

Suslin's Problem

①

I Einige Begriffe

Sei M eine Menge, " $\leq$ " eine Ordnungsrelation auf M (reflexiv, antisymm., transitiv). Definiere

$$a < b : \Leftrightarrow a \leq b \text{ und } a \neq b$$

- i) M heisst total geordnet bzgl. " $\leq$ ", falls $\forall a, b \in M: a \leq b \vee b \leq a$
- ii) M heisst dicht, falls $\forall a, b \in M$ mit $a < b \exists c \in M: a < c < b$
- iii) M heisst unbeschr., falls $\forall a \in M \exists b_0, b_1 \in M: b_0 < a < b_1$
- iv) M heisst vollst., falls $\forall \tilde{M} \subseteq M$ mit $\tilde{M} \neq \emptyset$ und $\tilde{M}$ beschr.: $\exists \inf(\tilde{M}), \exists \sup(\tilde{M})$
- v) M heisst separabel, falls eine abzählbare dichte Teilmenge von M existiert.

Fakt (Analysis I): $\mathbb{R}$ mit dem üblichen " $\leq$ " ist bis auf Isomorphie die eindeutige Menge mit den Eigenschaften i) bis v)

II. AKB (abzählbare Kettenbedingung)

Jede Familie paarw. disjunkter nicht-leerer offener Intervalle ist abzählbar.

Suslin's Problem (1920)

Ist jede Menge mit i), ii), iii), iv) und der AKB schon isomorph zu $\mathbb{R}$?

Erste Beobachtung:

M separabel und total geordnet $\Rightarrow M$ erfüllt AKB.

Bew.: Sei $\mathcal{I} = \{(a_i, b_i) \mid i \in I\}$ eine Familie wie in AKB.

M sep. und tot. geordn. $\Rightarrow \exists C \subseteq M$ abzählbar mit:

$\forall i \in I \exists c_i \in C : a_i < c_i < b_i$

(Intervalle sind nicht leer)

paarw. disj. $\Rightarrow (\forall i, j \in I : i \neq j \Rightarrow c_i \neq c_j)$

Jedes c_i "markiert" also ein (a_i, b_i)

und da C abzählbar, muss $\mathcal{I}$ abzählbar sein

Suslin-Linie: Eine SL ist eine Menge, die i) - iv) + AKB erfüllt, aber nicht separabel ist. $\square$

Klar: $\nexists SL \iff (AKB \Rightarrow \text{Sep})$

Suslins Problem reduziert sich daher auf: $\exists SL?$

III: Es genügt schon von einer Menge M die Eigenschaften i), ii), iii) + AKB zu fordern:

Satz: Sei $(M, <)$ mit i), ii), iii) gegeben.

$\Rightarrow \exists (\bar{M}, <)$ mit i), ii), iii), iv) und

$\exists D \subseteq \bar{M} : D$ dicht in $\bar{M}$ & $(D, <) \cong (M, <)$

Zusätzlich: $(M, <)$ erfüllt AKB, aber nicht v)

$\Rightarrow (\bar{M}, <) \text{ --- || --- }$

Bew: Dedekind'sche Schnitte $(A, B) \subseteq M^2$.

(3)

a) $A \cup B = M$

b) $\forall a \in A \forall b \in B: a < b$

c) $\exists \inf(B) \Rightarrow \inf(B) \in B$

$\mathcal{M} := \{ (A, B) \mid (A, B) \text{ Ded.-Schn.} \}$ und

$$(A_1, B_1) \preceq (A_2, B_2) \iff A_1 \subsetneq A_2$$

$(\mathcal{M}, \preceq)$ erfüllt i) (Totalordn.)

iv): Nimm $\{(A_i, B_i) \mid i \in \mathbb{I}\} \subseteq \mathcal{M}$, nicht-leer, beschr.
und betrachte $(\bigcup_{i \in \mathbb{I}} A_i, \bigcap_{i \in \mathbb{I}} B_i) =: \sup_{i \in \mathbb{I}} \{(A_i, B_i)\}$
Analog: Infimum

Für D : Sei $\forall m \in M: A_m := \{x \in M \mid x < m\}$
 $B_m := \{x \in M \mid m \leq x\}$

$\leadsto D := \{(A_m, B_m) \mid m \in M\}$ ist in der Tat
dicht in $\mathcal{M}$. Nimm $(A_a, B_a) \preceq (A_b, B_b)$

$$\rightarrow A_a \subsetneq A_b \rightarrow a < b \stackrel{M \text{ dicht}}{\Rightarrow} \exists c: a < c < b$$

$$\rightarrow A_a \subsetneq A_c \subsetneq A_b \rightarrow (A_a, B_a) \preceq (A_c, B_c) \preceq (A_b, B_b)$$

Wir reduzieren daher auf:

$$\exists M \text{ mit i), ii), iii) + AKB, nicht iv) } \Rightarrow \exists SL$$

Bew: Wende 1 an und setze $\mathcal{M} = SL$

IV Ordinalzahlen:

Ordinalzahlen sind "spezielle" wohlgeordnete Mengen.

$(M, <)$ heißt wohlgeordnet, falls jede nicht-leere
Teilmenge von M ein kleinstes Element bzgl. " $<$ " hat.

Die Idee ist eine Verallgemeinerung des

Konzepts "Position eines Elementes in einer Menge"
(Index)
auf unendliche Mengen.

(Für endl. Mengen nimmt man IV und zählt
die Menge einfach ab).

Def.: Zwei Mengen $(M, <)$, $(N, <)$ heißen
Ordnungsisomorph, falls es eine Bijektion
 $f: M \rightarrow N$ gibt, sodass

$$\forall m_1, m_2 \in M: m_1 < m_2 \Leftrightarrow f(m_1) < f(m_2)$$

Eine Menge aller zueinander ordnungs-
isomorphen Mengen bildet eine Äquivalenz-
klasse, auch Ordnungstypus genannt.

Eine Ordinalzahl ist nun ein Repräsentant
eines solchen Ordnungstypus.

Konsequenz: Jede wohlgeordnete Menge ist
zu genau einer Ordinalzahl Ordnungsisomorph.

ω_0 bezeichne die Ord.-Zahl zu $\mathbb{N}$

$\omega_1 = \{ \alpha \mid \alpha \text{ abzählbare Ord.-Zahl} \}$

$\omega_2 = \{ \alpha \mid \alpha \text{ ist Ord.-Zahl von } \omega_1 \}$

...

Alternative Definition:

Sei X wohlgeordnete Menge. Dann ist
das Bild der Funktion

$$\varepsilon(x) := \{ \varepsilon(\gamma) \mid \gamma < x, \gamma \in X \}$$

die Ordinalzahl zu X .

"transfinite Rekursion"

V Suslin-Bäume

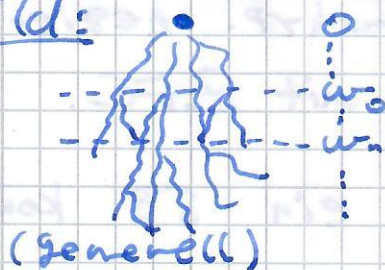
(5)

Bäume: $(T, <)$ ist ein Baum, falls
 $(T, <)$ partiell geordnet und $\forall x \in T$ die
Menge $T_x := \{y \in T \mid y < x\}$ wohlgeordnet ist.

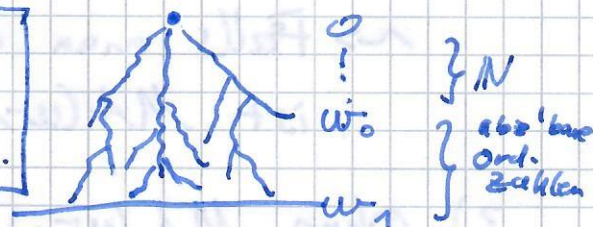
Begriffe: • $ot(x)$ sei Ord.-zahl zu T_x
("order type")

- d^{th} -Level von T ist $\{x \in T \mid ot(x) = d\}$
- Wurzel: 0^{th} -Level ~~$\neq \emptyset$~~
- Höhe: Das kleinste d , s.d. $d^{\text{th}}\text{Lv.} = \emptyset$
- Zweig: maximale total geordn. Teilmenge v. T
 $\hookrightarrow$ Länge: Ord.-zahl
 $\hookrightarrow$ abz'bar, falls Länge = ω_0 ist
- Antikette: $A \subseteq T$ mit $\forall a, b \in A$ mit $a \neq b$
gilt weder $a < b$ noch $b < a$.

Bild:



Eine Linie
steht für eine
Folge
 $m_1 < m_{i+1} < m_{i+2} < \dots$



Suslin-Baum: $(T, <)$ wie oben mit

- Höhe $< \omega_1$
- Jeder Zweig ist abz'bar
 $\neg$ Zw. jedem Level überleben in beide Richtungen
nur abz'bar viele E'lte
- Jede Antikette ist abz'bar
 $\neg$ Jeder Level, angedeutet durch $\dots \omega_0$,
hat nur abz'bar viele E'lte

Fakt: $\exists SL \iff \exists SB$
Suslin-Linie Suslin-Baum

VI Das Martin axiom $MA(\omega_1)$

Für jede partiell geordn. Menge $(P, <)$ mit AKB und jede Fam. $\mathcal{D}$ dichter Teilmengen mit $\text{card}(\mathcal{D}) < \omega_1$ existiert ein Filter $\mathcal{F}$ auf P , s.d. $\forall d \in \mathcal{D}: \mathcal{F} \cap d \neq \emptyset$

Filter: $\mathcal{F} \neq \emptyset, \forall x, y \in \mathcal{F} \exists z \in \mathcal{F}: z < x \wedge z < y$
und $\forall x \in \mathcal{F} \forall y \in P: x < y \Rightarrow y \in \mathcal{F}$

Es gilt: 1) $MA \Rightarrow \neg SB$. Grund: Ein solcher Filter hätte Länge ω_1 , die Höhe eines SB muss allerdings darunter liegen.

2) Betrachtet man $MA(\overset{\text{Card}(\mathbb{R})}{c})$, so wird die Aussage falsch, hingegen ist $MA(\omega_0)$ trivial.

$\leadsto$ Falls man die Kontinuumshyp. negiert, ist $MA(\omega_1)$ konsistent mit ZFC.

3) Ohne $MA(\omega_1)$ lässt sich ein SB konstruieren.

Fragen: • Ist die SL eine ebenso "gute" Interpretation des Kontinuums? (7)

- Was ist die Bedeutung von Sierpinski's Problem?
 $\hookrightarrow$ Vorstellungen des Kontinuums
 $\hookrightarrow$ Ist $\mathbb{R}$ "zwarungs(l)ufige" Vorstellung?

- Was ~~wäre~~ würde ein Ja auf SP bedeuten?
 $\llcorner \llcorner \llcorner$ Nein $\llcorner \llcorner \llcorner$?

JA: $\mathbb{R}$ ist zwarungs(l)ufig

Nein: $\mathbb{R}$ ist am praktischsten

(Separabilität: Man kann in $\mathbb{R}$ rechnen)

- Ist AKB schwächer als Sep.?

$\hookrightarrow X_i$ sep. $\forall i \in I$, und $(I) \leq \aleph_1$

$\Rightarrow \prod_{i \in I} X_i$ sep. $\Rightarrow \prod X_i$ hat AKB

$\hookrightarrow (X, d)$ metr. Raum: (X, d) sep. $\Leftrightarrow (X, d)$ ent. AKB

Bew. " $\Rightarrow$ " schon gesehen

" $\Leftarrow$ " Sei $F = \{(a_i, b_i) \mid i \in I\}$ paarw. disj.

* s.d. nicht-leer $\Rightarrow \exists c_i \in (a_i, b_i) \forall i \in I$

$X = \bigcup_{i \in I} (a_i, b_i)$ $D := \{c_i \mid i \in I\} \xrightarrow{\text{AKB}} D$ ist abzählbar.

$D \subseteq X$ dicht: $\bar{D} = X$ wegen *

$\hookrightarrow$ Trotzdem: AKB $\not\Rightarrow$ Sep. $\{0, 1\}^{2^{\aleph_0}}$ ist Gegenbsp.

Physik: diskrete und kont. Größen

Energien $\downarrow$ von H_2

Zeit
Ort