrm{d}x + c \cdot \mathrm{d}x^2 \ldots \approx a$$

Rechnen mit Standardteil, Nicht-Standardteil

Schreiben wir jetzt $\mathrm{d}x$ für δ_0 und auch $\circledcirc$, so rechnen wir wie immer:
Jetzt in ${}^\star\mathbb{R}$ aber mit Lizenz!
Es gilt etwa für $a, b, c, \ldots \in \mathbb{R}$:

$$a \cdot \mathrm{d}x \approx 0$$

$$a + b \cdot \mathrm{d}x + c \cdot \mathrm{d}x^2 \ldots \approx a$$

$$\ldots$$

Rechnen mit Standardteil, Nicht-Standardteil

Schreiben wir jetzt $\mathrm{d}x$ für δ_0 und auch $\circledcirc$, so rechnen wir wie immer:
Jetzt in ${}^\star\mathbb{R}$ aber mit Lizenz!
Es gilt etwa für $a, b, c, \ldots \in \mathbb{R}$:

$$a \cdot \mathrm{d}x \approx 0$$

$$a + b \cdot \mathrm{d}x + c \cdot \mathrm{d}x^2 \ldots \approx a$$

$$\ldots$$

300 Jahre post-Leibniz:

Rechnen mit Standardteil, Nicht-Standardteil

Schreiben wir jetzt $\mathrm{d}x$ für δ_0 und auch $\circledcirc$, so rechnen wir wie immer:
Jetzt in ${}^{\star}\mathbb{R}$ aber mit Lizenz!
Es gilt etwa für $a, b, c, \ldots \in \mathbb{R}$:

$$a \cdot \mathrm{d}x \approx 0$$

$$a + b \cdot \mathrm{d}x + c \cdot \mathrm{d}x^2 \ldots \approx a$$

$$\ldots$$

300 Jahre post-Leibniz: Wir rechnen mit $\mathrm{d}x$, "schmeißen" dann den "Nicht-Standard" Teil einfach weg.

Rechnen mit Standardteil, Nicht-Standardteil

Schreiben wir jetzt $\mathrm{d}x$ für δ_0 und auch $\circledcirc$, so rechnen wir wie immer:
Jetzt in ${}^\star\mathbb{R}$ aber mit Lizenz!
Es gilt etwa für $a, b, c, \ldots \in \mathbb{R}$:

$$a \cdot \mathrm{d}x \approx 0$$

$$a + b \cdot \mathrm{d}x + c \cdot \mathrm{d}x^2 \ldots \approx a$$

$$\ldots$$

300 Jahre post-Leibniz: Wir rechnen mit $\mathrm{d}x$, "schmeißen" dann den "Nicht-Standard" Teil einfach weg.

Mehr zum Rechnen in ${}^\star\mathbb{R}$ . . .

. . . nächstes Mal

Zu guter Letzt ...

... Die Frage aller Fragen:

Zu guter Letzt . . .

. . . Die Frage aller Fragen:
Ist ${}^{\star}\mathbb{R}$ das "bessere" $\mathbb{R}$?