> Begriffe sind, deren Bestimmungsweisen eine mehrfach ausgedehnte Mannigfaltigkeit bilden» (W. 274).

Hier schliesst sich RIEMANN also HERBARTS Synechologie nicht an.

Wir kommen auf RIEMANNS Mannigfaltigkeitsbegriff in Kapitel 4 noch zurück und gehen dann auch auf die Ontologie ein.

Man wird noch zwei Aspekte hervorheben müssen. Zum einen lernte RIEMANN beim Studium HERBARTS die abendländische Philosophie kennen, und das ersetzte ihm das Anhören philosophischer Vorlesungen. Zum anderen ist auch RIEMANNS Terminologie durch HERBART beeinflusst, wie man aus den Notizen zu und Auszügen aus HERBART sehen kann: *Spekulation*, ein von RIEMANN oft benutztes Wort, ist das Streben zur Auflösung der Probleme. Philosophie kommt durch Spekulation zustande und macht Begriffe zu ihren Gegenständen. In diesem Sinne wird man auch den Terminus *Begriff* bei RIEMANN verstehen müssen. Auch dürfte RIEMANNS Auffassung von der Mathematik derjenigen HERBARTS nahegekommen sein, der sie, wenn sie nicht nur Formeln behandeln würde, als einen Teil der Philosophie erklärte, indem sie wie diese *Begriffe zu ihren Gegenständen* macht. Damit ist der Kern von RIEMANNS «Ontologie der Mathematik» charakterisiert.

Neben der Arbeit SCHOLZ 1982 sei noch der folgende Aufsatz erwähnt: GREGORY NOWAK, «Riemann's Habilitationsvortrag and the synthetic a priori status of geometry», in: ROWE und MCCLEARY 1989 vol. I, 17–46. Dort wird auch ältere, durch die Funde von SCHOLZ allerdings überholte Literatur besprochen. Uns scheint es jedoch nicht angemessen, wenn die Diskussion des Habilitationsvortrages sich auf die Abweichungen von KANTS Raumauffassung konzentrierte. SCHOLZ hat gezeigt, dass RIEMANNS Beschäftigung mit HERBART breiter und tiefer angelegt war. Wir sehen jetzt in dem Fehlen von Formeln im Vortrag nicht mehr ein Entgegenkommen gegenüber den nicht-mathematischen Fakultätsmitgliedern, sondern eher einen Versuch RIEMANNS, im HERBARTschen Sinne Mathematik als Teil der Philosophie vorzuführen, als ein Denken in Begriffen.

4 Wendepunkte in der Auffassung der Mathematik

4.1 Die Suche der Historiker nach Revolutionen in der Mathematik

Die Diskussion über Revolutionen in der Mathematik ist in den letzten Jahrzehnten Mode geworden, seit T. S. KUHNS *The structure of scientific revolutions* (1962, 1970). Eine Zusammenstellung von Beiträgen zur Mathematik ist der Band GILLIES 1992, der im folgenden mit G und den Seitenzahlen zitiert wird. Die Meinungen reichen von MICHAEL CROWES These, dass es in der Mathematik nie Revolutionen gebe, bis zu der u. a. von J. W. DAUBEN vertretenen Gegenposition, nach der fast jede als kritisch empfundene Situation in der Mathematikgeschichte als Indiz für eine Revolution anzusehen sei, sofern sie als radikal verstandene Neuerungen zur Folge hatte. GILLIES spricht sogar von einer CROWE–DAUBEN-Debatte.

Es ist bemerkenswert, dass der Name RIEMANNS in diesen Auseinandersetzungen nur selten eine Rolle spielte, wenn man von allgemeinen Erörterungen nicht-euklidischer Geometrien einmal absieht. Ausnahmen sind L. BOI und vor allem J. GRAY (G. 226 ff.), dessen Überlegungen philosophisch tiefer gehen als die meisten anderen Beiträge. GRAY nennt auch einen Grund dafür, dass Debatten über Grundlagenfragen oder über die Philosophie der Mathematik an wirklich Bedeutendem – wie RIEMANNS Neuerungen – vorbeigehen (G. 242): «[It] may be said of all the debates in the foundations of mathematics: either they are technical and accessible only to logicians, or they are epistomological and draw their examples from concepts we meet in school. The result in each case is a debate that does not interest, and does not seek to affect, working mathematicians.»

Nun ist RIEMANN sehr wohl von Interesse für jeden Mathematiker, der in Analysis, Geometrie, Zahlentheorie oder mathematischer Physik arbeitet. Es wird diesen aber kaltlassen, wenn die Historiker – wie es leider in vielen Publikationen geschieht – die Diskussion reduzieren auf Beispiele, welche Gymnasiasten zugänglich sind: Integral, pathologische Funktionen, bedingt konvergente Reihen und vielleicht noch – auch heute noch so zu lesen – die elliptische Geometrie als RIEMANNS nichteuklidische Geometrie. Das sind allenfalls oberflächliche Indizien für Wendepunkte in der Mathematik – ein RIEMANNsches Wort, welches wir der Redeweise von Revolutionen vorziehen. Wir hoffen, den Leser auf substantiellere Erörterungen vorbereitet zu haben.

Die Suche nach «Revolutionen» sollte aber nicht als bloss vorübergehende Modeerscheinung abgetan werden. Sie ist vielmehr eine Begleiterscheinung eines wesentlichen Wandels in unserer Auffassung von Wissenschaftsgeschichte. Wir sind heute nicht mehr zufrieden mit chronologischen Auflistungen von Entdeckungen und Erfindungen, mit Biographien, mit der Darstellung der Kontakte zwischen Zeitgenossen oder gar mit der Erörterung von Prioritätsfragen. Auch die sogenannte Begriffsgeschichte, die einige Jahrzehnte lang eine gewisse Rolle spielte, ging von einer zu engen Fragestellung aus – so als ob Begriffe in allen Phasen der Mathematik das Wesentliche gewesen wären; mit RIEMANNS Werk zeigt sich ja gerade, dass Mathematik als Denken in Begriffen erst (wieder) entwickelt wurde.

Es empfiehlt sich, zunächst auf einige populäre Beispiele von «Revolutionen» in der Mathematik einzugehen, ehe wir unsere Sicht zu RIEMANN entwickeln. An dem Beispielkatalog sieht man auch deutlicher als in jedem Definitionsversuch, was unter einer Revolution in der Mathematik verstanden wird.

Übereinstimmend rechnet man zu den Revolutionen: Die griechische Entdeckung der Inkommensurabilität und die nachfolgende Entwicklung der eudoxischen Grössenlehre; die Geometrie des DESCARTES (1637); die Erfindung der Infinitesimalrechnung (um 1680); die «neue Strenge» (Epsilontik) in der Analysis seit CAUCHY (1821) und DIRICHLET (1829); die nichteuklidische Geometrie (um 1830); die transfinite Mengenlehre CANTORS (ab etwa 1872). Wir brechen die Liste ab, um im direkten Einflussbereich RIEMANNS zu bleiben.

Beschränken wir uns auf die drei für das 19. Jahrhundert genannten Beispiele, so werden wir hier feststellen müssen, dass es sich zwar durchweg um Indikatoren für tiefgreifende Veränderungen handelt, nicht aber um die wesentlichen Neuerungen selbst. Für die Epsilontik und die sogenannte Strenge sei auf die Abschnitte 0.4 und 2.1 zurückverwiesen. CANTORS Mengenlehre erregte die Gemüter wohl, aber auch sie war ein – für die Analysis relativ uninteressantes – Anzeichen für einen tieferen Wandel, der auch ohne CANTORS Ordinal- und Kardinalzahlen denkbar ist. Wir kommen in Abschnitt 4.4 auf die Mengen zurück.

Hier sei die nichteuklidische Geometrie näher betrachtet. Gern zitiert man, in G. 169 sogar als Motto für einen längeren Beitrag, eine enthusiastische Äusserung von MORRIS KLINE: «The creation of non-Euclidian geometry was the most consequential and revolutionary step in mathematics since Greek times.» Und GILLIES selbst schreibt (G. 7): «After the infinitesimal calculus, the next major candidate for a revolution in mathematics is the discovery of non-Euclidian geometry.»

Tatsächlich handelt es sich im Sinne von GRAY um ein Beispiel, welches sich mit Schulbegriffen formulieren lässt. Jahrhundertelange Versuche, das Parallelenaxiom als einen Satz aus den übrigen Axiomen EUKLIDS zu folgern, führten zu keinem Erfolg. Die Entdecker der nichteuklidischen Geometrie kamen auf folgende Weise zu ihren Leistungen: Sie bewiesen aus der Annahme, dass es durch P mehr als eine g nicht schneidende Gerade gäbe, eine Fülle von Sätzen, unter Voraussetzung der übrigen Axiome des EUKLID. Man versuchte somit einen indirekten Beweis: Hätte man einen Widerspruch gefunden, so wäre das Parallelenaxiom indirekt bewiesen gewesen.

Die umfangreiche Sammlung von Sätzen überzeugte ihre Erfinder, dass eine konsistente Geometrie gefunden war. JÁNOS BÓLYAI meinte, er habe aus dem Nichts eine neue Welt erschaffen. Modelle für die nichteuklidische Ebene wurden später angegeben: Lokal lässt sie sich auf Flächen konstanter negativer Krümmung realisieren, wie BELTRAMI 1868 ausführte, und KLEIN fand eine einfache Darstellung der ganzen hyperbolischen Ebene durch das Innere einer Ellipse. Dabei ist der Abstand zweier Punkte P, Q über das Doppelverhältnis der vier Punkte P, Q, R, S zu erhalten, wenn die letzteren die Schnittpunkte der Geraden PQ mit der Ellipse sind.

Warum kann man darin eine Revolution sehen? Betrachten wir einen analogen Sachverhalt, die Geschichte der komplexen Zahlen. Seit Jahrhunderten hatte man unter der Annahme, dass man eine «Zahl» i mit $i^2 = -1$ zu den reellen Zahlen hinzunehmen könne, viele Resultate erhalten, ohne je auf einen Widerspruch zu kommen. In der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts gab man dann Modelle für die komplexen Zahlen an, man realisierte sie. Das ist qualitativ ganz dasselbe wie mit der Geschichte der nichteuklidischen Geometrie – und doch spricht keiner von einer Revolution!

Nun waren es in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts, als die neue Geometrie im Anschluss an die Veröffentlichung GAUSSscher Briefe Beachtung fand, ja auch gar nicht so sehr die Mathematiker, die sie als revolutionäre Entdeckung empfanden; sie sahen in ihr eine Klärung der Parallelenfrage, und in der Funktionentheorie ein gelegentliches Hilfsmittel. (Dazu R. BONOLA, H. LIEBMANN: *Die nichteuklidische Geometrie*, 2. Auflage Leipzig 1919.) Ausserdem war die Bewegungsgruppe der nichteuklidischen Ebene ein neues Beispiel für die kontinuierlichen Gruppen. Aufregung gab es unter den im neuhumanistischen Gymnasium in kantischer philosophischer Tradition Gebildeten, die die neue «Geometrie» als Häresie sehen mussten. Aber als solche galt ihnen schon ein vierdimensionaler Raum!

Was hat die nichteuklidische Geometrie wirklich an Neuem gebracht? Sie blieb ganz im Rahmen der euklidischen Konstruktionsmethodik, während RIEMANN diesen Boden verliess und seine Räume auf ganz andere Weise konstruierte. Für die Geometer des 19. Jahrhunderts waren andere Entwicklungen interessanter, wie PONCELETS projektive Geometrie von

1822 und, wenn auch mit einiger Verzögerung, KLEINS Erlanger Programm von 1871, und die algebraische Geometrie war, wie wir sahen, ein in vieler Hinsicht interessantes Feld.

Übrig bleibt, dass wir von einem *Wendepunkt in der Auffassung* des Parallelenproblems sprechen können. Die Versuche, das euklidische Parallelenaxiom zu beweisen, hatten in eine *Sackgasse* geführt. Eine neue Wendung führte aus der Sackgasse heraus. So betrachtet, hat die Erfindung der nichteuklidischen Geometrie für uns exemplarischen Charakter. Wir werden RIEMANNS gelegentliche Formulierung von Wendepunkten in der Auffassung in manchen Fällen zutreffender finden als die Redeweise von Revolutionen.

Hier sei nochmals auf den Sammelband L. BOI et al. 1992 hingewiesen, in welchem der *evolutionäre* Charakter der Geschichte der Geometrie nach 1830 im Vordergrund steht und in dem von Revolutionen nicht explizit die Rede ist. Die Beziehungen zu Erkenntnistheorie und Physik werden dort aus verschiedenen Sichten erörtert, und damit kommt dieser Band in seiner Auffassungsweise derjenigen RIEMANNS näher als es eine Betrachtungsweise vermag, welche die Neuerungen mehr als innermathematische Angelegenheit behandelt. Wir werden auf eine solche umfassendere Sichtweise in den Schlussbemerkungen zurückkommen, müssen in den folgenden Abschnitten jedoch zunächst die internen mathematischen Aspekte beleuchten, welche in den Jahrzehnten nach RIEMANN massgeblich waren.

4.2 Der Wendepunkt in der Auffassung des Unendlichen in der Mathematik

Das Wort «Wendepunkt» hat RIEMANN selbst in einer Notiz verwendet, welche M. NOETHER bereits 1902 im Nachtragsband der *Werke* (N. 709) wiedergegeben hat. Sie scheint bisher nicht beachtet worden zu sein. Da RIEMANN sonst vorsichtig formuliert, lässt eine so betonte Formulierung wie «Wendepunkt in der Auffassung vom Unendlichen» besonders aufhorchen, und es erschien angebracht, dieser Notiz und ihrem Kontext genau nachzugehen. E. NEUENSCHWANDER hat freundlicherweise das Originalblatt herausgesucht, welches wir hier mit Genehmigung der Handschriftenabteilung der Göttinger Bibliothek im Faksimile wiedergeben. Die nachfolgende Analyse brachte einige Überraschungen.

Zunächst sei NOETHERS Fassung wiedergegeben, welche zu korrigieren und in ihren Kontext zu stellen sein wird:

> «15. Nov. 1855: ‹Die Erkenntnis des Umstandes, daß die unendlichen Reihen und die mehrfachen Integrale in zwei Klassen zerfallen [je nachdem der Grenzwert unabhängig von der Anordnung, bezw. von der Art, wie man das Gebiet, wenn es ins Unendliche geht, wachsen läßt; oder nicht], bildet einen Wendepunkt in der Auffassung des Unendlichen in der Mathematik.› »

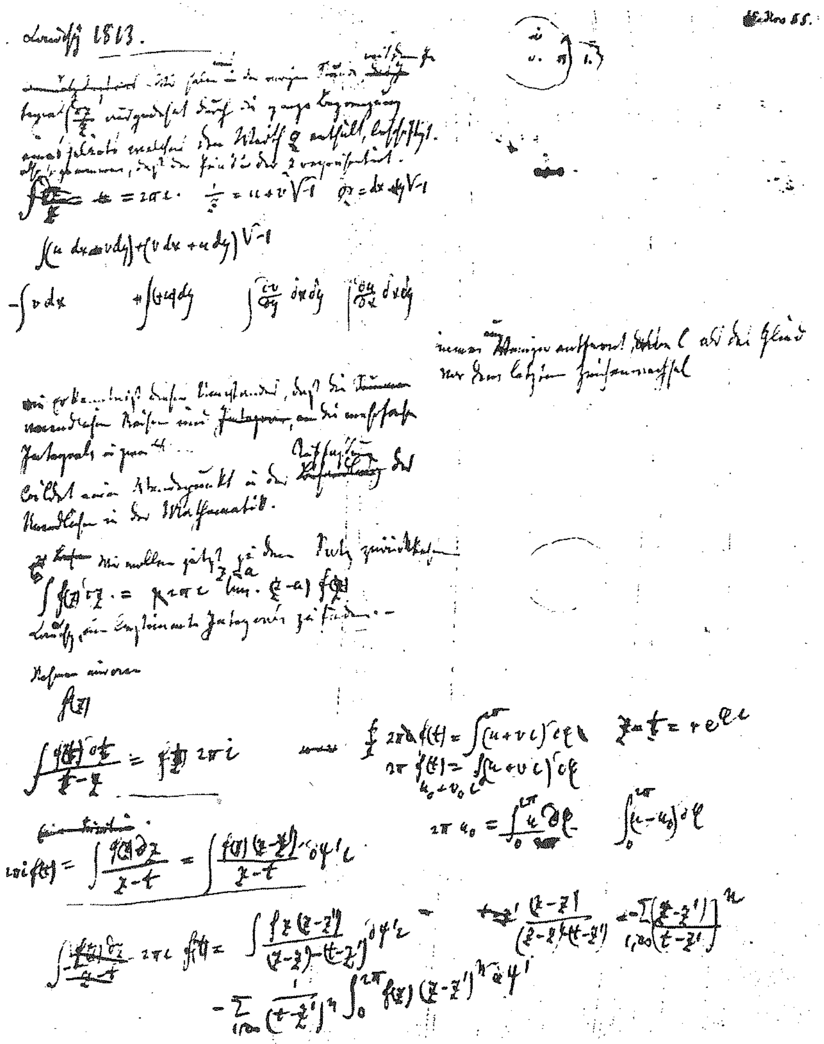

Abb. 35: RIEMANNS Notiz zur Vorlesung vom 15. 11. 1856

Die Notiz gehört zweifellos zu den Vorlesungen zur Funktionentheorie. Wir wissen, dass RIEMANN besonders den Anfang jeder Vorlesungsstunde um diese Zeit wörtlich vorzubereiten pflegte. Das zugehörige Blatt befindet sich jetzt in der Göttinger Universitätsbibliothek, Cod. Ms. RIEMANN 23.4, fol. 22 verso. Ich lese (Durchgestrichenes in runden Klammern):

> «Die Erkenntniss dieses Umstandes, dass die (Summen) unendlichen Reihen und (Integr...) die mehrfachen

Integrale in zwei Kl. . .
bildet einen Wendepunkt in der (Behandlung) Auffassung
des Unendlichen in der Mathematik.»

NOETHER hat etwas ungenau gelesen und auch mehr ergänzt als die lange Passage in eckigen Klammern. Die Datierung zeigt, dass es sich um das gleiche Blatt handelt. Es heisst richtig «dieses Umstandes», was auf einen direkten Bezug zum Kontext hinweist. RIEMANN hatte zunächst «Behandlung» notiert und das dann durch das stärkere «Auffassung» ersetzt. Die Punkte hinter Kl. . . deuten darauf hin, dass er hier eine ihm geläufige Wendung einsetzen wollte, die er nicht ausführlich zu notieren brauchte. Diese Wendung findet sich in der 1854 eingereichten Habilitationsschrift (W. 235), wo die Rede ist von der

> «Einsicht, dass die unendlichen Reihen in zwei Klassen zerfallen, je nachdem sie, wenn man sämmtliche Glieder positiv macht, convergent bleiben oder nicht».

Auch NOETHERS Ergänzung in eckigen Klammern bezieht sich auf diese Stelle.

Der Kontext sind die Beziehungen zwischen Linienintegralen und Doppelintegralen und deren Verwendung in der Funktionentheorie, die auf dem oberen Teile des Blattes angedeutet sind. $\int \frac{dz}{z} = 2\pi i$ bei einmaligem Umlauf um den Nullpunkt wird offenbar zum Anlass genommen, die GAUSS–GREENsche Integralformel zu diskutieren. RIEMANN notiert $\frac{1}{z} = u+v\sqrt{-1}$, $dz = dx + dy\sqrt{-1}$,

$$\int(u\,dx - v\,dy) + (v\,dx + u\,dy)\sqrt{-1}$$
$$-\int v\,dx \quad + \int(+u)\,dy \quad \int \tfrac{\partial v}{\partial y}\,dx\,dy \quad \int \tfrac{\partial u}{\partial x}\,dx\,dy\ ,$$

und dann schliesst sich die oben wörtlich wiedergegebene Passage an. Nimmt man noch hinzu, dass RIEMANN am oberen Rande des Blattes notiert hat «Cauchy 1813», so ergibt sich ein klares Bild zu der Bemerkung über mehrfache Integrale:

Der Hinweis kann sich nur beziehen auf die umfangreiche Arbeit von CAUCHY, «Sur les intégrales définies», vorgelegt bei der Akademie am 22. August 1814, publiziert 1827 mit Supplementen, heute zu finden in CAUCHY, *Œuvres* (1) 1, 329–506. Auf S. 394–396 hat man die wohl historisch früheste Diskussion der Nichtvertauschbarkeit der Reihenfolge bei zweifachen Integralen, und zwar genau an dem hierher gehörigen Beispiel im Integranden, RIEMANNS $\frac{\partial v}{\partial y}$ oder $\frac{\partial u}{\partial x}$ entsprechend. NOETHERS Ergänzung wäre hier zu korrigieren; es geht nicht das Integrationsgebiet ins Unendliche, sondern der Integrand wird auf dem Rand des endlichen Integrationsgebiets an einer Stelle Unendlich. CAUCHY schreibt (ich ersetze sein z durch y): «Soit $K = \phi(x, y) = \frac{y}{x^2+y^2}$, et concevons que l'intégrale

$$\int\!\!\int \frac{\partial K}{\partial y}\,dx\,dy$$

doive être prise entre les limites $y = 0$, $y = 1$, $x = 0$, $x = 1$. Si l'on suppose les valeurs de y substituées avant celles de x, on aura

$$\int_0^1 \frac{\partial K}{\partial y}\,dy = \frac{1}{1+x^2}, \qquad \int_0^1\!\int_0^1 \frac{\partial K}{\partial y}\,dx\,dy = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}\,.»$$

Kehrt man die Integrationsreihenfolge um, so ergibt sich aber der negative Wert $-\frac{\pi}{4}$. CAUCHY bemerkt, das liege an der Unbestimmtheit des Integranden für $x = y = 0$.

Aber was hat das mit einer bestimmten Auffassung vom Unendlichen zu tun? Da hilft uns weiter, dass wir glücklicherweise Äusserungen von Zeitgenossen haben. POISSON hat die Arbeit sofort referiert, und seine Besprechung ist wiedergegeben in CAUCHY, *Œuvres* (2) 2, 194–198. Noch interessanter ist der Bericht der Referenten LACROIX und LEGENDRE vom 7. November 1814 (CAUCHY, *Œuvres* (1) 1, 321–327), die dem Beispiel mehr als eine Seite widmen. Es handle sich um eine leicht zu erklärende Anomalie. Man nehme das Integral zwischen den Grenzen $x = \alpha$ bis $x = 1$ und $y = \beta$ bis $y = 1$, wobei α, β positive unendlich kleine Grössen bezeichnen. Dann erhält man das Resultat

$$\frac{\pi}{4} - \arctan\frac{\beta}{\alpha}$$

natürlich unabhängig von der Integrationsreihenfolge. Es kommt nun auf den Quotienten der beiden unendlich kleinen Grössen an! Diese «Auffassung vom Unendlichen», hier vom Unendlichkleinen, ist bei den älteren Franzosen allgemein verbreitet; CAUCHY schliesst sich ihr ab 1820 an. Auch GAUSS ist diese Auffassung nicht fremd, wie sich in Besprechungen französischer Arbeiten zeigt (*Werke* VI, 648 von 1828 ist ein Beispiel).

DIRICHLET und RIEMANN sind von der Infinitesimalmathematik zur Grenzwertauffassung übergegangen, und das hat RIEMANN wohl hier im Sinn, wie sich auch an der nur scheinbar gar nicht hierher gehörigen Äusserung zu den bedingt und absolut konvergenten Reihen zeigen lässt, zu der wir jetzt kommen.

Am Rande der Notiz steht

> «immer um weniger entfernt von C als das Glied vor dem letzten Zeichenwechsel.»

Das wird verständlich beim Vergleich mit der Stelle über die Umordnung bedingt konvergenter Reihen aus der Habilitationsschrift (W. 235):

> «In der That, bezeichnet man in einer Reihe zweiter Klasse [einer bedingt konvergenten Reihe nämlich] die positiven Glieder der Reihe nach durch $a_1, a_2, a_3, \ldots$, die negativen durch $-b_1, -b_2, -b_3, \ldots$, so ist klar, dass sowohl $\sum a$, als $\sum b$ unendlich sein müssen . . . Offenbar kann nun die Reihe durch geeignete Anordnung der Glieder einen beliebig gegebenen Werth C erhalten. Denn nimmt man abwechselnd so lange positive Glieder der Reihe, bis ihr Werth grösser als C wird, und so lange negative, bis ihr Werth kleiner als C wird, so wird die Abweichung von C

nie mehr betragen, als der Werth des dem letzten Zeichenwechsel voraufgehenden Gliedes.»

Das ist in der Randnotiz wiederzuerkennen.

Doch wird man wieder fragen, was das mit einer neuen Auffassung des Unendlichen zu tun hat, und dazu wird man an zwei ältere Vorstellungen von unendlichen Reihen anknüpfen müssen, die sich beide auf EULER zurückführen lassen. Beide erläutere ich an dem einfachsten Beispiel, der Reihe für $\ln 2$. Die Reihe

$$(i) \qquad \ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + - \ldots$$

stammt aus der Potenzreihenentwicklung von $\ln(1+x)$. Die Umordnung

$$(ii) \qquad \frac{3}{2}\ln 2 = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + + - \ldots$$

hat damit nichts zu tun, man kann sie nur aus anderen Funktionen durch Entwicklung erhalten, etwa aus $\frac{1}{2}\ln(1+x^2)(1+x)^2$. In der EULERschen Tradition ist *(ii)* keine Umordnung von *(i)*, es ist eine ganz andere Reihe. Zahlenreihen sind noch bei CAUCHY 1821 sekundär, zuerst werden Funktionenreihen behandelt, und Zahlenreihen erhält man durch Einsetzen von speziellen Werten für die Variable. EULER sagt bekanntlich, der Wert einer Reihe sei der Wert des Ausdrucks, aus dem sie durch Entwicklung entstanden sei. (Die Idee der analytischen Fortsetzung kann man als Wiederaufnahme dieser Auffassung sehen.) In einer Funktionenreihe, etwa einer Potenzreihe oder einer FOURIER-Reihe, hat jedes Glied seinen festen Platz, von Umordnung kann man dabei nicht sinnvoll sprechen. Auf unendliche Summen wird das Kommutativgesetz überhaupt nicht angewandt.

Für RIEMANN ist der Ausdruck nicht mehr die Quelle der Reihe. Daher ist die Frage nach dem Kommutativgesetz sinnvoll geworden, und man muss feststellen, dass die «Gesetze endlicher Summen» (W. 235) bei Reihen nicht mehr unbeschränkt anwendbar sind. In der Tat steckt hier eine neue Auffassung oder eine neue Behandlung des Unendlichen.

Neben der algebraischen Auffassung der Ausdrücke und ihrer Entwicklungen gibt es eine andere Tradition, die tatsächlich mit Werten auch divergenter Zahlenreihen operierte und die auf LEIBNIZ und Jugendarbeiten EULERS zurückgeführt werden kann (LAUGWITZ 1986, 44–47). Mit einer unendlich grossen natürlichen Zahl, einem *numerus infinitus* i, hat EULER für die harmonische Reihe

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{i} = \ln i + C_i \,,$$

wobei C_i bis auf einen unendlich kleinen Fehler gleich der EULERschen Konstanten $C = 0{,}57\ldots$ ist. Auf diese Summen können nun die gleichen

Regeln angewendet werden wie auf endliche Summen, und man erhält *(i)* aus

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + - \ldots + \frac{1}{2i-1} - \frac{1}{2i} \\ = \Big(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2i}\Big) - 2\Big(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2i}\Big) \\ = \ln 2i + C_{2i} - (\ln i + C_i) \approx \ln 2i - \ln i = \ln 2 \,. \end{aligned}$$

Ganz entsprechend ergibt sich *(ii)*:

$$\begin{aligned} & 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + + - \ldots + \frac{1}{4i-3} + \frac{1}{4i-1} - \frac{1}{2i} \\ & = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{4i} - \Big(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \ldots + \frac{1}{4i}\Big) - \\ & \quad - \Big(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2i}\Big) \\ & = \ln 4i + C_{4i} - \frac{1}{2}(\ln 2i + C_{2i}) - \frac{1}{2}(\ln i + C_i) \approx \ln 4 - \frac{1}{2}\ln 2 = \frac{3}{2}\ln 2 \,. \end{aligned}$$

In dieser Auffassung vom Unendlichen spiegelt sich ein LEIBNIZsches (Kontinuitäts-)Prinzip: Die Regeln des Endlichen gelten im Unendlichen weiter. Die Reihe *(ii)* ist keine Umordnung der Reihe *(i)*, sie enthält andere Summanden.

Die Abkehr von dieser LEIBNIZ–EULERschen Auffassung des Unendlichgrossen entspricht der Abkehr vom Unendlichkleinen bei den Doppelintegralen.

Freilich hat RIEMANN die zuletzt genannten Methoden zur Berechnung von Reihensummen nicht gekannt, sonst hätte er nicht sagen können, die Nichtanwendbarkeit der Gesetze endlicher Summen auf (bedingt konvergente) Reihen sei

«ein Umstand, welcher von den Mathematikern des vorigen Jahrhunderts übersehen wurde ...» (W. 235).

Ich gehe aber davon aus, dass Traditionen auch dann wirken, wenn sie nicht durch Literaturkenntnisse belegt werden können.

4.3 Wendepunkt der Methode: Denken statt Rechnen

In einer berühmten Abhandlung, auf deren fast dreihundert Seiten der Name RIEMANNS nur noch ein weiteres Mal vorkommt, schreibt ein gewiss nicht unbedeutender Mathematiker drei Jahrzehnte nach RIEMANNS Tod: «Ich habe versucht, den grossen rechnerischen Apparat von X zu vermeiden, damit auch hier der Grundsatz von Riemann verwirklicht würde, dem-

Abb. 36: DAVID HILBERT

zufolge man die Beweise nicht durch Rechnung, sondern lediglich durch Gedanken zwingen soll.»

Der Satz steht in HILBERTS sogenanntem «Zahlbericht» von 1897 (*Ges. Abh.* I, 67) mit dem genauen Titel *Die Theorie der algebraischen Zahlkörper*, und wir haben hier X statt des Namens KUMMER geschrieben. Es kommt nicht so sehr auf diesen Namen an und auch nicht auf den Themenbereich, zu dem RIEMANN in der Tat selbst nichts unmittelbar beigetragen hat. Gerade durch diesen Sachverhalt wird um so deutlicher, wie klar HILBERT den bei RIEMANN grundlegenden Wandel der Methodik des Beweisens erkannt hat und für wie vorbildlich er ihn hielt. Die andere Nennung des Namens RIEMANN findet sich übrigens zwei Seiten davor, wo von dessen tiefsinnigen Untersuchungen zur Häufigkeit der Primzahlen nebenbei die Rede ist.

Man darf HILBERT nicht dahin missverstehen, dass er einem Hochmut des Denkers gegenüber dem Rechner das Wort redet. Wie RIEMANN war er ein souveräner Rechner, und er beeilte sich auch, die tiefen Einblicke in die Theorie zu erwähnen, welche KUMMERS und KRONECKERS Arbeiten erschlossen hätten. Und wir sahen, dass RIEMANN zwar stolz darauf hinweist, er könne frühere Resultate «fast ohne Rechnung» erhalten, aber die Leistungen der «Rechner» wie KUMMER und WEIERSTRASS voll anerkennt (W. 67, 85, 101/102).

Heute mag es uns selbstverständlich erscheinen, dass Beweise durch

Denken zu erbringen sind, und wir werden uns fragen, ob das nicht seit der griechischen Mathematik stets gegolten hat. Diese Auffassung vom eigentlichen Charakter des mathematischen Beweises ist uns in Schule und Universität ständig gegenwärtig, und wir werden *bei einmal erreichtem Niveau mathematischer Einsicht* einen gedanklich erbrachten Beweis für angemessener und durchsichtiger halten als einen rechnerischen, bei dem das Endergebnis sozusagen überraschend nach vielen Umformungen plötzlich dasteht. Viele Beweise sind gemischt aus gedanklichen Schlüssen und aus Termumformungen, und so ist es auch bei RIEMANN und HILBERT.

Der Leser wird sich erinnern, dass wir in Teil 4 der Einleitung und später immer wieder Gelegenheit hatten zu sehen, wie anders die Situation um 1850 war. Die meisterhafte Beherrschung der rechnerischen Umformungen durch GAUSS, JACOBI und KUMMER war unbestritten, hatte aber doch ihre praktischen Grenzen erreicht. Die rechnerische Behandlung der hypergeometrischen Reihen bei KUMMER erforderte 200 Druckseiten des *Crelleschen Journals*, und das war dann kaum zu bewältigender Lesestoff, von einer Weiterführung für die Reihenlösungen anderer Differentialgleichungen konnte kaum noch die Rede sein. Ähnlich verhielt es sich mit den ABELschen Funktionen. Man war in eine Sackgasse geraten, und JACOBI hat das auch deutlich ausgesprochen. (Vgl. J. GRAY in ROWE und MCCLEARY I, 366.)

RIEMANNS Dissertation markiert einen Wendepunkt der Entwicklung, ein Ausweg aus der Sackgasse wird bewusst aufgezeigt und beschritten. Das Programm des § 20 zeigt, dass RIEMANN sich von Anfang an über diese auch praktische Bedeutung seiner Auffassung im klaren war (vgl. oben Abschnitte 1.2.1, 1.2.3).

KLEIN (1926, 250) schreibt einleuchtend über RIEMANNS Berliner Studienzeit: «Wohl hat ihm Jacobi die stoffliche Hauptanregung gegeben; Jacobis Methode aber übernimmt Riemann nicht. Jacobi ist ihm zu sehr Algorithmiker. Mit Dirichlet dagegen verbindet ihn eine starke innere Sympathie ähnlicher Denkweise. Dirichlet liebte es, sich die Theoreme am anschaulichen Substrat klar zu machen; daneben zergliedert er logisch scharf die Grundlagen und vermeidet tunlichst lange Rechnungen.»

(KLEINS eigene Zutat vom «anschaulichen Substrat» verwässert die Aussage freilich wieder einmal; die logische Analyse steht nicht «daneben», sie ist der wesentliche Kern.)

In seiner Gedenkrede auf DIRICHLET sagte H. MINKOWSKI (*Ges. Abh.* 460/461): «Mag auch das von Riemann Dirichletsches Prinzip benannte scharfe Schwert zuerst von William Thomsons jungem Arm geschwungen sein, von dem anderen Dirichletschen Prinzipe, mit einem Minimum an blinder Rechnung, einem Maximum an sehenden Gedanken die Probleme zu zwingen, datiert die Neuzeit in der Geschichte der Mathematik.»

4.4 Der Wendepunkt in der Ontologie: Mathematik als Denken in Begriffen

Eine kurze und oberflächliche, vorläufige Charakterisierung des Wandels, der sich im Laufe des 19. Jahrhunderts in der Auffassung von den *Gegenständen* der Mathematik vollzogen hat, lässt sich so formulieren: Am Anfang des Jahrhunderts handeln die Arithmetik und Algebra von Zahlen und Formeln, die Analysis hat dazu noch Variable als Gegenstände, die Geometrie Figuren; gegen Ende des Jahrhunderts handelt die Mathematik zunächst bei HILBERT nur noch von Mengen, und deren Strukturen werden wieder durch Mengen gegeben, in den Grundlagen der Geometrie und in der Algebra sind es Relationen als Teilmengen von Produktmengen, in der Analysis (mit Konvergenzstrukturen) dann bald Teilmengen von Potenzmengen. Der Kürze halber haben wir hier HILBERT bereits im Sinne von BOURBAKI interpretiert und damit die Tendenz der ersten Hälfte des 20. Jahrhunderts vorweggenommen.

4.4.1 *Allgemeine Begriffe und ihre Bestimmungsweisen*

RIEMANN nimmt nicht nur zeitlich eine Zwischenstellung ein. Wir behaupten, dass für ihn die Gegenstände der Mathematik nicht mehr nur die Formeln sind und noch nicht die Mengen, sondern die Begriffe. Wir sahen im vorigen Abschnitt, dass sich in seinen Studienjahren die Wende zum begrifflichen Beweisen als Methode anbahnt. Es erscheint nur konsequent, wenn als die Objekte der Sätze und Beweise dann Begriffe gesehen werden, und dazu ist RIEMANN zwischen 1851 und 1854, zwischen Promotion und Habilitation und vermutlich unter dem Einfluss der HERBARTschen Philosophie, gelangt. Ein Indiz für diese zeitliche Eingrenzung sehen wir in dem Wandel seiner Auffassung von den reellen Funktionen. Meinte er 1851 noch, der Begriff der Stetigkeit falle mit dem der gesetzmässigen Abhängigkeit zusammen (W. 3/4; oben Abschnitt 1.2.3), so war er spätestens beim Abfassen der Schrift über die trigonometrischen Reihen davon abgekommen.

Gründlich durchdacht sind dann die allgemeinen Formulierungen im Habilitationsvortrag (W. 273/274). Wir mögen versucht sein, in den im folgenden zitierten Passagen *Begriff* mit *Menge* zu übersetzen und *Bestimmungsweise* mit *Element*, und dann kommt in der Tat das heraus, was die Kommentatoren aus dem Vortrag zu machen pflegten. Der Leser möge zunächst so verfahren und dann mit uns versuchen, RIEMANNS von der unseren abweichende Vorstellung zu verstehen.

> «Grössenbegriffe sind nur da möglich, wo sich ein allgemeiner Begriff vorfindet, der verschiedene Bestimmungsweisen zulässt. Je nachdem unter diesen Bestimmungsweisen von einer zur andern ein stetiger Uebergang stattfindet oder nicht, bilden sie eine stetige oder discrete Mannigfaltigkeit; die einzelnen Bestimmungsweisen heissen im erstern Falle Punkte, im letztern Elemente dieser Mannigfaltigkeit.»

Wir sehen: Zuerst ist der *Begriff* da; er erzeugt mittels seiner verschiedenen Bestimmungsweisen eine Mannigfaltigkeit, und für letztere können wir unbedenklich Menge sagen. Es liegt nun schon im Begriffe selbst, ob die zugehörige Mannigfaltigkeit stetig ist oder diskret. RIEMANN geht nicht so vor wie wir es heute tun, indem wir eine Menge gegeben denken, der wir nachträglich eine (topologische) Struktur aufprägen, um sie damit zu einer stetigen Mannigfaltigkeit zu machen. So erklärt sich auch die für uns zunächst seltsame Disjunktion der Begriffe in solche, zu denen stetige und solche, zu denen diskrete Mannigfaltigkeiten gehören.

CANTOR sagt später, eine Menge sei die Zusammenfassung von gegebenen Dingen zu einem Ganzen. RIEMANN lässt das allenfalls für den diskreten Fall zu:

> «Begriffe, deren Bestimmungsweisen eine discrete Mannigfaltigkeit bilden, sind so häufig, dass sich für beliebig gegebene Dinge wenigstens in den gebildeteren Sprachen immer ein Begriff auffinden lässt, unter welchem sie enthalten sind (und die Mathematiker konnten daher in der Lehre von den discreten Grössen unbedenklich von der Forderung ausgehen, gegebene Dinge als gleichartig zu betrachten)...»

Wir sehen, wie RIEMANN sich zu einer gewagten Behauptung über sprachliche Ausdrucksmittel hinreissen lässt, nur um seine Ansicht von dem Primat des Begriffes auch für bunt zusammengewürfelte Haufen von Gegenständen zu betonen. Daran muss ihm sehr viel gelegen haben, denn für ihn sind – in diesem Vortrag, aber auch sonst – die diskreten Mengen ohne weiteres Interesse. Mit den seit CANTOR üblichen Mächtigkeitsargumenten könnten wir RIEMANN leicht *ad absurdum* führen, wenn wir an die Endlichkeit der sprachlichen Ausdrücke einerseits, an die unendliche Anzahl der möglichen endlichen (und die Überabzählbarkeit der Menge «aller») Teilmengen auch nur der natürlichen Zahlen denken. Aber damit würden wir RIEMANNS im Vortrag vertretene Philosophie der Mathematik verlassen. Für ihn sind in der Mathematik offenbar nur solche Mengen (Mannigfaltigkeiten) zulässig, welche sich aus Begriffen ergeben, und die interessanten sind die stetigen Mannigfaltigkeiten, die er stets an erster Stelle nennt. Sie sind

> «im gemeinen Leben so selten, daß die Orte der Sinnengegenstände und die Farben wohl die einzigen einfachen Begriffe sind, deren Bestimmungsweisen eine mehrfach ausgedehnte Mannigfaltigkeit bilden. Häufigere Veranlassung zur Erzeugung und Ausbildung dieser Begriffe findet sich erst in der höhern Mathematik.»

In der Sprache der späteren Topologie könnte man sagen, RIEMANNS stetige Mannigfaltigkeiten sind bogenweise zusammenhängende HAUSDORFF-Räume, unter denen er durch Plausibilitätsbetrachtungen diejenigen aussondert, welche lokal homöomorph zu $\mathbb{R}^n$ sind.

Hier ist nicht der Platz für mathematische Details, die wir schon in Abschnitt 3.1.3 behandelt haben. Eine Bemerkung über unendlichdimensionale Räume sei aber nachgetragen. RIEMANN erwähnt ausdrücklich «die möglichen Bestimmungen einer Function für ein gegebenes Gebiet» (W. 276). Nehmen wir den Begriff reelle Funktion auf dem Intervall $-\pi \leqq x \leqq \pi$, der ja seiner Habilitationsschrift zugrunde liegt. Dazu gehört eine stetige Mannigfaltigkeit, denn mit f, g ist auch $(1-t)f + tg$ für $0 \leqq t \leqq 1$ eine solche Funktion, es findet ein stetiger Übergang statt. Der heutige Funktionalanalytiker wird fragen: Aber in welcher Topologie soll dieser Raum von Funktionen betrachtet werden? Im unendlichdimensionalen Fall ist die Antwort für uns nicht eindeutig, während für RIEMANN die Topologie schon im Begriff enthalten sein muss. In der Habilitationsschrift verwendet er die Topologie der punktweisen Konvergenz, $f_n \to f$ genau dann wenn $f_n(x) \to f(x)$ für jedes x aus dem Intervall. Wir wissen inzwischen, dass man damit nicht sehr weit kommt, und tatsächlich ist RIEMANNS Arbeit ja nicht gerade sein grösster Erfolg gewesen. Eine andere natürliche Topologie wäre die der gleichmässigen Konvergenz im Sinne von CAUCHY, bei der die Argumente x alle reellen Zahlen des Intervalls plus alle zu ihnen infinitesimal benachbarten sind. Aber für RIEMANNS Zwecke wäre das nicht günstig, selbst wenn er bereit gewesen wäre, CAUCHYS Zahlbegriff zu übernehmen; denn in diesem Sinne sind unstetige Funktionen nie durch trigonometrische Reihen darstellbar.

4.4.2 *Der Primat des Kontinuums gegenüber dem Diskretum in* RIEMANNS *Mathematik*

RIEMANNS ganzes Werk handelt von der Mathematik der Kontinua in der Analysis, der Feldphysik, der Differentialgeometrie. «Das Prinzip, die Welt aus ihrem Verhalten im Unendlichkleinen zu verstehen», sei RIEMANNS erkenntnistheoretisches Motiv, schreibt HERMANN WEYL (N. 740). Die Mathematik des Diskreten kommt nur über die Kontinua ins Interessenfeld: Die Verteilung der Primzahlen ist aus dem Verhalten von komplexen Funktionen zu verstehen, und für die Topologie geht RIEMANN von stetigen Mannigfaltigkeiten aus, denen charakteristische Zahlen zugeordnet werden.

Die «Realität» der komplexen Zahlen wird durch ihre Darstellung im Kontinuum der Ebene gesichert (Abschnitt 1.1.2), die Zahlen *sind* erst dadurch, dass sie in einem Kontinuum, einer stetigen Mannigfaltigkeit, repräsentiert erscheinen. Und eine stetige Mannigfaltigkeit gewinnt ihren Seinscharakter aus dem Begrifflichen. Analog werden wir annehmen können, dass für RIEMANN die reellen Zahlen ihr Sein aus dem Linearkontinuum herleiten, und eine besondere Begründung des reellen Zahlbegriffs sucht man folglich bei ihm vergeblich.

RIEMANN sieht sich in Übereinstimmung mit GAUSS, dessen Äusserungen zur Metaphysik der Zahlen wir in Abschnitt 1.1.2 zusammengestellt haben. Die Übereinstimmung mit HERBARTS Synechologie ist nur partiell, denn dessen Kontinua waren auf höchstens drei Dimensionen beschränkt, und möglicherweise enthält seine Redeweise von den kontinuierlichen Reihenformen, die an ein Aneinanderreihen denken lässt, Elemente einer Diskretisierung.

Auch J. GRAY (G. 235) betont, dass die mathematische Raumanschauung bei RIEMANN nicht logisch früher ist als der Begriff der mehrfach ausgedehnten Grösse, dass vielmehr umgekehrt die Existenz solcher Grössenbegriffe durch ihre grössere Allgemeinheit gesichert wird, und er weist darauf hin, dass RIEMANN zweifach ausgedehnte Mannigfaltigkeiten als Grundlage für die komplexen Zahlen und Funktionen nimmt. GRAY meint (G. 233), RIEMANN entwickle eine neue Ontologie, indem er den alten Raumbegriff dehne und die Geometrie neu formuliere als Studium von Punktmengen, die mit einem Distanzbegriff versehen werden. Darauf läuft es bei RIEMANN letzten Endes zwar hinaus, wenn man nur die mathematischen Folgerungen betrachtet. Wir meinen aber, man sollte die Zwischenstufe nicht übergehen, die noch vor der Einführung einer metrischen Funktion von RIEMANN sehr gründlich diskutiert wird.

Das hat schon E. SCHOLZ (1980, 30–34) herausgestellt mit der Bemerkung, RIEMANN gewinne den stetigen Mannigfaltigkeiten einen qualitativen Aspekt ab und eröffne tendenziell die Möglichkeit der Überschreitung eines bloss quantitativen Charakters der Mathematik. Die allgemeine Tendenz der Mathematiker wird alsbald gegenläufig sein, unter dem Schlagwort der Arithmetisierung. Durch die ausführliche Behandlung der stetigen Mannigfaltigkeiten vor einer Einführung von Koordinaten macht RIEMANN eben gerade deutlich, dass die Zahlen sekundär sind, dass sie nur eine Hilfsfunktion haben. Wäre dem nicht so, dann hätte er sich und seinen Zuhörern das Leben erleichtern können und gleich von einer n-dimensionalen Zahlenmannigfaltigkeit als Verallgemeinerung des dreidimensionalen Koordinatenraumes der analytischen Geometrie und der zweidimensionalen GAUSSschen Parametrisierung in der Flächentheorie ausgehen können.

4.4.3 RIEMANNS *Mannigfaltigkeitsbegriff in der philosophischen Tradition*

Mit der sorgfältigen Unterscheidung der Begriffe in solche, zu denen stetige Mannigfaltigkeiten gehören, und solche zu diskreten Mannigfaltigkeiten, steht RIEMANN in der philosophischen Tradition, die auf ARISTOTELES zurückgeht. Das aristotelische Kontinuum lässt sich ohne Ende in immer wieder Teilbares teilen, woraus gefolgert wurde, es sei nicht aus unteilbaren Elementen zusammengesetzt. Man kann potentiell unendlich viele Teilpunkte finden, aber das Kontinuum ist nicht identisch mit einer aktual unendlichen Menge von Punkten. DEDEKIND und CANTOR werden diese Tradition verlassen.

In RIEMANNS Nachlass fanden sich unter der Überschrift «Antinomien» (W. 518/520) Notizen, welche seine eigene Auseinandersetzung mit der Problematik des Kontinuums bezeugen. Die jeweilige Gegenüberstellung von Thesis und Antithesis folgt schematisch und weitgehend auch thematisch der von KANT in der Kritik der reinen Venunft.

> Zur «Thesis» gehört die Überschrift: «Endliches, Vorstellbares»; zur «Antithesis» gehört: «Unendliches, Begriffssysteme, die an der Grenze des Vorstellbaren liegen».

Zuerst wird der Thesis «Endliche Zeit- und Raumelemente» gegenübergestellt die Antithesis «Stetiges». Dieses Paar interessiert uns hier. RIEMANN hat dann noch die Paare Freiheit / Determinismus, zeitlich wirkender Gott (Weltregierung) / zeitloser Gott (Vorsehung) und Unsterblichkeit / Zeitlichkeit.

Unserem Nachdenken direkt zugänglich sind nur die Begriffssysteme der Thesis, in der Mathematik können wir nur Endliches direkt behandeln. Die Begriffssysteme der Antithesis, insbesondere das Kontinuierliche, also auch die stetigen Mannigfaltigkeiten,

> «sind zwar durch negative Prädicate [wie un-endlich] fest bestimmte Begriffe, aber nicht positiv vorstellbar. Sie können aber als an der Grenze des Vorstellbaren liegend betrachtet werden ...»

RIEMANN versucht nun, eine philosophische Rechtfertigung der Grenzwertmethode zu geben:

> «Die Methode, welche Newton zur Begründung der Infinitesimalrechnung anwandte, und welche seit Anfang dieses Jahrhunderts von den besten Mathematikern als die einzige anerkannt worden ist, welche sichere Resultate liefert, ist die Grenzmethode. Die Methode besteht darin, dass man statt eines stetigen Uebergangs von einem Werth einer Grösse zu einem andern, von einem Orte zu einem andern, oder überhaupt von einer Bestimmungsweise eines Begriffs zu einer andern zunächst einen Uebergang durch eine endliche Anzahl von Zwischenstufen betrachtet und dann die Anzahl dieser Zwischenstufen so wachsen lässt, dass die Abstände zweier aufeinanderfolgender Zwischenstufen sämmtlich ins Unendliche abnehmen» (W. 519). «Von den Grössenverhältnissen abgesehen, bleibt das Begriffssystem bei dem Uebergange zur Grenze ungeändert. In dem Grenzfall selbst aber verlieren einige von den Correlativbegriffen des Systems ihre Vorstellbarkeit, und zwar solche, welche die Beziehung zwischen andern Begriffen vermitteln» (W. 520).

Bei der letzten Bemerkung wird man daran denken können, dass in der Grenze aus Ungleichheit Gleichheit werden kann, aus Stetigkeit von Funktionen einer Folge die Unstetigkeit der Grenzfunktion. Man sieht daran, dass RIEMANNS Auffassung sich hier von der LEIBNIZens unterscheidet, nach der die Regeln des Endlichen im Unendlichen Geltung behalten und

z. B. die Ruhe als unendlich kleine Bewegung angesehen werden soll. Ontologisch gilt für RIEMANN, dass die stetige Mannigfaltigkeit ihre Existenz aus dem Begriff bezieht, dass ihre Untersuchung aber nur indirekt möglich ist. Mathematisch genau und vollständig ist nur Finites dem Nachdenken zugänglich.

4.4.4 *Denken in mathematischen Begriffen vor* RIEMANN

Wenn wir mit HILBERT einig darin sind, RIEMANN als ein Vorbild in der Hinsicht zu sehen, dass man Beweise wo immer möglich durch Denken und nicht durch Rechnen erbringen soll, so ist das nicht so zu verstehen, dass Beweise durch Denken vor RIEMANN gar nicht vorgekommen wären. Um zu beurteilen, worin RIEMANNS Leistung hier liegt, werden wir ein wenig auf die Vorgänger eingehen, uns aber auf den Zeitabschnitt von EULER an beschränken. Für die Analysis sind vor allem BOLZANO und CAUCHY zu nennen.

Wir erkennen an, dass auch rechnerische oder geometrisch-konstruktive Beweise Denkarbeit erfordern, und HILBERT würdigt KUMMERS Leistungen durchaus, um bei seinem Beispiel zu bleiben. Aber hier geht es um das Denken in Begriffen.

EULER hatte, was oft übersehen wird, durchaus klare Vorstellungen von den Grundbegriffen der Analysis wie der Konvergenz und der Stetigkeit (dazu LAUGWITZ 1985). Aber die Begriffe sind weder Gegenstände seiner Mathematik noch Hilfsmittel in Beweisen. Vielmehr sind Zahlen und Funktionen durch Formelausdrücke gegeben, die Funktionen wohl auch durch ihre Graphen. Gegenstände in EULERS Mathematik sind Formeln und Figuren, nicht aber Begriffe. Schlüssige Beweise können mithin nur in regelhaften Termumformungen oder geometrischen Konstruktionen bestehen.

Wir werden den allmählichen Wandel an einem durchsichtigen Beispiel verfolgen, dem Zwischenwertsatz für stetige Funktionen. EULER und seine Zeitgenossen formulieren den Satz nur für eine wichtige Klasse von Ausdrücken, die Polynome. Ein Beweis müsste auch die Lösung als (Zahlen-) Ausdruck geben, und tatsächlich sind die Beweisversuche vor GAUSS als gescheitert anzusehen. Und GAUSS selbst, der in seiner Dissertation von 1799 sogar – wie gelegentlich seine Vorgänger – die Existenz einer komplexen Nullstelle für komplexe Polynome beweisen will, benutzt als selbstverständlich die schon bei LEIBNIZ auftretende Aussage, dass zwei «stetige» Kurven einen Schnittpunkt haben, wenn die eine Punkte auf jeder der beiden «Seiten» der andern hat.

Beweise, die wir als solche gelten lassen können, gaben BOLZANO 1817 und CAUCHY 1821, und zwar durch Abgehen vom Formelausdruck und Verwendung eines Begriffs. Sie beweisen den Zwischenwertsatz nicht mehr nur für reelle Polynome, sondern überhaupt für von ihnen im modernen Sinne definierte stetige reelle Funktionen.

Beide bemerken dabei, dass für den Beweis die Vollständigkeitseigenschaft benötigt wird: Eine monoton wachsende beschränkte Folge reeller Zahlen hat einen reellen Grenzwert, oder die Existenz der kleinsten oberen Schranke. Während BOLZANO in seinem späteren, erst im 20. Jahrhundert publizierten Werk beharrlich versucht, diese Eigenschaft begrifflich zu begründen, ist sie für CAUCHY, wie viele andere Hilfssätze, aus der Dezimaldarstellung der reellen Zahlen fast offensichtlich.

Zentrale Gegenstände in CAUCHYS Lehrbüchern von 1821 und 1823 sind stetige Funktionen und unendliche Reihen von solchen, insbesondere Potenzreihen. Er beweist u. a. die Existenz des bestimmten Integrals. BOLZANO bleibt bis zu RIEMANNS Zeit von den Mathematikern unbeachtet. Von CAUCHYS Denken in Begriffen wird kaum Notiz genommen, zumal er in seinem umfangreichen späteren Werke nur selten wieder die begriffliche Klarheit der frühen Lehrbücher erreicht. Man benutzt die algorithmisch verwertbaren Teile seiner Texte, wie die Konvergenztests, das Konvergenzkriterium hingegen und die Sätze über stetige Funktionen bleiben als «verfrühte Entdeckungen» (FREUDENTHAL: premature discoveries) unbeachtet oder werden fehlinterpretiert (Satz von der Stetigkeit der Summenfunktion einer konvergenten Reihe stetiger Funktionen). RIEMANN vermeidet jeden Hinweis auf CAUCHYS reelle Analysis.

DEDEKIND wird immer wieder behaupten, vor ihm habe niemand bewiesen, dass $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6}$. CAUCHY hätte das als eine leichte Übungsaufgabe zu den Grundbegriffen in seinem *Cours d'analyse* stellen können, und wir geben eine Lösung im Stile CAUCHYS an, um auch an diesem Beispiel die Begriffsverschiebungen im Laufe des 19. Jahrhunderts klären zu können. Die Funktionen x^2, $\sqrt{x}$ $(x > 0)$ und $f(x, y) = xy$ sind stetig. $\sqrt{2}$ und $\sqrt{3}$ sind etwa durch ihre Dezimaldarstellungen gegeben, also durch rationale Folgen $a_n \to \sqrt{2}$, $b_n \to \sqrt{3}$. Wegen der Stetigkeit von x^2 gilt $a_n^2 \to 2$, $b_n^2 \to 3$, und wegen der Stetigkeit von $f(x, y) = xy$ folgt daraus $(a_n b_n)^2 = a_n^2 b_n^2 \to 2 \cdot 3 = 6$. Dabei hat man wegen der Stetigkeit von $\sqrt{x}$ nun $a_n b_n \to \sqrt{6}$ neben $a_n b_n \to \sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$. Es folgt $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6}$.

Das ist für DEDEKIND kein Beweis, denn es wird mit stetigen Funktionen argumentiert, welche in der Arithmetik der reellen Zahlen für ihn nichts zu suchen haben. Man muss, folgt man DEDEKINDS Auffassung, zuerst die reellen Zahlen beherrschen, und danach kann man reelle Funktionen einführen. Für CAUCHY aber sind die stetigen Funktionen, die Variablen, die primären Objekte der Analysis, und die Zahlen sind nur spezielle Werte, welche von den Variablen angenommen werden können. Zu solchen *valeurs particulières* gehören neben den reellen Zahlen auch $\pm\infty$ und die unendlich kleinen Grössen ebenso wie die unendlich grossen Zahlen. Die

beiden letzteren Sorten von Werten sind bei CAUCHY überhaupt erst aus dem Variablenbegriff abgeleitet: Eine unendlich kleine Grösse ist eine Variable mit Limes Null, eine unendlich grosse (natürliche) Zahl ist eine (natürliche) Zahlvariable mit Limes ∞.

Das Verständnis für diese Auffassung CAUCHYS war den Mathematikern der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts verlorengegangen. Der Wandel bahnt sich schon bei RIEMANN an, wenn er Funktionen als Abbildungen auffasst: Dann sind Urbild(menge) und Bild(menge) primär, die Abbildung setzt diese voraus. CAUCHY stand noch in der alten Tradition, welche der Physik eng verbunden war. Auch für LEIBNIZ waren Grössen wie die Geschwindigkeit Variable.

4.5 Ontologie und Methodologie der Mathematik in der Zeit nach RIEMANN

Heute pflegt man unter Grundlagen der Mathematik vor allem Mengenlehre und mathematische Logik zu verstehen, im Sinne von Part 5, «Logics, Set Theory, and the Foundations of Mathematics» in GRATTAN-GUINNESS 1994. Wenn man RIEMANN, wie FREUDENTHAL empfohlen hat, auch als Philosophen verstehen will, so wird man untersuchen, welche Wirkungen in dieser Hinsicht von ihm ausgegangen sind, welche Diskussionen möglicherweise durch sein Werk mit ausgelöst wurden. Wir beschränken uns dabei auf die zweite Hälfte des 19. Jahrhunderts. Direkt gewirkt hat RIEMANN vor allem auf DEDEKIND und auch auf CANTOR, indirekt auf HILBERT, und die «antimetaphysische» Einstellung in Berlin wird als Kontrast zur Verdeutlichung beitragen.

4.5.1 *Der Primat der Zahl bei* DEDEKIND

Wenige Wochen nach RIEMANN, am 30. Juni 1854, hält der 22-jährige RICHARD DEDEKIND in Göttingen seinen Habilitationsvortrag. Anwesend sind vier Professoren der Philosophischen Fakultät, unter ihnen GAUSS und WEBER. Später erwähnt DEDEKIND (1888), dass GAUSS die Absicht dieses Vortrags gebilligt habe, und das Manuskript wurde sorgfältig aufbewahrt. EMMY NOETHER hat es 1932 aus dem Nachlass publiziert (DEDEKIND, *Werke* III, 428–438). In vieler Hinsicht entwirft DEDEKIND schon hier eine Kontrastauffassung zu RIEMANN. Inhalt des Vortrags sind die Erweiterungen des Zahlsystems, ausgehend von den natürlichen Zahlen, und die Bemerkung, dass die «Permanenz» von Rechengesetzen dabei entscheidend ist: «Das *Gesetz* lehrt auch hier, wie man den *Begriff* auffassen soll, auf daß er am wirksamsten werde» (l. c. S. 436; Hervorhebungen im Original). DEDEKIND äussert seine Unzufriedenheit mit den vorliegenden Behandlungen der irrationalen und der imaginären Zahlen. Beharrlich ist er immer wieder auf die Probleme dieses Vortrags zurückgekommen, und seine Grundeinstellung hat er zeitlebens beibehalten.

Während für RIEMANN die stetigen Grössenbegriffe primär sind, ist es für DEDEKIND der Zahlbegriff, den er «für gänzlich unabhängig von den Vorstellungen oder Anschauungen des Raumes und der Zeit» hält, «für einen unmittelbaren Ausfluß der reinen Denkgesetze» (Vorwort zu DEDEKIND 1888). Für ihn ist es «etwas Selbstverständliches und durchaus nichts Neues, daß jeder auch noch so fern liegende Satz der Algebra und höheren Analysis sich als ein Satz über die natürlichen Zahlen aussprechen läßt, eine Behauptung, die ich auch wiederholt aus dem Munde von Dirichlet gehört habe.»

Wie RIEMANN stützt DEDEKIND seine – allerdings prinzipiell von denen seines Freundes verschiedenen – Ansichten auf die Autoritäten der beiden Lehrer GAUSS und DIRICHLET!

Nun soll man aber diese prinzipiell mögliche Umschreibung aller Mathematik in Aussagen über natürliche Zahlen nicht etwa in jedem Fall wirklich vornehmen; es geht vielmehr um die «Schöpfung und Einführung neuer Begriffe.» Auch die natürlichen Zahlen sind für DEDEKIND nicht vorgegebene Dinge, sondern «freie Schöpfungen des menschlichen Geistes» (DEDEKIND 1888, Vorwort). An H. WEBER schreibt er am 24. Januar 1888: «Wir sind göttlichen Geschlechtes und besitzen ohne jeden Zweifel schöpferische Kraft nicht bloß in materiellen Dingen (Eisenbahnen, Telegraphen), sondern ganz besonders in geistigen Dingen» (*Werke* III, 489). Und für sich selbst hat DEDEKIND notiert (Zettel im Nachlass, nach H. MEHRTENS in: HARBORTH 1982, 19): «Von allen Hilfsmitteln, welche der menschliche Geist zur Erleichterung seines Lebens, d. h. der Arbeit, in welcher das Denken besteht, bis jetzt erschaffen hat, ist keines so folgenreich und so untrennbar mit seiner innersten Natur verbunden, wie der Begriff der *Zahl* . . . jeder denkende Mensch [ist], auch wenn er dies nicht deutlich fühlt, ein Zahlen-Mensch, ein Arithmetiker.»

Es fällt schwer zu glauben, dass von diesem Dogma aus mathematische Diskussionen mit Andersdenkenden wie RIEMANN möglich gewesen sein könnten.

Nachdem aus den natürlichen Zahlen ohne grosse Probleme die rationalen Zahlen erzeugt worden sind, ist die Schöpfung der irrationalen Zahlen die nächste Aufgabe. DEDEKIND legt Wert darauf, dass ihm die Idee dazu am 24. November 1858 gekommen sei, in der Zeit, als er zum ersten Male Vorlesungen zur Einführung in die Differentialrechnung zu halten hatte. Die Publikation erfolgte erst 1872, kurz nach der Veröffentlichung seiner Theorie der ganzen algebraischen Zahlen mit der Begründung der Ideale im Anhang zur zweiten Auflage von 1871 der von ihm edierten DIRICHLETschen Vorlesungen über Zahlentheorie. Jedesmal ist sein schöpferischer Schritt:

Aus gegebenen wohlbestimmten mathematischen Gegenständen wird zu ihrem System übergegangen, sie werden zu einer Menge zusammengefasst. Gewisse Teilmengen des Systems geben ihm neue wohlbestimmte Gegenstände, und diese werden zu einem neuen System vereinigt. Die DEDEKINDschen Schnitte im System der rationalen Zahlen geben die reellen Zahlen, gewisse Teilmengen in Systemen algebraischer Zahlen, die Ideale, geben die früher von KUMMER formal eingeführten «idealen Zahlen», und aus einem algebraischen Funktionenkörper wird später die RIEMANNsche Fläche erschaffen (vgl. oben Abschnitt 1.3.8).

Die von DEDEKIND erstmals gestelle Frage nach der Begründung der natürlichen und der reellen Zahlen erscheint uns heute so naheliegend und die von ihm gegebenen Antworten sind für uns so selbstverständlich, dass wir nur schwer nachvollziehen können, um welche mutigen Leistungen es sich seinerzeit handelte. Die kleine Schrift, in der DEDEKIND 1872 seine Begründung der reellen Zahlen gab, setzte sich kühn über die philosophischen Traditionen hinweg, in denen RIEMANN noch verhaftet war. Wir haben in Abschnitt 4.4.3 RIEMANNS Notizen zur Antinomie kennengelernt, in der der Thesis vom Diskreten die Antithesis des Stetigen als unvereinbar gegenübergestellt wurde. DEDEKIND stiftet, wenigstens für den Bereich der Mathematik, eine Synthesis und zeigt, dass die wohlbekannten reellen Zahlen aus diesem Versuch einer Synthesis erzeugt werden können.

Die rationalen Zahlen seien vorausgesetzt. Das Linearkontinuum dient wie in der Philosophie und wie bei RIEMANN als Grenzvorstellung, und DEDEKIND hütet sich wohl, diese Grenzvorstellung selbst zu arithmetisieren. Aber sie gibt Hinweise für eine Analogie. Unbestritten ist, dass im Linearkontinuum L Punkte liegen, doch wird nicht postuliert, dass dieses Kontinuum *gleich* der Menge dieser Punkte sei. Aber: «Ist p ein bestimmter Punkt in L, so zerfallen alle Punkte in L in zwei Klassen, P_1, P_2, deren jede unendlich viele Individuen enthält; die erste Klasse P_1 umfaßt alle die Punkte p_1, welche links von p liegen, und die zweite Klasse P_2 umfaßt alle Punkte p_2, welche rechts von p liegen; der Punkt p selbst kann nach Belieben der ersten oder der zweiten Klasse zugeteilt werden» (DEDEKIND 1872, 8). Die in üblicher Weise angeordneten rationalen Zahlen haben diese Eigenschaft auch, aber ihnen fehlt die Eigenschaft des Linearkontinuums L, dass jede Klasseneinteilung, jeder «Schnitt», in dieser Weise von einem Element erzeugt wird. DEDEKIND sieht das Wesen der Stetigkeit der Linie gerade «in dem folgenden Prinzip: Zerfallen alle Punkte der Geraden in zwei Klassen von der Art, daß jeder Punkt der ersten Klasse links von jedem Punkte der zweiten Klasse liegt, so existiert ein und nur ein Punkt, welcher diese Einteilung aller Punkte in zwei Klassen, diese Zerschneidung der Geraden in zwei Stücke hervorbringt» (S. 10).

Das Linearkontinuum wird als Grenzvorstellung in dieser Weise vollständig gedacht. Die rationalen Zahlen haben diese Vollständigkeitseigenschaft nicht. Aber in Analogie zur Vorstellung des Linearkontinuums geht DEDEKIND so vor (S. 13): «Jedesmal nun, wenn ein Schnitt vorliegt, welcher durch keine rationale Zahl hervorgebracht wird, so *erschaffen* wir eine neue, eine *irrationale* Zahl, welche wir als durch diesen Schnitt vollständig definiert ansehen.»

Man kann sich leicht davon überzeugen, dass die zuvor als Dezimalzahlen gegebenen reellen Zahlen genau diesen Schnitten entsprechen. Aber DEDEKIND gibt eine von speziellen Darstellungen unabhängige Definition. Er *erschafft* die reellen Zahlen, die zu einer Menge (einem Gebiet in DEDEKINDS Sprechweise) zusammengefasst die für die Mathematik wesentlichen Eigenschaften des stetigen Linearkontinuums aufweisen. Er erzeugt das reelle Zahlensystem als Surrogat für das arithmetisch an sich unzugängliche Linearkontinuum. Man hat ein *synthetisches* Kontinuum. Von dem neu erschaffenen Gebiet der reellen Zahlen zeigt DEDEKIND sogleich, dass es die geforderte Vollständigkeit besitzt: Hier gehört zu jedem Schnitt genau eine Zahl.

Überdenken wir nochmals die in Abschnitt 4.4 behandelten Überlegungen RIEMANNS zu den stetigen Mannigfaltigkeiten, so müssen wir mit DEDEKIND dort eine Argumentationslücke erkennen: Zunächst wird rein begrifflich vorgegangen, aber dann werden für die Zwecke der analytischen Behandlung unvermittelt die reellen Parameter oder Koordinaten herangezogen. DEDEKIND (1872, 4) meinte: «Man sagt so häufig, die Differentialrechnung beschäftige sich mit den stetigen Größen, und doch wird nirgends eine Erklärung von dieser Stetigkeit gegeben ...»

Im letzteren Punkte wird man DEDEKIND allerdings entgegenhalten müssen, dass es längst gute Lehrbücher der Differentialrechnung gab, welche ohne die Redeweise von den undefinierten stetigen Grössen auskamen. Wieder, wie oben am Ende von Abschnitt 4.4.4, ist CAUCHY zu nennen, der die (Dezimal-)Darstellung der reellen Zahlen zugrunde legte, in welcher der Satz von der Konvergenz einer monoton wachsenden beschränkten Folge ohne Mühe einzusehen ist, so dass DEDEKIND in seinen Vorlesungen nicht zu «geometrischen Evidenzen» hätte «Zuflucht nehmen» müssen, um diesen Satz zu beweisen, wie er es zur Motivation seiner Überlegungen erwähnt. Aber DEDEKIND hält nichts davon, Beweise in speziellen Darstellungen zu geben. Auch mit der Idealtheorie hatte er sich «eine lange Reihe von Jahren hindurch beschäftigt», ging aber erst an eine Publikation, als er die Theorie unabhängig von einer bestimmten Darstellungsform aufschreiben konnte (Einleitung zu DEDEKIND 1871).

DEDEKIND geht es immer um die Zahlen selbst, nicht um ihre Darstellungen. Darauf müssen wir noch zurückkommen (4.5.3).

DEDEKIND sagt auch, eine Theorie müsse so aufgebaut sein, dass sie «von vornherein den Charakter der Invarianz» erkennen lasse, welcher in Wahrheit einem Begriff zukomme, und er meint damit die Unabhängigkeit

von der speziellen Darstellungsform. In der Tat würde es ja einer gewissen Überlegung bedürfen, dass die Analysis unabhängig ist von der speziellen Darstellungsweise der reellen Zahlen gerade durch Ausdrücke zur Basis 10. Dass er keine grosse Lust hatte, RIEMANNS Geometrie weiterzuverfolgen, mag mit daran gelegen haben, dass dort die Darstellung in speziellen Koordinatensystemen nicht zu eliminieren war (Abschnitt 3.1.9).

Wir müssen noch erwähnen, dass DEDEKINDS synthetisches Kontinuum der reellen Zahlen doch einige dem philosophischen Kontinuumsbegriff fremde Eigenschaften hat, wie es wegen des antinomischen Verhältnisses von Diskretem und Kontinuierlichem auch gar nicht anders zu erwarten war. $\mathbb{R}$ ist aus Elementen zusammengesetzt, und während im Kontinuum der Philosophen die Teilpunkte potentiell existieren und jedes Teilkontinuum nur immer wieder noch teilbar sein soll, wird das synthetische Kontinuum $\mathbb{R}$ einfach identifiziert mit der Menge seiner Elemente. Dass man $\mathbb{R}$ als Kontinuum bezeichnete und insbesondere die Frage nach der Mächtigkeit seiner Teilmengen Kontinuumproblem nannte, ist übrigens weder auf DEDEKIND noch auf CANTOR zurückzuführen, die durchaus Kenntnis von der philosophischen Tradition besassen.

4.5.2 *Von der Arithmetisierung zur Axiomatisierung:* HILBERT *1897/1899*

DAVID HILBERT (1862–1943) wurde schon früh an der Universität seiner Heimatstadt Königsberg durch HEINRICH WEBER mit den Auffassungen DEDEKINDS bekannt. Ab 1895 wirkte er als Ordinarius in Göttingen. Breite und Tiefe seines mathematischen Schaffens lassen HILBERT als die beherrschende Figur seiner Zeit erscheinen. HILBERT hat auch, wie wir in diesem Buch bei mehreren Gelegenheiten bemerken konnten, viel für ein tieferes Verständnis RIEMANNS bewirkt.

Auf der Münchner Jahrestagung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung (DMV) im Herbst 1893 trug HILBERT «Über die Zerlegung der Ideale eines Zahlkörpers in Primideale» vor; so lautet der Titel der kurzen Publikation in *Math. Annalen* 44, (1894) 1–8, einem Meisterwerk «moderner» Algebra. Unter Anerkennung der Leistungen KRONECKERS verwendet HILBERT hier wie selbstverständlich die Begriffsbildungen DEDEKINDS, und das gilt auch für den berühmten «Zahlbericht», mit dessen Abfassung ihn die Vereinigung beauftragte. Er erschien dann 1897 unter dem Titel «Die Theorie der algebraischen Zahlkörper» im *Jahresbericht der DMV* 4, 175–546. Wir zitieren nach *Ges. Abh.* I, 63–363. Hier interessieren wir uns für die Gedanken zur Ontologie und Methodologie bei HILBERT in den letzten Jahren des 19. Jahrhunderts, ohne auf die weitere Entwicklung eingehen zu können.

Obwohl RIEMANN zum eigentlichen Gegenstand des Zahlberichts nichts beigetragen hatte, wird sein Name an zwei Stellen erwähnt, zuerst mehr nebenbei wegen seiner «tiefsinnigen Untersuchungen» über die Häufigkeit der Primzahlen (S. 65). Und dann finden wir die von uns schon in 4.3 erwähnte Bemerkung, die in lakonischer Kürze eine anerkennende Charakterisierung RIEMANNS gibt:

«Ich habe versucht, den großen rechnerischen Apparat von Kummer zu vermeiden, damit auch hier [d. h. in der Zahlentheorie] der Grundsatz von Riemann verwirklicht würde, demzufolge man die Beweise nicht durch Rechnung, sondern lediglich durch Gedanken zwingen soll.»

Das ist ein Bekenntnis zu RIEMANN in der Methodologie; in der Ontologie aber gilt DEDEKIND als Vorbild. RIEMANNS qualitative und begriffliche Zugänge zu Funktionentheorie und Geometrie werden zu diesem Zeitpunkt von HILBERT nicht gewürdigt.

HILBERT bekennt sich vielmehr zur Arithmetisierung der Mathematik und schreibt «daß, wenn ich nicht irre, überhaupt die moderne Entwickelung der reinen Mathematik vornehmlich *unter dem Zeichen der Zahl* geschieht: Dedekinds und Weierstrass' Definitionen der arithmetischen Grundbegriffe und Cantors allgemeine Zahlgebilde führen zu einer *Arithmetisierung der Funktionentheorie* [d. h. Analysis] und dienen zur Durchführung des Prinzips, daß auch in der Funktionentheorie eine Tatsache erst dann als bewiesen gilt, wenn sie in letzter Instanz auf Beziehungen für ganze rationale Zahlen zurückgeführt worden ist. Die *Arithmetisierung der Geometrie* vollzieht sich durch die modernen Untersuchungen über Nicht-Euklidische Geometrie, in denen es sich um einen streng logischen Aufbau derselben und um die möglichst direkte und völlig einwandfreie Einführung der Zahl in die Geometrie handelt» (S. 66; Hervorhebungen im Original).

Mit dem Terminus nicht-euklidisch meint HILBERT hier nicht nur die BÓLYAI–LOBAČEVSKIJsche hyperbolische Geometrie, andererseits aber auch nicht die RIEMANNsche. Wir wissen, mit welcher Fragestellung er sich während der Abfassung des Zahlberichts befasst hat. Es gibt einen Brief an FELIX KLEIN vom 14. 8. 1894, den dieser in den *Mathematischen Annalen* 46 abdruckte und der auch in den verschiedenen Auflagen von HILBERTS *Grundlagen der Geometrie* als Anhang I erhalten geblieben ist. HILBERT verallgemeinert das Modell der hyperbolischen Geometrie, indem er von einem beliebigen konvexen Körper K im Raum oder einem konvexen Gebiet in der Ebene ausgeht und den Abstand zweier im Innern gelegenen Punkte A, B durch den Logarithmus des Doppelverhältnisses aus A, B und den Schnittpunkten der Verbindungsgeraden mit dem Rand von K definiert. Er zeigt, dass die Gerade die kürzeste Verbindungslinie zwischen je zweien ihrer Punkte ist. Offenbar gilt in allen diesen Geometrien das Parallelenaxiom nicht.

Wichtiger ist aber, dass HILBERT eine axiomatische Kennzeichnung dieser Geometrien angibt, und mit dieser beginnt der Brief sogar. Er nimmt Punkte, Geraden und Ebenen als Elemente, schreibt Verknüpfungsaxiome auf und Axiome für die Zwischenbeziehung von Punkten auf einer Geraden sowie ein Stetigkeitsaxiom. Und dann behauptet er folgenden Satz: «Jedem Punkte kann man drei endliche reelle Zahlen x, y, z und jeder Ebene eine lineare Relation zwischen diesen drei Zahlen x, y, z zuordnen, derart, daß alle Punkte, für welche die drei Zahlen x, y, z die lineare Relation erfüllen, in der betreffenden Ebene liegen ...» Dann deutet er die x, y, z als Koordinaten im $\mathbb{R}^3$ und erhält: «Unser ursprünglicher Raum ist mithin auf das Innere eines nirgends konkaven Körpers des Euklidischen Raumes abgebildet.»

Das Programm der Arithmetisierung der Geometrie, welches im Zahlbericht angesprochen ist, bedeutet folglich: Man stelle Axiomensysteme für Punkte, Geraden, Ebenen auf, aus denen sich eine reelle Koordinatendarstellung für die damit gegebene Geometrie ergibt. Das Vorwort zum Zahlbericht, aus welchem wir zitiert haben, hat HILBERT am 10. April 1897 abgeschlossen.

In den nun folgenden beiden Jahren tritt bei HILBERT ein grundlegender Wandel ein, der offenkundig wird in seiner Festschrift über die Grundlagen der Geometrie, verfasst 1899 anlässlich der Enthüllung des GAUSS–WEBER-Denkmals in Göttingen. Hier beginnt die Mathematik des 20. Jahrhunderts, ontologisch und methodologisch. HILBERTS Buch *Grundlagen der Geometrie*, immer wieder aufgelegt und mit neuen Anhängen versehen, sollte ein klassischer Bestseller für ein ganzes Jahrhundert werden. Die axiomatische Methode wird begründet, die Gegenstände der Mathematik sind nur noch Mengen und sonst nichts. (HILBERT spricht, wie DEDEKIND, zunächst noch von Systemen.) Die «Arithmetisierung» der Geometrie, die Einführung von reellen Zahlen als Koordinaten, ist nur noch ein Nebenthema. Schon 1900 erscheint im *Jahresbericht der DMV* 8 HILBERTS Aufsatz «Über den Zahlbegriff», in dem auch die (reellen) Zahlen axiomatisch untersucht werden. Die Zahlen haben für HILBERT ihre ontologische Sonderrolle verloren. Der Aufsatz wird als Anhang VI in die *Grundlagen der Geometrie* aufgenommen.

Der von RIEMANN herausgestellte Unterschied zwischen Diskretem und Kontinuierlichem scheint sich in HILBERTS axiomatischer Auffassung zu verwischen. HILBERT bemerkt zu seiner Axiomatisierung der reellen Zahlen im Aufsatz über den Zahlbegriff auch ausdrücklich, dass seine beiden Axiome der Stetigkeit «keine Aussage über den Begriff der Konvergenz oder über die Existenz der Grenze» enthalten. HILBERT kennzeichnet $\mathbb{R}$ (natürlich bis auf Isomorphie) als den grössten archimedisch angeordneten Körper. Beim Mannigfaltigkeitsbegriff, wie er für die RIEMANNschen Flächen der Funktionentheorie und die Räume der Differentialgeometrie erforderlich ist, braucht man dann doch mengentheoretisch-topologische

Begriffsbildungen. Diskrete Strukturen und topologische Strukturen unterscheiden sich dadurch, dass in letzteren Mengen von Teilmengen (z. B. als offene) auszuzeichnen sind. Aber in jedem Fall ist die der Struktur zugrundeliegende «Mannigfaltigkeit» eine als gegeben gedachte Menge von Individuen. Die Menge der ausgezeichneten Teilmengen sorgt für den Ersatz des alten Kontinuumbegriffs.

Der Übergang von der Arithmetisierung zur Axiomatisierung beschränkte sich bei HILBERT nicht auf die Geometrie. Unter seinem Einfluss setzte dieser Prozess auch in der Analysis ein, und wir knüpfen an die grundsätzlichen Überlegungen aus Kapitel 2 an, besonders Abschnitt 2.1.3, sowie an den Misserfolg des RIEMANNschen Programms, für die Darstellbarkeit von Funktionen durch trigonometrische Reihen eine begriffliche Charakterisierung zu finden.

In 2.4.2 haben wir die Überwindung der Arithmetisierung des Funktionsbegriffs durch die Funktionalanalysis kurz gestreift. Der HILBERT-Raum mag uns als Prototyp für diese Entwicklung dienen. Nehmen wir etwa den Raum $L^2[0, 1]$, den wir so beschreiben können: Wir gehen aus von einer Menge von Funktionen f, die auf $0 \leqq x \leqq 1$ definiert sind und für die $\int f$ und $\int f^2$ existieren: man denke an die Menge der stetigen Funktionen oder einfacher an die Menge der beschränkten Treppenfunktionen oder auch an die Polynome oder die trigonometrischen Polynome zur Periode 1. Führt man als Norm Wurzel aus $\int f^2$ ein und komplettiert den entstandenen metrischen Raum, so erhält man in jedem Falle $L^2[0, 1]$. Im Anfangsstadium war man noch daran interessiert, die Elemente dieses Raumes als Funktionen zu deuten, und das leistete 1907 der Darstellungssatz von FISCHER und RIESZ mit quadratisch im Sinne von LEBESGUE integrierbaren Funktionen. Aber tatsächlich ist diese Darstellung weder für die Analysis noch für die physikalischen Anwendungen von Belang. Man geht mit dem axiomatisch zu behandelnden HILBERT-Raum um, und man ist zufrieden, dass die brauchbaren Funktionen – etwa die stückweise stetigen – enthalten sind.

In dieser Auffassung erscheinen auch die Überlegungen zum Integralbegriff (RIEMANN, LEBESGUE) nachträglich ebenso überflüssig wie RIEMANNS Programm für die wertmässige Darstellung von Funktionen durch (trigonometrische) Reihen. Für die spezielle Funktionenmenge, die am Anfang stand, ist die Integration offensichtlich, und man kann je nach Geschmack vorgehen: Für die stetigen Funktionen, die der Analytiker bevorzugt, hat man CAUCHYS Integralbegriff, für die Treppenfunktionen ist das Integral geometrisch klar, und für die Polynome kommt man algebraisch durch. Das lineare Funktional $\int f$ lässt sich auf den Raum L^2 fortsetzen, in welchem die speziellen integrierbaren Funktionen eine dichte Teilmenge bilden. So denkt heute der erwachsene Mathematiker, doch muten wir unseren Studenten den historisch bedingten Umweg weiter zu.

Die Räume der Funktionalanalysis sind Beispiele für stetige Mannigfaltigkeiten im Sinne von RIEMANNS Habilitationsvortrag, in welchem er bereits Funktionenmannigfaltigkeiten ansprach. Die Analysis des 20. Jahrhunderts hat die Fruchtbarkeit dieser Begriffsbildung gezeigt, und die punktweise Diskussion von Funktionsdarstellungen aus der von RIEMANN selbst nicht weiter verfolgten Habilitationsschrift hat sich demgegenüber als weit weniger brauchbar erwiesen.

4.5.3 *Die Rolle* GEORG CANTORs

Der Leser mag sich gewundert haben, dass der Name des als Erfinder der Mengenlehre gefeierten GEORG CANTOR (1845–1918) bisher fehlte. Tatsächlich ist er für unseren Gegenstand von weit geringerer Bedeutung als DEDEKIND und HILBERT, wie die vorangehenden beiden Abschnitte deutlich gemacht haben dürften. Übrigens hat DEDEKIND die Mengen*denkweise* schon vor CANTOR entwickelt, und zwar vor allem so, dass er in konkret vorgegebenen Systemen (rationale Zahlen, algebraische Zahlen- und Funktionenkörper) Teilsysteme mit bestimmten Eigenschaften bildete (Schnitte, Ideale) und mit den Mengenoperationen (Vereinigung, Durchschnitt) umging. DEDEKIND sieht Mengen primär unter dem Aspekt ihrer Brauchbarkeit; in seinem Aufsatz von 1872 betont er, dass er schon seit längerem im Besitz seiner Theorie gewesen sei, eine Publikation aber unterlassen habe, weil die Sache «so wenig fruchtbar» sei. Erst die Publikation der Theorien von Irrationalzahlen durch HEINE und danach durch CANTOR habe ihn zur Veröffentlichung seiner Überlegungen veranlasst. HILBERT geht dann von eigenschaftslosen unstrukturierten Mengen aus und prägt ihnen Strukturen auf. Im zeitweise freundschaftlichen Verhältnis von DEDEKIND und CANTOR hat der letztere wohl mehr empfangen als gegeben, sicherlich Ermutigung und Anregung. Von HILBERT kam öffentliche Anerkennung für CANTOR. Auch bei ihm spielt aber mehr die Denkweise in Mengen eine Rolle als der konkrete Inhalt der CANTORschen *transfiniten* Mengenlehre.

Mit RIEMANN ist CANTOR in zweierlei Hinsicht verbunden. CANTOR war durch offene Fragen aus RIEMANNS Habilitationsschrift zu seiner Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten gekommen (Abschnitt 2.5); und wie RIEMANN hatte CANTOR ein tiefes Interesse an der Philosophie, welches seine mathematischen Arbeiten stark beeinflusste.

Ab etwa 1960 wurde der Name CANTORS auch ausserhalb der Mathematik populär, im Zusammenhang mit dem Eindringen der sogenannten Mengenlehre in den Schulunterricht. Wenn dabei auch ein historisches Missverständnis eine Rolle spielte und diese Entwicklung eher aus einer Linie DEDEKIND–HILBERT–BOURBAKI zu begründen war, so hat das Interesse an der Mathematikgeschichte dadurch eine Förderung erfahren. Es entstanden hervorragende Bücher zu CANTOR, von MESCHKOWSKI, DAUBEN 1979,

Abb. 37: GEORG CANTOR

PURKERT und ILGAUDS 1987, auf die wir hier verweisen können. Eine gewisse Rolle für das allgemeine Interesse an CANTOR mag spielen, dass bei naiver Auffassung CANTORS Philosophie der Mathematik auch dem Laien ohne grössere Mühe einleuchtend nahezubringen ist.

CANTOR selbst war keineswegs naiv. Er hat sich mit den philosophischen Traditionen gründlich auseinandergesetzt und war sich darüber im klaren, dass sein Bekenntnis zur aktualen Existenz des Unendlichen mit vielen Traditionen radikal brach, insbesondere mit der an ARISTOTELES anknüpfenden. MESCHKOWSKI hält CANTOR für den «wohl letzten großen Vertreter des platonischen Denkens in der Mathematik», doch ist das sicherlich zu pauschal geurteilt (PURKERT–ILGAUDS 1987, 105 ff.). Zweifellos aber existierten die Gegenstände der Mathematik, für CANTOR die Mengen mit allen ihnen zugeschriebenen Eigenschaften, in einer Welt für sich, einem quasi-platonischen Ideenhimmel. In einer vermutlich aus dem Jahre 1913 stammenden Notiz CANTORS heisst es: «Metaphysik ist, wie ich sie auffasse, die Lehre vom *Seienden*, oder was dasselbe bedeutet von dem was *da* ist, d. h. existirt, also von der Welt wie sie an sich ist, nicht wie sie uns erscheint. Alles was wir mit den Sinnen wahrnehmen und mit unserem abstracten Denken uns vorstellen ist *Nichtseiendes* und damit höchstens eine Spur des an sich Seienden» (zitiert nach PURKERT und ILGAUDS 1987, 198).

Die Mengenlehre mache Aussagen über die Welt an sich, über das wahre Sein, und sie gehörte für ihn «durchaus zur Metaphysik», also nach der zitierten Notiz zur Ontologie. Dementsprechend spricht er nie, anders als DEDEKIND, von einer Schöpfung von Zahlen oder mathematischen Dingen überhaupt. Für ihn entspricht der immanenten Realität im Ideenhimmel eine durch diese bestimmte transiente Realität der Dinge, welche wir entdecken können, aber nicht erst erschaffen müssen.

Es ist nun sehr merkwürdig, dass er das, was er seiner Mengenlehre zuspricht, nicht auch für anderes in der Mathematik gelten lässt. Aufschlussreich ist ein Brief an VERONESE vom 17. 11. 1890, der bei PURKERT und ILGAUDS 1987, 202 erstmals veröffentlicht ist: «Von *Hypothesen* ist in meinen arithmetischen Untersuchungen über das Endliche und Transfinite überall gar keine Rede, sondern nur von der Ergründung des Realen in der Natur Vorhandenen. – Sie hingegen glauben nach Art der Metageometer Riemann, Helmholtz und Genossen, Hypothesen *auch in der Arithmetik* aufstellen zu können, was ganz unmöglich ist ... So wenig sich in der Arithmetik der endlichen Anzahlen andere Grundgesetze aufstellen lassen, als die seit Alters her an den Zahlen 1, 2, 3, ... erkannten, ebenso wenig ist eine Abweichung von den arithmetischen Grundwahrheiten im Gebiete des Transzendenten möglich.»

Die Anspielung auf RIEMANN als Metageometer ist zu vage, als dass wir sie kommentieren könnten. Hier kommt es uns darauf an, dass CANTOR seine transfinite Arithmetik als etwas Reales, in der Natur Vorhandenes auffasst. Was hat VERONESE eigentlich gemacht? Er ist um diese Zeit dabei, seine 1891 erscheinenden *Fondamenti di geometria* fertigzustellen, ein Buch, in dem nichtarchimedische Zahlsysteme für die Koordinaten der Geometrie auftreten. Sein Schüler LEVI-CIVITÀ hat das dann bald präzisiert und nichtarchimedische Körper klassifiziert, in Arbeiten, die dann von HANS HAHN in seiner Dissertation *Über die nichtarchimedischen Größensysteme*, Wien 1907, weitergeführt wurden und damit den Impuls für die Theorie der Ordnungsstrukturen in der modernen Algebra gaben. Inzwischen hatte auch HILBERT in den *Grundlagen der Geometrie* nichtarchimedische Körper behandelt. Bei VERONESE ist natürlich nicht die Rede von *Anzahlen*; es handelt sich um *Körperelemente*, welche grösser sind als die endlichen natürlichen Zahlen, und das lag ganz in der von DEDEKIND begonnenen und von HILBERT weitergeführten Hinwendung zur «modernen» Algebra. Das wollte CANTOR nicht sehen. Es zeigt sich, dass er die Mengenlehre nicht in dem Sinne auffasste, wie wir es in der Nachfolge von DEDEKIND und HILBERT tun.

CANTOR glaubte übrigens beweisen zu können, dass der Begriff der unendlich kleinen Grössen in sich widerspruchsvoll sei, ohne durch den Hinweis auf rationale Funktionenkörper eines andern belehrt werden zu können.

Zu VERONESE und LEVI-CIVITÀ sei auf LAUGWITZ 1986, 221/222 verwiesen, zu CANTOR und VERONESE auf DAUBEN 1979, 233 ff.

Mit HERBARTS Philosophie des Unendlichen war CANTOR nicht einverstanden und verspottete sie, da er auch dort eine Beschränkung auf das potentiell Unendliche sah (PURKERT–ILGAUDS 1987, 115/116). Vielmehr glaubte CANTOR, aus der Existenz eines potentiell Unendlichen auf die des Aktual-Unendlichen schliessen zu können: «Damit eine solche veränderliche Größe in einer mathematischen Betrachtung verwertbar sei, muß streng genommen das ‹Gebiet› ihrer Veränderlichkeit durch eine Definition vorher bekannt sein; dieses ‹Gebiet› kann aber nicht selbst wieder etwas Veränderliches sein ... also ist dieses ‹Gebiet› eine bestimmte aktual-unendliche Wertmenge» (PURKERT und ILGAUDS S. 115). CANTOR setzt mithin den Begriffs*umfang* vor den Begriffs*inhalt*, und das ist genau der springende Punkt. HERBART und RIEMANN stehen in einer Tradition, welche es vorzieht, in Begriffen zu denken, und die sich nicht dem Zwang ausgesetzt fühlt, die «Menge» aller unter den Begriff fallenden Objekte aktual zu bilden.

4.5.4 *Die Berliner Tradition*

Am 1. Juli 1852 hält DIRICHLET vor der Berliner Akademie die Gedächtnisrede auf seinen am 18. Februar 1851 verstorbenen Kollegen und Freund CARL GUSTAV JACOBI und sagt: «Wenn es die immer mehr hervortretende Tendenz in der neueren Analysis ist, Gedanken an die Stelle der Rechnung zu setzen, so giebt es doch gewisse Gebiete, in denen die Rechnung ihr Recht behält. Jacobi, der jene Tendenz so wesentlich gefördert hat, leistete vermöge seiner Meisterschaft in der Technik auch in diesem Gebiete Bewunderungswürdiges» (in: JACOBI, *Ges. Werke* I, 21).

DIRICHLET sieht hier die eigene Tendenz als die allgemeine Richtung der Entwicklung der Analysis und erkennt an, dass JACOBI nicht nur ein Meister des Kalküls war, sondern sich auch zur neueren Strömung bekannte. Doch ist der Student RIEMANN in seinen Berliner Jahren mehr von DIRICHLET als von JACOBI in seiner eigenen Neigung zum begrifflichen Denken bestärkt worden.

Die Jahrzehnte nach DIRICHLETS Weggang im Jahre 1855 bringen in Berlin eine Verstärkung der alten Tradition. Zunächst wird ERNST-EDUARD KUMMER (1810–1893) aus Breslau in die Hauptstadt berufen, dann wird sein Gymnasialschüler und späterer lebenslanger Freund LEOPOLD KRONECKER (1823–1891) Akademiemitglied – er hält ab 1861 regelmässig Vorlesungen an der Universität –, und KARL WEIERSTRASS (1815–1897) wird 1856 an die Akademie berufen und lehrt sogleich in Berlin, wenn auch erst ab 1864 als Ordinarius. Dieses Triumvirat aus hervorragenden Mathematikern richtet zum ersten Male an einer deutschen Universität einen regelmässigen mathematischen Lehrbetrieb von hohem Niveau ein. Es setzt ein reger Zustrom von Studenten ein, und die Berliner Mathematik gewinnt grössten Einfluss im In- und Ausland.

Bei allen Unterschieden im Einzelnen haben die drei einflussreichen Wissenschaftler eines gemein: Ihre Auffassung von der Mathematik knüpft mehr an JACOBI und EISENSTEIN an als an DIRICHLET, und während sie die Ergebnisse von RIEMANN und DEDEKIND anerkennen, bleiben ihnen deren Methoden suspekt. Man zieht es vor, «die Beweise durch Rechnung zu zwingen», um HILBERTS Redewendung zu wiederholen. Und entsprechend ist die ablehnende oder zumindest abwartende Haltung zur Veränderung in der Ontologie der Mathematik.

Die mathematische Atmosphäre in Berlin um 1860 beschreibt LEO KOENIGSBERGER (1837–1921) in seinem Buch *Mein Leben* (Heidelberg 1919; bes. S. 21–57). Er hatte in Berlin ab 1857 studiert und kam unter WEIERSTRASS' Anleitung rasch voran, so dass er schon 1864 auf ein Extraordinariat in Greifswald berufen wurde. Auf S. 54 lesen wir: «Auch wir jüngeren Mathematiker hatten damals sämtlich das Gefühl, als ob die Riemannschen Anschauungen und Methoden nicht mehr der strengen Mathematik der Euler, Lagrange, Gauß, Jacobi, Dirichlet u. a. angehörten...» – Eine fundierte, ausführliche Darstellung ist K. BIERMANN 1988.

Das Verhältnis der Mathematik KUMMERS zu der RIEMANNS haben wir am Beispiel der hypergeometrischen Funktionen in Abschnitt 1.3.1 kennengelernt. KUMMER war in allen seinen Arbeitsgebieten, Analysis, Zahlentheorie und schliesslich auch Geometrie, der «Algorithmiker» par excellence, ohne viel Aufhebens von seiner Auffassung von der Mathematik zu machen. Anders war es mit KRONECKER, dessen Ausspruch, dass Gott die ganzen Zahlen gemacht habe, alles andere aber Menschenwerk sei, heute bekannter ist als sein mathematisches Werk. Die Propaganda der WEIERSTRASS-Schüler hat bewirkt, KRONECKER als streitsüchtigen Neuerungsfeind erscheinen zu lassen, ein Zerrbild, welches H. EDWARDS in gründlichen Publikationen korrigiert hat (u. a. EDWARDS in ROWE–MCCLEARY 1989, I. 67–78).

Wir finden KRONECKERS Auffassung klar ausgedrückt in seinem Brief an G. CANTOR vom 21. 8. 1884 (MESCHKOWSKI und NILSON 1991, 196): «... dass ich, sehr früh unter Kummers Anleitung in philosophische Studien vertieft, nachher gleich ihm die Unsicherheit aller jener Spekulationen erkannt und mich in den sicheren Hafen der wirklichen Mathematik geflüchtet habe. Was war natürlicher, als dass ich in dieser Mathematik selbst nun mich bemüht habe, ihre Erscheinungen oder ihre Wahrheiten möglichst frei von jeden philosophischen Begriffsbildungen zu erkennen. Ich bin deshalb darauf ausgegangen, Alles in der reinen Mathematik auf die Lehre von den ganzen Zahlen zurückzuführen, und ich *glaube*, dass dies durchweg ge-

Abb. 38: LEOPOLD KRONECKER

lingen wird. Indessen ist dies eben nur mein *Glaube*. Aber wo es gelungen ist, sehe ich darin einen wahren Fortschritt, obwohl – oder weil – es ein Rückschritt zum Einfachsten ist, noch mehr aber deshalb, weil es denn beweist, dass die neuen Begriffsbildungen nicht *nothwendig* sind …

Dass ich jene Einwendungen nur gelegentlich machen will, beruht darauf, dass ich denselben nur einen höchst secundären Werth beilege. Einen wahren wissenschaftlichen Werth erkenne ich – auf dem Felde der *Mathematik* – nur in concreten mathematischen Wahrheiten, oder schärfer ausgedrückt, ‹nur in mathematischen Formeln›. Diese allein sind, wie die Geschichte der Mathematik zeigt, das Unvergängliche. Die verschiedenen Theorien für die Grundlagen der Mathematik (so die von Lagrange) sind von der Zeit weggeweht, aber die Lagrangesche Resolvente ist geblieben!» (Hervorhebungen im Original).

Das liest sich ganz ähnlich wie DEDEKINDS Bemerkung von 1888, dass jeder Satz der Mathematik sich als ein solcher über ganze Zahlen aussprechen lasse, wie auch schon DIRICHLET geäussert habe. Aber diese beiden gestatten sich *Begriffsbildungen* auf der Basis der ganzen Zahlen, und das kann KRONECKER nur als unnötige philosophische Spekulation ablehnen. Es bleibt ein bis heute unüberbrückbarer Gegensatz, und wir erinnern uns an SIEGELS Brief an A. WEIL.

DEDEKIND kann es sich leisten, unbeirrt von KRONECKERS ontologi-

schen und methodologischen Vorschriften weiterzuarbeiten.[1] Bei CANTOR trifft KRONECKER den Lebensnerv.

Der Berliner Kollege WEIERSTRASS war gar nicht weit von KRONECKERS Ansichten entfernt, auch für ihn war die formelmässige Darstellung das, was in der Mathematik von bleibendem Wert ist. Auf dem Höhepunkt der Kontroverse mit KRONECKER sind die Vorlesungen WEIERSTRASS 1886 entstanden, die möglicherweise seine letzten hätten sein können und die testamentarischen Charakter haben. WEIERSTRASS (1886, 176) fasst zusammen: «Der Zweck der Vorlesungen war zunächst, den Begriff der analytischen Abhängigkeit gehörig festzustellen; daran knüpfte sich die Aufgabe, die analytischen Formen zu ermitteln, in denen Funktionen von bestimmten Eigenschaften dargestellt werden können … denn die Darstellung einer Funktion ist mit der Erforschung ihrer Eigenschaften aufs innigste verknüpft, wenn es auch interessant und nützlich sein mag, Eigenschaften der Funktion aufzufinden, ohne auf ihre Darstellung Rücksicht zu nehmen. Das *letzte* Ziel bildet immer die Darstellung einer Funktion» (dazu LAUGWITZ 1992).

Einen Hauptinhalt der Vorlesungen bildet der im Jahr vorher gefundene berühmte Approximationssatz, den WEIERSTRASS als Darstellungssatz auffasst: Jede auf einem abgeschlossenen Intervall stetige reelle Funktion ist als gleichmässig konvergente Reihe von Polynomen mit rationalen Koeffizienten darstellbar. Das nennt er einen *arithmetischen Ausdruck*. Diese Arithmetisierung der Analysis konnte KRONECKER selbstverständlich nicht zufriedenstellen, und die seitdem ein volles Jahrhundert andauernden Versuche des Intuitionismus, Konstruktivismus und Operationalismus, einen für Anfänger lehrbaren Aufbau der Analysis im Sinne KRONECKERS zu gewinnen, zeigen, welche Sisyphusarbeit sich WEIERSTRASS vorgenommen hatte. Die Äquivalenz der Begriffe der Stetigkeit und des arithmetischen Ausdrucks, an die RIEMANN zu Beginn seiner Doktorarbeit noch glaubte, wäre zwar hergestellt, aber nutzlos: Zum Beweis etwa des Zwischenwertsatzes taugt nur der Begriff, nicht der Ausdruck, was schon BOLZANO und CAUCHY erkannt hatten, als sie den Satz nicht für Polynomausdrücke, sondern aus dem Begriff der Stetigkeit bewiesen. Der ontologische Scheinsieg der Formelausdrücke konnte deren methodologische Niederlage nicht abwenden.

4.6 Schlussbemerkungen

Wir haben versucht, den Gang der historischen Entwicklung in den einzelnen Arbeitsgebieten RIEMANNS zu verfolgen und seine innovativen Beiträge

1 Aufschlüsse über DEDEKINDS Ansichten finden sich besonders in: H. EDWARDS, O. NEUMANN, W. PURKERT, «Dedekinds ‹Bunte Bemerkungen› zu Kroneckers ‹Grundlagen›,» *Archive for History of Exact Sciences* 27 (1982), 49–85.

herauszustellen. Dabei haben wir uns bemüht, die Einflüsse aufzuspüren, welche RIEMANN empfangen hat, und die Wirkungen, welche seine Arbeiten auf andere ausübten. Das nun verfügbare Material soll uns dazu dienen, eine Gesamtschau von RIEMANNS Auffassung der Mathematik und der Wissenschaft überhaupt zu gewinnen. Als tragendes Fundament hat sich der Begriff der stetigen Mannigfaltigkeit erwiesen, von dem wir feststellen können, dass er das gesamte wissenschaftliche Denken RIEMANNS prägt.

Als Leitfaden für eine zusammenfassende Übersicht und ein tieferes Verständnis bietet sich das von RIEMANN selbst aufgeschriebene Schema von Thesis *(T)* und Antithesis *(A)* an (W. 518–520; vgl. auch Abschnitt 4.4.3).

Zur Thesis gehört für RIEMANN «Endliches, Vorstellbares», zur Antithesis dementsprechend «Unendliches»; das wird ergänzt nicht etwa durch Unvorstellbares, sondern durch den Zusatz «Begriffssysteme, welche an der Grenze des Vorstellbaren liegen». Es soll nachgewiesen werden, dass RIEMANN überall versucht, die Wissenschaft von dem Pol der Antithesis her aufzufassen. In dieser wissenschaftlichen Grundhaltung unterscheidet er sich von der grossen Mehrheit der Mathematiker, und mit FREUDENTHAL kann man ihn wegen der Durchführung dieses Programms als einen Philosophen ansehen.

Unter den Zeitgenossen RIEMANNS wird die Gegenposition am klarsten von KRONECKER vertreten, der als «wirkliche Mathematik» nur das Endliche gelten lassen will, verkörpert in den natürlichen Zahlen, und der die Mathematik von der Unsicherheit philosophischer Begriffsbildungen und Spekulationen freihalten will. Wir erinnern an seinen in Abschnitt 4.5.4 wiedergegebenen Brief an CANTOR.

RIEMANN notiert zunächst, sich offensichtlich auf die Physik beziehend, zu *(T)*: «Endliche Zeit- und Raumelemente», zu *(A)*: «Stetiges». In der Physik entscheidet sich RIEMANN für *(A)*, für die stetigen Mannigfaltigkeiten und für die Felder als die physikalischen Grössen. Das ist das Begriffssystem für seine Physik. Es ist der Vorstellbarkeit nicht völlig unzugänglich, bedarf aber nicht nur des Endlichen und ist von diesem her nur als Grenze anzunähern. Er entscheidet sich gegen die Fernwirkung, will aber als Modell der Nahewirkung nicht Druck und Stoss von Partikeln annehmen, sondern differentielle Gesetze, welche die Wechselwirkung der Felder an infinitesimal benachbarten Raumstellen beschreiben. Diese Auffassung sieht er als auch empirisch gesichert an. Für sie spricht nicht nur die mathematische Physik der Pariser Wissenschaftler und seines Lehrers GAUSS, sondern auch, dass NEWTONS Gravitationsgesetz hier eingeordnet werden kann: r^{-1} ist Grundlösung der Potentialdifferentialgleichung.

Von der Mathematik ist in RIEMANNS Notiz nicht die Rede, und wir wollen versuchen, die Überlegungen analog auf sie auszudehnen. Das ist legitim, denn für RIEMANN besteht ein Zusammenhang im Sein wie im

Denken, und es ist plausibel, dass Mathematik, welche sich in einer von Grund auf durchdachten Physik als fruchtbar erwiesen hat, auch unabhängig von der Physik gehaltvoll ist.

In der Mathematik soll die folgende Liste von Paaren (T_n, A_n) für $n = 1, \ldots, 10$ näher betrachtet werden:

(1) Endlich – Unendlich
(2) Diskret – Kontinuierlich
(3) Formel (Term, Ausdruck, Figur) – Begriff
(4) Kalkül (regelhafte Termumformung) – begrifflicher Beweis
(5) Zahl – Variable
(6) Epsilontik – Infinitesimalargumentation
(7) Konstruktion – Spekulation
(8) Quantität – Qualität
(9) Starrheit – Flexibilität
(10) Reine Mathematik – Mathematik in der Naturlehre

In diesem Schema sollen die beiden Seiten nicht als gleichartig angesehen werden, und es erscheint sinnlos, eine Synthesis durch eine Art Mittelbildung oder Kompromiss zu suchen, wie etwa verschiedene Stufen des Grün zwischen Blau und Gelb liegend vorzustellen wären. Die Pole der Antithesis bezeichnen vielmehr regulative Prinzipien, an denen sich das Denken (zumal bei RIEMANN) orientiert, wenn es sich mit den ihm primär zugänglichen Polen der Thesis (der «wirklichen Mathematik» KRONECKERS) nicht zufriedengeben will. In der philosophischen Tradition spricht man von Möglichkeit *(potentia)* und Wirklichkeit *(actus)*, und das entspricht den Polen der Antithesis und der Thesis. Die Denkstile in der Mathematik unterscheiden sich in dem Masse des Einflusses, den die Pole der Antithesis auf sie ausüben. So wie die Entwicklung der Physik im Spannungsverhältnis von Partikelvorstellung und Feldauffassung verläuft, so zeigt auch die Geschichte der Mathematik eine ständige Bewegung zwischen den für unser Denken unvereinbar scheinenden Polen der Thesis und der Antithesis. *Riemanns Werk ist gekennzeichnet von dem Bestreben, den Polen der Antithesis möglichst nahe zu kommen.*

Hingegen blieb die Mathematik von der Antike bis in die Mitte des 17. Jahrhunderts, soweit sie einflussreich und fruchtbar wurde, nahe an den Polen der Thesis, und das gilt auch für EULER als Mathematiker, für LAGRANGE, für GAUSS in Zahlentheorie und nichteuklidischer Geometrie, für CAUCHY in der Algebra, für JACOBI, KUMMER, KRONECKER, WEIERSTRASS, SIEGEL. Den Gegenpolen versuchten näher zu kommen EULER als Physiker, FOURIER, CAUCHY in der Analysis, GAUSS in der Differentialgeometrie und Physik, HERMANN WEYL. Wie EULER, GAUSS und CAUCHY lassen sich andere grosse Mathematiker wie NEWTON, LEIBNIZ, DEDEKIND, POINCARÉ und HILBERT nicht ohne gründlichere Analyse eindeutig in dem Schema lokalisieren. Man sollte uns auch nicht dahin verstehen, dass Mathematiker, die der Seite der Thesis zugerechnet werden müssen, nicht von den Methoden und Resultaten etwa der Infinitesimalanalysis in der Zahlentheorie Gebrauch machen könnten; man denke an SIEGEL.

Die zehn Paare unseres Schemas sind nicht streng voneinander getrennt. Enger zusammen gehören (1) bis (4), dann (5) und (6), (7) bis (9). Weitere Verwandtschaften wie zwischen (2) und (5) sind leicht zu erkennen. Wir werden uns bei den Erläuterungen nicht genau an die angegebene Reihenfolge halten können.

Beginnen wir mit der Gruppe (1) bis (4) und mit der ersten Feststellung, dass Mathematik niemals ausschliesslich mit dem Endlichen zufrieden war. Zumindest der Möglichkeit nach, potentiell, spielte das Unendliche bei den Zahlen und den geometrischen Konstruktionen in der griechischen Mathematik herein: Man kann immer weiter zählen, man kann Konstruktionen immer weiter ausführen. Man brauchte dabei nicht an eine aktual fertige Gesamtheit von natürlichen Zahlen oder von konstruierbaren Punkten einer Ebene zu denken.

In RIEMANNS Mathematik spielt die Unterscheidung (1) keine Rolle, und zu (2) gilt, dass er nur den stetigen Mannigfaltigkeiten Aufmerksamkeit schenkt, nicht aber den diskreten. Wir wollen uns ihm teilweise anschliessen und vom Endlichen im folgenden absehen, nicht aber vom Diskreten. Ohne dieses wäre es kaum möglich, RIEMANN in Relation zu anderen zu sehen.

Der neuzeitliche Ansatz, mit dem mathematisch umzugehen, was RIEMANN stetige Mannigfaltigkeit nennt, heisst Analysis seit L'HÔPITALS erstem Lehrbuch dazu, der *Analyse des infiniment petits* von 1696. Gemeint war der Terminus zunächst im Sinne von Problemlösung, er hat dann aber eine Verschiebung zur Bedeutung wie im heutigen Gebrauch erfahren. Bei dem einen der Begründer dieser Analysis, G. W. LEIBNIZ, finden sich gründliche Überlegungen, mit denen wir unser Schema erläutern können. Die einschlägigen Schriften sind heute in einer zweisprachigen Ausgabe zugänglich: G. W. LEIBNIZ, *Schriften zur Logik und zur philosophischen Grundlegung von Mathematik und Naturwissenschaft*, Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt 1992. Es empfiehlt sich allerdings, die deutsche Übersetzung des Herausgebers H. HERRING an dem synoptisch wiedergegebenen Originaltext im Einzelfall kritisch zu überprüfen. Wir zitieren diese Ausgabe mit L.

In RIEMANNS Schriften taucht der Name LEIBNIZ mehrfach in den Überlegungen zur Topologie auf, zur *Analysis situs*; LEIBNIZ selbst verwendet auch *Geometria situs*, doch war «Geometrie der Lage» im 19. Jahrhundert schon von der projektiven Geometrie besetzt worden. NOETHER hat im Nachlassband von 1902 bemerkt (N. 710), dass in Göttingen einige Bogen mit historisch-literarischen Anmerkungen RIEMANNS über LEIBNIZ aufbewahrt wurden, und man kann schliessen, dass NOETHER keine Notizen zu Inhalten vorfand. Wenn RIEMANN sich Notizen der genannten Art gemacht hat, ist anzunehmen, dass ihm LEIBNIZsche Schriften zugänglich waren. Die Ausgabe der Mathematischen Schriften von LEIBNIZ durch GERHARDT erschien ab 1849, und wichtige Schriften u. a. zum Kontinuitätsprinzip, so der Brief an VARIGNON vom 2. 2. 1702, waren schon in älteren Ausgaben greifbar. E. NEUENSCHWANDER hat uns auf Anfrage aus dem von ihm verfertigten Leihverzeichnis der Universitätsbibliothek keine Angaben zu LEIBNIZ mitteilen können.

Jedenfalls ist eine Affinität von RIEMANN zu LEIBNIZ festzustellen. Für beide ist, entsprechend alter philosophischer Tradition (ARISTOTELES), das Kontinuum, die stetige Mannigfaltigkeit, nicht als eine Kollektion von Individuen oder Punkten zu denken, und das Kontinuierliche hat Vorrang vor dem Diskreten, das begriffliche Denken kommt vor dem Kalkül. LEIBNIZ hat sich sehr wohl um Diskretes bemüht und erfolgreich Kalküle entwickelt (*Characteristica universalis*, Differentialkalkül). Sie beziehen jedoch ihre Berechtigung aus begrifflichen Prinzipien. Zu RIEMANNS Zeit waren Kalküle so weit entwickelt, dass er sich dann eher um ihre Zurückweisung in angemessene Schranken bemühen und das Denken in Begriffen wieder mehr in den Vordergrund bringen wollte.

Wie für RIEMANN gehören auch für LEIBNIZ Mathematik und Physik eng zusammen. Für LEIBNIZ ist sein Kontinuitätsprinzip nicht nur für Mathematik und Logik und für die Ordnung des Denkens und Erkennens grundlegend, sondern es ist auch Grundgesetz der Weltordnung *(natura non facet saltus)*, Erkenntnisprinzipien sind Seinsprinzipien. Das drückt schon der Titel seiner Schrift zum Kontinuitätsprinzip von 1687 aus (L. 227 ff.): *Principium quoddam generale non in mathematicis tantum sed in physicis utile*, Ein allgemeines Prinzip, das nicht nur in der Mathematik, sondern auch in der Physik von Nutzen ist.

Zu dieser Erörterung unserer Paare (1–4) gehört zur Konkretisierung das Paar (6). In 4.4.3 hatten wir gesehen, dass RIEMANN sich auf NEWTONS Grenzmethode beruft. Eine klare Darstellung hätte er auch in dem Brief LEIBNIZ' an VARIGNON vom 2. 2. 1702 (L. 249 ff.) finden können. Für LEIBNIZ gelten die Regeln des Endlichen im Unendlichen weiter, und zwar uneingeschränkt; RIEMANN setzt sich dagegen ab: Im Grenzfall verlieren einige der Korrelativbegriffe ihre Vorstellbarkeit (W. 520).

Den LEIBNIZschen Trick, die Ruhe als einen Spezialfall ihres Gegenteils anzusehen, als unendlich kleine Bewegung, die Koinzidenz als eine unendlich kleine Entfernung, die Gleichheit als Extremfall der Ungleichheit (L. 254–257), diesen Trick würde RIEMANN wohl nicht akzeptiert haben. So verwendet er Infinitesimalargumentationen zwar noch gelegentlich heuristisch und auch zur mehr informellen Mitteilung, sieht sie aber nicht für streng an. LEIBNIZ hat für Mathematiker, die so verfahren wie RIEMANN,

Abb. 39: GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ

durchaus Verständnis, und er will zeigen, dass man die mathematische Analyse nicht von metaphysischen Kontroversen abhängig zu machen braucht (L. 251). Die Epsilontik lässt sich als eine der Möglichkeiten auffassen, im Sinne von LEIBNIZ' Ausführungen die Infinitesimalien zu eliminieren. Die Regeln und Formeln des Differentialkalküls kann man nach LEIBNIZ so auffassen: Man kann statt unendlich kleiner Grössen beliebig kleine endliche Grössen einsetzen und damit einem Gegner, der uns widersprechen wollte, zeigen, dass der Fehler unserer Formeln stets kleiner ist als irgendein Fehler, den er uns angeben will (L. 253). Heute könnte man auch anders vorgehen, mit mathematischen Möglichkeiten, die auch RIEMANN noch nicht hatte. Man rechnet in einem Kalkül mit unendlich kleinen Zahlen, wie es die sogenannte Nichtstandard-Analysis ermöglicht hat. Im Endergebnis reduziert man alles modulo den unendlich kleinen Grössen. Dahinter steckt der Begriff des Homomorphismus. Er ermöglicht es, die Koinzidenz aus der unendlich kleinen Entferntheit in formal einwandfreier Weise herzustellen. Freilich darf man nicht meinen, das Kontinuum der Antithesis mit einem Zahlbegriff adäquat zu beschreiben, der neben den reellen auch noch unendlich kleine Zahlen bereitstellt, denn hier wird ja wieder wie bei $\mathbb{R}$ von einer *Zahlenmenge* gehandelt. Immerhin haben wir damit aber neue Modellvorstellungen, die näher an (A_6) herankommen.

RIEMANNS Tendenz, den Polen *(A)* möglichst nahe zu kommen, äussert sich in dem Bestreben, dieses Ziel mit den Mitteln der «wirklichen» Mathematik der Pole *(T)* zu erreichen. Wenn er sagt, in der Mathematik müsse man alles auf Gleichungen und Ungleichungen reduzieren, so enthält das im Keim den späteren, bei DEDEKIND explizit beginnenden

Ansatz, mit algebraischen und Ordnungsstrukturen auszukommen. In der von RIEMANN behandelten Mathematik reichen Anordnungsrelationen in der Tat auch aus zur Erfassung der topologischen oder Konvergenzstruktur. Angeordnete Körper, welche $\mathbb{R}$ umfassen, wären zwanglos im Schema unterzubringen, waren aber noch nicht entwickelt. DEDEKINDS «moderne» Algebra hätte auch in dieser Richtung Impulse geben können, doch richtete sich dessen Interesse einerseits auf die algebraischen Körpererweiterungen, andererseits galten ihm seine Schnitte als einzige Möglichkeit zur Herstellung eines synthetischen Kontinuums. Der Blick auf nicht-archimedische Strukturen blieb versperrt.

Zur Zeit von RIEMANN und unter seiner Mitwirkung erfolgt die auf Dauer wirksame Abkehr von den Infinitesimalien, zunächst wird aber die «stetige Variable» noch beibehalten, was DEDEKIND mit Recht beanstandet. Auch RIEMANN spricht in seinem Habilitationsvortrag noch vom stetigen Übergang von einer Bestimmungsweise eines Begriffs zu einer andern (W. 273), um dann abrupt und ohne weiteren Kommentar reelle Parameter für die stetigen Übergänge zu verwenden. H. WEYL hat dazu bemerkt, dass «das Kontinuum der reellen Zahlen nur ein einzelner, nicht besonders ausgezeichneter Fall» sei, und dass das Bestreben, die stetigen Mannigfaltigkeiten auf reelle Koordinaten zurückzuführen, «sachlich unberechtigt, aber zweckmäßig [sei] wegen der ... kalkulatorischen Bequemlichkeit des Zahlenkontinuums» (WEYL 1988, 8–9). Einen Versuch, die Infinitesimalgeometrie mit infinitesimalen Zahlen zu behandeln, findet man aber auch bei WEYL nicht.

Für den Raum der Physik spricht RIEMANN vom Unmessbarkleinen und Unmessbargrossen (W. 284), um dann im nächsten Abschnitt doch wieder die Redeweise vom Unendlichkleinen zu verwenden (W. 285), allerdings ganz im Sinne seiner Erörterung zu Thesis und Antithesis: Die

> «empirischen Begriffe, in welchen die räumlichen Massbestimmungen gegründet sind, der Begriff des festen Körpers und des Lichtstrahls, [scheinen] im Unendlichkleinen ihre Gültigkeit zu verlieren,»

und es wäre denkbar, dass man die Geometrie modifizieren müsste, wenn die einfachere Erklärung der Erscheinungen das erfordere. (Ansätze dazu hat man u. a. bei WHEELER.)

War die dann aber doch erfolgte Abkehr vom Unendlichkleinen als mathematischer Methode ein historischer Zufall, vielleicht der Unlust zu verdanken, diese Verfahren einmal sauber zu begründen, oder war diese Abkehr eine historische Notwendigkeit? Wir behaupten, dass es keine zwangsläufige Entwicklung war, dass es sich aber gerade bei RIEMANN auch nicht um eine nur emotionale oder zufällige Entscheidung handelte.

Kommen wir zunächst zur zweiten Behauptung, die sich auf RIEMANN bezieht. RIEMANNS Entscheidung lässt sich erklären aus seinem Denken in

Begriffen und dem Zurückdrängen der Formeln, hängt also wieder mit (3) zusammen. In der Mathematik der Formelausdrücke und regelhaften Umformungen war es nicht wichtig zu wissen, was ein Buchstabe a oder x bedeutete, eine reelle Zahl oder eine Infinitesimalzahl, eine Konstante oder eine Variable. (Übrigens verrät der von uns heute noch gebrauchte Ausdruck Konstante seine Herkunft aus einer Zeit, in der man die Zahlen in der Analysis als Spezialfälle der Funktionen ansah: Eine Variable *darf* auch konstant bleiben.) CAUCHY hatte sich schon gegen die «Allgemeinheit der Algebra» ausgesprochen, in der man Formeln für gültig ansah auch in Bereichen, für die sie zunächst nicht begründet waren (vgl. Abschnitt 4.2 der Einleitung). Er hatte dann aber doch mit den unendlich kleinen Grössen so gerechnet wie mit reellen Zahlen, $f(x+i)$ gebildet mit reellem x und unendlich kleinem i, so dass man ihm vorzuwerfen pflegt, er hätte doch nur an Funktionen gedacht, welche durch Ausdrücke gegeben sind. Das ist natürlich nicht zu widerlegen, denn wenn CAUCHY eine spezielle Funktion hinschreibt, dann gibt er selbstverständlich einen Ausdruck an. Seine Festlegung, i solle eine Variable mit Limes Null sein, wurde nicht mehr verstanden; doch hätte man mit dieser Festlegung auch im begrifflichen Rahmen der Funktionen als Abbildungen weiterarbeiten können.

Wir haben behauptet, dass die Elimination des Unendlichkleinen nicht zwangsläufig erfolgen musste. Die Wiederaufnahme der Infinitesimalmathematik, wie sie um 1960 stattfand, wäre auch schon ein Jahrhundert früher denkbar gewesen. Eine ihrer Voraussetzungen war jedoch, dass man den Formeln eine grundlegende Rolle zugestand, wozu RIEMANN nicht bereit war. Diese Voraussetzung sei kurz erläutert.

Der Grundgedanke der modernen Infinitesimalmathematik lässt sich so beschreiben (wir verweisen auf LAUGWITZ 1986 für genauere Ausführungen): Es sei $A(n)$ eine Formel, in welcher n eine freie Variable für natürliche Zahlen bezeichnet. Es sei Ω ein noch nicht verbrauchtes Zeichen, welches sich sogleich als Symbol für eine unendlich grosse Zahl herausstellen wird. Im Sinne des LEIBNIZschen Prinzips vereinbart man: Wenn $A(n)$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$ eine wahre Aussage der klassischen Mathematik ist, dann gilt $A(\Omega)$ als wahr. Da $A(n): n > 1000$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$ wahr ist, gilt $\Omega > 1000$, und man sieht sofort, dass Ω grösser ist als jede klassische natürliche Zahl, und dass $\omega = \Omega^{-1}$ positiv, aber kleiner als jede klassische positive reelle Zahl ist.

Selbstverständlich muss man präzisieren, was hier unter einer Formel zu verstehen ist, und RIEMANNS Abneigung gegen die Ausdrücke mag auch damit zu erklären sein, dass eine Präzisierung zu seiner Zeit nicht leicht möglich war. Heute können wir auch die Zeichen der mathematischen Logik als Bausteine für Formeln zulassen, und erst damit gelang A. ROBINSON ab 1960 eine befriedigende Infinitesimalmathematik. Im Gefolge der Cambridger Analytical Society wären solche Überlegungen um die Mitte des 19. Jahrhunderts durchaus zugänglich gewesen. Das Buch über formale Logik von A. DE MORGAN (1806–1871) war 1847 erschienen, und 1848 folgte *The mathematical analysis of Logic* von G. BOOLE (1815–1864).

Bildet man mit der unendlich kleinen Zahl $\omega = \Omega^{-1}$ Ausdrücke $B(\omega)$, so erhält man auch die bei CAUCHY auftretenden Variablen mit Limes 0, z. B. $\omega, \omega^2, \sqrt{\omega}, \sin\omega$.

Wir haben immer wieder gesehen, dass RIEMANN sich nicht gern auf CAUCHYS Mathematik einliess. Er konnte auch ohne die Variablen mit Limes 0 leben, und überhaupt verliert bei ihm die Variable als Grundbegriff der Analysis an Bedeutung. Von A_5, der Variablen, rückt RIEMANN ab. Er führt einen für die Analysis neuen Grundbegriff ein, den der Abbildung, die nun nicht mehr durch einen Ausdruck gegeben ist, sondern durch ihre begrifflichen Eigenschaften wie Stetigkeit, Ableitbarkeit. Mit den Variablen werden auch die speziellen unter ihnen eliminiert, nämlich die mit Limes 0, die unendlich kleinen Grössen.

Einer Autonomie sollte sich auch der Abbildungsbegriff nicht lange erfreuen, die Mengenlehre annektierte ihn mit der Festsetzung, eine Funktion sei ja nichts anderes als ihr Graph, also eine Menge, und der Name Abbildung wurde nebenbei gelten gelassen. In der Analysis bewirkte die Arithmetisierung, dass aus der Funktion $y = f(x)$, die man vollständig mit ihren Variablen aufzuschreiben hatte, die Menge $\{(x, f(x));\ x \in D \subseteq \mathbb{R}\}$ wurde. Der Leser wird aber aus eigener Erfahrung wissen, dass die Abbildungsauffassung fruchtbar ist.

Wir sagten, dass der Begriff der stetigen Mannigfaltigkeit für RIEMANN tragend ist. Wie verhält es sich aber mit seiner Schrift über die trigonometrischen Reihen? Sie ist ja die Quelle für die späteren Untersuchungen über besonders unstetige Funktionen geworden, und von LEIBNIZ und der Kontinuität ist da nicht mehr viel übrig geblieben. Und diese Reihen kamen ursprünglich aus der Natur, die doch nach LEIBNIZ keine Sprünge macht!

Die Infinitesimalmathematik des 20. Jahrhunderts hat das Kontinuitätsprinzip in verfeinerter Fassung wieder gerechtfertigt. Summiert man in einer trigonometrischen Reihe nicht bis ∞, sondern bis zu einer unendlich grossen oberen Grenze, so ist die Summenfunktion g wieder gleichmässig stetig in einem allgemeineren Sinne: Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ so, dass aus $|x - \hat{x}| < \delta$ folgt $|g(x) - g(\hat{x})| < \varepsilon$. Allerdings kann δ unendlich klein sein auch für endliches ε. Die Funktion ändert sich in einem unendlich kleinen Intervall möglicherweise um einen endlichen Zuwachs, ohne zu springen.

Das Thema können wir nicht erschöpfend behandeln. Hier mag die Bemerkung genügen, dass RIEMANN diese Arbeit wohl ausführte, um DIRICHLETS Wunsch zu erfüllen. Während der Zeit der Abfassung hat er sich nur zu gern in seine naturphilosophischen Überlegungen geflüchtet, die ihm ungleich wichtiger waren. Immerhin hat sein stets auf begriffliches Denken gerichtetes Bemühen uns auch hier wichtige Impulse gebracht, die in Kapitel 2 besprochen wurden. Möglicherweise hat die Arbeit, mit dem Prestige des Namens RIEMANN versehen, die Analysis auf Umwege geschickt, die ohne sie hätten vermieden werden können. Wurden doch bald nicht nur solche Mengen zugelassen, welche wie bei RIEMANN die Bestimmungsweisen eines Begriffs zu einem neuen Ganzen zusammenfassten. Die Mengen lösten sich von den Begriffen. RIEMANN hat für seine Person jedenfalls die Angelegenheit nicht weiter verfolgt.

Zu den Paaren (2) und (5) gehört die Primzahlarbeit. In ihr zeigt sich der Primat des Kontinuierlichen vor dem Diskreten, der Variablen vor der Zahl besonders deutlich. Für RIEMANN mag es eine Genugtuung gewesen sein, dass er mit den Mitteln der Analysis sogar einen geschlossenen Ausdruck für die Charakterisierung der Primzahlfolge herleiten konnte. Der Ausdruck ist Ergebnis, nicht Ausgangspunkt. Zudem ist der erhaltene Ausdruck eine Bestätigung des Programms aus § 20 der Dissertation, denn er enthält nur die dort genannten Elementaroperationen.

Wir wenden uns nun den Paaren (7), (8) und (9) zu, die auch Methodologisches andeuten.

Es wurde üblich, Wissenschaftlichkeit dann als erreicht anzusehen, wenn Qualitatives mathematisch-quantitativ erfasst war. Schon KANT hatte sich in diesem Sinne geäussert. In den *Metaphysischen Anfangsgründen der Naturwissenschaft* von 1786 sagt er, dass «in jeder besonderen Naturlehre nur so viel eigentliche Wissenschaft angetroffen werden könne, als darin Mathematik anzutreffen ist.» Auch RIEMANN meinte, wissenschaftliche Physik existiere bekanntlich erst seit der Erfindung der Differentialrechnung (vgl. Abschnitt 3.2.2). Zu RIEMANNS Zeit ging es besonders auch um Physiologie und Psychologie als quantitativ zu behandelnde Fachgebiete. Man denke an das WEBER–FECHNERsche Gesetz und an HELMHOLTZ' Lehre von den Tonempfindungen. RIEMANNS Ansätze zur Sinnesphysiologie zeigen sein Bestreben, den begrifflich gegebenen Qualitäten mathematisch-quantitativ möglichst nahe zu kommen.

Doch beobachten wir bei ihm, dass das Konstruieren in der Mathematik zurückgesetzt wird zugunsten des spekulativen Denkens, welches von begrifflich gefassten Qualitäten ausgeht. Damit werden neue Möglichkeiten eröffnet, welche über das den alten Konstruktionen Zugängliche weit hinausgehen. Dieses ist der Kern seines spekulativen Vorgehens: Die Starrheit der Konstruktionsschemata wird aufgelöst, Mathematik wird flexibel.

Das erkennt man besonders deutlich in der Geometrie, und wir können dazu auf unsere ausführlichen Erörterungen bei früheren Gelegenheiten zurückgreifen. GAUSS, BÓLYAI und LOBAČEVSKIJ hatten das starre Schema der euklidischen Konstruktionen nicht verlassen. Auch Ansätze wie die des KLEINschen Erlanger Programms blieben in einer starren Auffassung von Geometrie als Kongruenzlehre, indem sie Kongruenz nun lediglich bezüglich einer anderen Gruppe definierten als der der euklidischen Bewegungen. RIEMANNS Mannigfaltigkeiten hingegen sind weder an vorgeschriebene Konstruktionen gebunden noch an vorgegebene Gruppen. Die damit gewonnene Flexibilität wurde allerdings erst ein halbes Jahrhundert später fruchtbar, in der Mathematik der Punktmengenlehre (der topologischen Räume) und der Allgemeinen Relativitätstheorie EINSTEINS.

Hier können wir auch das Paar (10) einordnen. Geht man von der hier nicht begrifflich, sondern in den Phänomenen gegebenen Natur aus, so wird versucht, diese von der reinen Mathematik her angenähert zu erfassen. Diese (RIEMANNsche) Vorgehensweise war durchaus nicht allgemein verbreitet. Vielmehr war die Tendenz von die Physik untersuchenden Mathematikern oft dahin gegangen, vorhandene starre mathematische Systeme wie das der euklidischen Geometrie der Natur aufzuzwingen: *Die* Geometrie hatte identisch zu sein mit dem System des EUKLID, und der Raum der Physik war damit starr und absolut festgelegt. Auch hier war LEIBNIZ unter den neueren Denkern eine Ausnahme gewesen, denn ihm galt der Raum als die Ordnung der Dinge, ohne dass eine bestimmte mathematische Struktur von Anfang an mitzudenken wäre. Das Vakuum, den leeren absoluten Raum, verwirft LEIBNIZ. Seine Schrift *Über die Natur an sich* von 1698 beschliesst er mit der Bemerkung, man brauche neue Axiome, aus denen ein System entstehen könnte, welches vermittle zwischen formaler und materialer Philosophie (Mathematik und Naturwissenschaft), so dass beide richtig verbunden und erhalten würden (L. 308/309). Damals hatten die Figuren der antiken Geometrie allerdings glänzende Erfolge (Wurfparabel, KEPLER-Ellipsen), und NEWTONS *Principia* von 1687 lebten von euklidisch-geometrischen Konstruktionen.

Auch hier erinnern wir uns daran, dass für RIEMANN alles von der Seite der Antithesis her bestimmt wird. Diese inspiriert die wissenschaftlich-mathematische Annäherung von der Seite der Thesis her. Zahlen kommen dann nachträglich als Eigen-Werte (in einem allgemeinen Sinn) eines durch gewisse Bedingungen bestimmten Kontinuums zum Vorschein. In der Mathematik gehören zu den Mannigfaltigkeiten der Analysis situs Eigen-Werte wie das Geschlecht, Eigen-Funktionen wie die auf ihnen lebenden algebraischen Funktionen. Für die Physik gilt heute noch Analoges: Felder manifestieren sich durch Eigen-Werte von Observablen, eine Auffassung, die – in anderer Terminologie – zu RIEMANNS Zeit längst bekannt war. Partikeln will RIEMANN als Singularitäten des kontinuierlichen Feldes verstehen, wie er SCHERING gegenüber äusserte (vgl. Abschnitt 3.3.3). Das finden wir bei EINSTEIN wieder. Auch in der komplexen Analysis hat RIEMANN die Tendenz, Funktionen durch ihre Singularitäten zu charakterisieren. Die reelle Analysis, in der das aussichtslos ist, hat er nicht weiter verfolgt; in dieser besteht keine Beziehung zwischen Globalem und Lokalem, die Kontinuität ist bis zur Unbrauchbarkeit zerstört. Sie bildet hier kein regulatives Prinzip mehr, und die Mathematik nach RIEMANN musste in verschiedenen Anläufen Ersatz zu schaffen suchen.

Wir haben die Flexibilität als Antithesis (A_9) zur Starrheit aufgefasst. Das Vermeiden einer ungehemmten Flexibilität braucht aber nicht zur Erstarrung zu führen, es kann vielmehr eine *Konsolidierung* einleiten. In diesem Sinne wird man es auffassen müssen, wenn RIEMANN gerade im Zusammenhang mit der Epsilontik von einem Wendepunkt in der Auffassung spricht. Wir hatten dem Paar (6), Epsilontik – Infinitesimalargumentation, besonders viel Raum gewidmet, weil hier eine Ausnahme von der Tendenz hin zu den Polen der Antithesis vorzuliegen scheint, ohne dass RIEMANN allerdings die epsilontische Methode zu einem starren Dogma werden lässt. Er sieht in ihr eine solide Grundlage für die Beherrschung des Unendlichen in der Mathematik. Diese Methode scheint an die reellen Zahlen gebunden zu sein, welche DEDEKIND dann als Konsolidierung der stetigen Variablen auffassen wird. Dabei bleibt für den Zahlbegriff nichts mehr flexibel, hier legt man sich auf diesen Zahlbereich fest.

Ungehemmte flexible Expansion wird bei RIEMANN nicht gefördert, da er alles regulativen Prinzipien unterwirft. Schon in der Frühphase, im § 20 der Dissertation, als noch von Funktionsausdrücken die Rede ist, beschränkt er die aus EULERS Zeit überkommene Beliebigkeit der operativen Erzeugung von Ausdrücken auf die Anwendung gewisser Elementaroperationen, in der Meinung, damit alle der Erfahrung nach erforderlichen Funktionen zu erhalten. Schon bald orientiert er sich nicht mehr am Operativen, sondern an Begriffen. Die Möglichkeiten, welche bei anderen zur Betrachtung von immer seltsamer werdenden Funktionen (und von Mengen, zunächst reeller Zahlen) führen sollten, hat RIEMANN nicht weiter verfolgt. Die Abneigung gegen derartigen Wildwuchs, wie er sich im Anschluss an RIEMANN und DEDEKIND in der Mathematik breitmachte, mag SIEGEL zu der von uns zu Beginn der Einleitung zitierten Ansicht gebracht haben.

Im Blick auf die historische Entwicklung sollte man jedoch zweierlei sehen. Zum einen hatte es schon vor RIEMANN und DEDEKIND Wildwuchs gegeben, der uns allerdings heute kaum noch bewusst ist. Zum anderen gilt für die weitere Entwicklung der Mathematik, dass die regulativen Prinzipien ihrer beiden Mitbegründer nicht von allen beachtet wurden, nämlich DEDEKINDS Plädoyer für die Fruchtbarkeit der Gedanken und die von RIEMANN versuchte Verankerung im Philosophischen.

Literaturverzeichnis

(W.) *Bernhard Riemann's gesammelte mathematische Werke und wissenschaftlicher Nachlass.* Herausgegeben unter Mitwirkung von R. DEDEKIND von H. WEBER. 2. Auflage: Teubner, Leipzig, 1892. Reprint: Dover, New York, 1953 und in (N.).

(N.) *Bernhard Riemann. Gesammelte mathematische Werke, wissenschaftlicher Nachlass und Nachträge. Collected Papers.* Nach der Ausgabe von H. WEBER und R. DEDEKIND neu herausgegeben von R. NARASIMHAN. Springer/Teubner, Berlin etc./Leipzig, 1990.

AHLFORS, L. V. 1953 «Development of the theory of conformal mapping and Riemann surfaces through a century.» In: *Contributions to the theory of Riemann surfaces. Centennial celebration of Riemann's dissertation.* Annals of Mathematics Studies, No. 30, 3–13, Princeton.

ARENDT, G. 1904 s. DIRICHLET 1854.

BEHNKE, H.; SOMMER, F. 1965 *Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen.* Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Bd. 77. 3. Auflage: Springer, Berlin etc.

BELHOSTE, B. 1991 *Augustin-Louis Cauchy. A Biography.* Springer, New York etc.

BIERMANN, K.-R. 1988 *Die Mathematik und ihre Dozenten an der Berliner Universität 1810–1933*, Akademie–Verlag, Berlin.

BIERMANN, K.-R. 1990 *Carl Friedrich Gauß. Der «Fürst der Mathematiker» in Briefen und Gesprächen*, C. H. Beck, München.

BÖHM, J.; REICHARDT, H. 1984 *C. F. Gauß / B. Riemann / H. Minkowski. Gaußsche Flächentheorie, Riemannsche Räume und Minkowski-Welt.* Teubner-Archiv zur Mathematik, Bd. 1. Teubner, Leipzig.

BOI, L.; FLAMENT, D.; SALANSKIS, J.-M. 1992 (eds.) 1830–1930: A century of geometry. Springer, Berlin.

BOTTAZZINI, U. 1977 «Riemanns Einfluß auf E. Betti und F. Casorati.» *Archive for History of Exact Sciences* 18, 27–37.

BOTTAZZINI, U. 1986 *The higher calculus: A history of real and complex analysis from Euler to Weierstrass.* Springer, New York etc.

BOTTAZZINI, U. 1991 «Riemann in Italia.» In: RIEMANN 1991, S. 31–40.

BOTTAZZINI, U. 1992 (ed.) *A. L. Cauchy, Cours d'analyse etc.* Editor's introduction, XI–CLXVII. CLUEB, Bologna.

BRILL, A.; NOETHER, M. 1892 «Die Entwicklung der Theorie der algebraischen Functionen in älterer und neuerer Zeit.» *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* 3 (1892–93), 107–566.

BÜHLER, W. K. 1981 *Gauss, A biographical study.* Springer, Berlin etc.

BURKHARDT, H. 1908 «Entwicklungen nach oscillirenden Functionen und Integration der Differentialgleichungen der mathematischen Physik.» *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* 10.2. xii, 1804 S.