Logik I

Symbole, Terme, Formeln

Wie jede geschriebene Sprache basiert die *Prädikatenlogik erster Stufe* auf einem *Alphabet*, welches aus den folgenden *Symbolen* besteht:

(a) **Variabeln** wie zum Beispiel $v_0, v_1, x, y, \ldots$ sind "Platzhalter" für die Objekte welche wir untersuchen (*z.B.* die Elemente einer Gruppe, natürliche Zahlen, oder Mengen).

(b) **Logische Operatoren** wie zum Beispiel "$\neg$" (*nicht*), "$\wedge$" (*und*), "$\vee$" (*oder*), "$\rightarrow$" (*impliziert*), und "$\leftrightarrow$" (*genau dann wenn*).

(c) **Logische Quantoren** die da sind *Existenzquantor* "$\exists$" (*es existiert*) und *Allquantor* "$\forall$" (*für alle*), wobei die Quantoren auf Objekte beschränkt sind und nicht zum Beispiel auf Formeln angewendet werden dürfen.

(d) **Gleichheitszeichen** "$=$", welches für die spezielle Relation der Gleichheit steht.

Die Symbole (a)–(d) heissen **logische Symbole**. Je nach mathematischem Gebiet, welches untersucht werden soll, werden sogenannte **nicht-logische Symbole** eingeführt:

(e) **Konstantensymbole** wie zum Beispiel die Zahl $\mathsf{0}$ in der Peano Arithmetik (Zahlentheorie), oder das Neutralelement e in der Gruppentheorie. Konstantensymbole stehen für bestimmte, festgelegte Objekte.

(f) **Funktionssymbole** wie zum Beispiel $\circ$ (die Operation in der Gruppentheorie), oder $+, \cdot, \mathsf{s}$ (die Operationen in der Peano Arithmetik, wobei $\mathsf{s}(n) := n+1$). Funktionssymbole stehen für bestimmte Funktionen, welche Objekte als Argumente nehmen und Objekte zurückgeben. Mit jedem Funktionssymbol ist eine "Stelligkeit" verbunden, die uns sagt, wieviele Argumente das Funktionssymbol benötigt (*z.B.* ist "$\circ$" eine 2-stellige oder binäre Operation und die Nachfolgeroperation "s" ist eine 1-stellige Funktion).

(g) **Relationssymbole** (wie zum Beispiel $\in$ in der Mengenlehre) stehen für feste Relationen zwischen (oder Eigenschaften von) Objekten. Wieder gehört zu jedem Relationssymbol eine "Stelligkeit"(*z.B.* ist "$\in$" eine 2-stellige oder binäre Relation).

Die Menge der nicht-logischen Symbole, welche zu einer bestimmten Theorie T (wie *z.B.* der Gruppentheorie oder der Mengenlehre) gehört, heisst **Signatur** *bzw.* **Sprache** der entsprechenden Theorie und wird mit $\mathscr{L}$ oder $\mathscr{L}_{\mathsf{T}}$ bezeichnet; und Formeln, welche in einer Sprache $\mathscr{L}$ formuliert sind, heissen $\mathscr{L}$-Formeln. Zum Beispiel besteht die Sprache der Gruppentheorie bloss aus den nicht-logischen Symbolen "e" und "$\circ$", das heisst $\mathscr{L}_{\mathsf{GT}} = \{\mathsf{e}, \circ\}$ ist die Sprache der Gruppentheorie.

Ein erster Schritt zu einer richtigen Sprache besteht darin, mit diesen logischen und nicht-logischen Symbolen Wörter (*d.h. Terme*) zu bilden.

Terme:

(T1) Jede Variable ist ein Term.

(T2) Jedes Konstantensymbol ist ein Term.

(T3) Sind $t_1, \ldots, t_n$ bereits gebildete Terme und ist F ein n-stelliges Funktionssymbol, dann ist $Ft_1 \cdots t_n$ ein Term.

Es ist üblich weitere Symbole (wie *z.B.* Klammern) einzuführen, damit Terme, Relationen, und andere Ausdrücke einfacher zu lesen sind. Zum Beispiel schreiben wir $F(t_1, \ldots, t_n)$ anstelle von $Ft_1 \cdots t_n$.

Terme entsprechen in einem gewissen Grad den Wörtern, weil sie immer Objekte bezeichnen. Wie richtige Wörter sind sie keine Aussagen und können deshalb keine Beziehungen zwischen den Objekten ausdrücken. Im nächsten Schritt werden mit den Wörtern Aussagen (*d.h. Formeln*) gebildet.

Formeln:

(F1) Sind t_1 und t_2 Terme, dann ist $t_1 = t_2$ eine Formel.

(F2) Sind $t_1, \ldots, t_n$ Terme und R ein n-stelliges Relationssymbol, dann ist $Rt_1 \cdots t_n$ eine Formel.

(F3) Ist φ eine bereits gebildete Formel, dann ist $\neg\varphi$ eine Formel.

(F4) Sind φ und ψ Formeln, dann sind $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \rightarrow \psi)$, und $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ Formeln. (Um Klammern zu vermeiden, können diese Formeln *z.B.* in *polnischer Notation* geschrieben werden, *d.h.* $\wedge\varphi\psi$, $\vee\varphi\psi$, *et cetera*.)

(F5) Ist φ eine Formel und x eine Variable, dann sind $\exists x\varphi$ und $\forall x\varphi$ Formeln.

Für binäre Relationen R (*bzw.* binäre Funktionen F) schreiben wir meist xRy (*bzw.* xFy) anstelle von $R(x, y)$ (*bzw.* $F(x, y)$). Zum Beispiel schreiben wir $x \in y$ (*bzw.* $x + y$) anstelle von $\in(x, y)$ (*bzw.* $+(x, y)$), und wir schreiben $x \notin y$ anstelle von $\neg(x \in y)$.

Ist φ eine Formel der Form $\exists x\psi$ oder der Form $\forall x\psi$ (für eine Formel ψ) und x kommt in der Formel ψ vor, dann sagen wir, dass x im *Bereich* eines logischen Quantors ist. Die Variable x heisst dann **gebunden**. Wenn die Variable x (an einer bestimmten Stelle) in keinem Bereich eines logischen Quantors ist, so heisst x an dieser Stelle **frei**. In einer Formel kann eine Variable x durchaus frei und gebunden vorkommen (*z.B.* $\exists y(x = y) \vee \forall x(x = y)$, hier kommen sowohl x wie auch y sowohl frei wie auch gebunden vor).

Eine Formel φ ist ein **Satz**, wenn alle Variabeln, die in der Formel φ vorkommen, überall gebunden sind. Sätze sind also Formeln ohne freie Variabeln. Zum Beispiel sind $\forall x\forall y(x = y \rightarrow y = x)$ und $\forall x\forall y(x = y)$ Sätze.

Logik II

Die Logischen Axiome

Bis jetzt haben wir uns auf einer syntaktischen Ebene bewegt, das heisst Formeln waren bloss Zeichenketten ohne irgend eine Bedeutung. Falls wir den Symbolen aber eine Bedeutung geben (sozusagen Leben einhauchen), wechseln wir auf die *semantische* Ebene, und syntaktisch korrekt geformte Zeichenketten werden zu Aussagen über mathematische Objekte, die in Abhängigkeit der Interpretation (*bzw.* im Kontext, in dem sie stehen) *wahr* oder *falsch* sind. Eine Formel, welche ungeachtet ihrer Interpretation immer wahr ist, heisst **Tautologie**, und gewisse Tautologien heissen **logische Axiome**. Wir können aber auch den Standpunkt vertreten, dass wir ungeachtet der möglichen Interpretation einfach ein paar Typen von Formeln auswählen und diese als logische Axiome deklarieren. Das heisst wir können ohne einen Wahrheitsbegriff einzuführen und ohne die logischen Symbole zu interpretieren, rein *syntaktisch* gewisse Formeln als logische Axiome auszeichnen.

Egal welchen Standpunkt wir vertreten, die Idee hinter den logischen Axiomen ist, dass sich jede Tautologie mit Hilfe von (zu definierenden) *Schlussregeln* aus den logischen Axiomen formal beweisen lässt. Falls wir viele Schlussregeln zur Verfügung haben, kommen wir mit wenigen logischen Axiomen aus. Falls wir aber (wie in unserem Fall) bloss zwei Schlussregeln zulassen, so brauchen wir entsprechend mehr logische Axiome um alle Tautologien zu beweisen.

Die folgenden logischen Axiome L_1–L_{18} sind eigentlich nicht einzelne Axiome sondern **Axiomen-Schemata**, das heisst Formeltypen, welche für eine unendliche Menge von konkreten Formeln dieses Typs stehen.

Seien φ, φ_1, φ_2, φ_3, ψ, beliebige Formeln:

L_1 : $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$

L_2 : $\big(\psi \rightarrow (\varphi_1 \rightarrow \varphi_2)\big) \rightarrow \big((\psi \rightarrow \varphi_1) \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi_2)\big)$

L_3 : $(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \varphi$

L_4 : $(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \psi$

L_5 : $\varphi \rightarrow \big(\psi \rightarrow (\psi \wedge \varphi)\big)$

L_6 : $\varphi \rightarrow (\varphi \vee \psi)$

L_7 : $\psi \rightarrow (\varphi \vee \psi)$

L_8 : $(\varphi_1 \rightarrow \varphi_3) \rightarrow \big((\varphi_2 \rightarrow \varphi_3) \rightarrow \big((\varphi_1 \vee \varphi_2) \rightarrow \varphi_3\big)\big)$

L_9 : $(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \big((\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow \neg\varphi\big)$

L_{10}: $\neg\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$

L_{11}: $\varphi \vee \neg\varphi$

Die logischen Axiome L_1–L_{11} sind die Axiome der **Aussagenlogik**. In der Aussagenlogik werden Beziehungen zwischen *Aussagen als Ganzes* betrachtet. Im Unterschied dazu betrachtet die **Prädikatenlogik** auch Beziehungen der Objekte untereinander. Dazu benutzen wir die Zeichen "$=$", "$\forall$" und "$\exists$", deren Gebrauch im Folgenden axiomatisch festgelegt wird. Die folgenden vier Axiome regeln den Gebrauch von "$\forall$" und "$\exists$", und die letzten drei Axiome regeln die Bedeutung des Zeichens "$=$".

Um die nächsten beiden logischen Axiome zu formulieren, müssen wir etwas weiter ausholen: Kommt die Variable x in der Formel $\varphi(x)$ frei vor und ist t ein Term, so ist $\varphi(x/t)$ die Formel welche wir erhalten, wenn wir an allen Stellen wo x in $\varphi(x)$ frei vorkommt, x durch t ersetzen. Solch eine sogenannte **Substitution** ist zulässig, falls keine Stelle, an der x in φ frei vorkommt, im Bereich eines Quantors ist der irgend eine Variable, welche in t vorkommt, bindet (*d.h.* für alle Variablen v welche in t vorkommen gilt, dass keine Stelle, an der x frei in φ vorkommt, im Bereich von "$\exists v$" oder "$\forall v$" liegt).

Sei t ein Term und sei die Substitution $\varphi(x/t)$ zulässig.

L_{12}: $\forall x \varphi(x) \to \varphi(t)$

L_{13}: $\varphi(t) \to \exists x \varphi(x)$

Sei ψ eine Formel in der die Variable x nirgends frei vorkommt.

L_{14}: $\forall x\big(\psi \to \varphi(x)\big) \to \big(\psi \to \forall x \varphi(x)\big)$

L_{15}: $\forall x\big(\varphi(x) \to \psi\big) \to \big(\exists x \varphi(x) \to \psi\big)$

Was bis jetzt noch nicht behandelt wurde ist das Gleichheitszeichen "$=$". In unserem formalen System wird die Gleichheit durch die folgenden 3 Axiome definiert:

Seien $t, t_1, \ldots, t_n, t'_1, \ldots, t'_n$ Terme, R ein n-stelliges Relationssymbol (*z.B.* das binäre Relationssymbol "$=$"), und F ein n-stelliges Funktionssymbol.

L_{16}: $t = t$

L_{17}: $\big(t_1 = t'_1 \wedge \cdots \wedge t_n = t'_n\big) \to \big(R(t_1, \ldots, t_n) \to R(t'_1, \ldots, t'_n)\big)$

L_{18}: $\big(t_1 = t'_1 \wedge \cdots \wedge t_n = t'_n\big) \to \big(F(t_1, \ldots, t_n) = F(t'_1, \ldots, t'_n)\big)$

Der logische Operator "$\leftrightarrow$", welcher nicht in unserer Liste von logischen Axiomen vorkommt, wird definiert durch

$$\varphi \leftrightarrow \psi \iff (\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi),$$

d.h. $\varphi \leftrightarrow \psi$ ist bloss eine abgekürzte Schreibweise für $(\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$.

Zu den logischen Axiomen L_1–L_{18} dürfen wir, in Abhängigkeit zur Theorie die wir betrachten wollen, beliebig viele **nicht-logische Axiome** hinzufügen, wie zum Beispiel die Axiome der Gruppentheorie, die Axiome der Peano Arithmetik, oder die Axiome der Mengenlehre.

Tautologien

(A.1) $\vdash \varphi \to \varphi$

(A.0) $\vdash \varphi \leftrightarrow \varphi$

(B) $\{\psi, \varphi\} \vdash \varphi \wedge \psi$

(C) $\{\psi \to \varphi\} \vdash \psi \to \forall x \varphi \qquad$ [für $x \notin \mathit{frei}(\psi)$]

(D.1) $\{\varphi_0 \to \varphi_1, \varphi_1 \to \varphi_2\} \vdash \varphi_0 \to \varphi_2$

(D.2) $\{\varphi_0 \to \psi, \varphi_1 \to \psi\} \vdash (\varphi_0 \vee \varphi_1) \to \psi$

(D.3) $\{\psi \to \varphi_0, \psi \to \varphi_1\} \vdash \psi \to (\varphi_0 \wedge \varphi_1)$

(E) $\vdash \varphi \to \big(\psi \to (\varphi \wedge \psi)\big)$

(F.1) $\vdash \varphi \to \neg\neg\varphi$

(F.2) $\vdash \neg\neg\varphi \to \varphi$

(F.0) $\vdash \varphi \leftrightarrow \neg\neg\varphi$

(G.1) $\vdash (\varphi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\varphi)$

(G.2) $\vdash (\neg\psi \to \neg\varphi) \to (\varphi \to \psi)$

(G.0) $\vdash (\varphi \to \psi) \leftrightarrow (\neg\psi \to \neg\varphi)$

(H.3) $\{\varphi \leftrightarrow \varphi', \psi \leftrightarrow \psi'\} \vdash (\varphi \to \psi) \leftrightarrow (\varphi' \to \psi')$

(H.2) $\{\varphi \leftrightarrow \varphi', \psi \leftrightarrow \psi'\} \vdash (\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (\varphi' \vee \psi')$

(H.1) $\{\varphi \leftrightarrow \varphi', \psi \leftrightarrow \psi'\} \vdash (\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow (\varphi' \wedge \psi')$

(H.0) $\vdash (\varphi \leftrightarrow \psi) \leftrightarrow (\neg\varphi \leftrightarrow \neg\psi)$

(I.1) $\vdash (\varphi_1 \wedge \varphi_2) \leftrightarrow (\varphi_2 \wedge \varphi_1)$

(I.2) $\vdash (\varphi_1 \wedge \varphi_2) \wedge \varphi_3 \leftrightarrow \varphi_1 \wedge (\varphi_2 \wedge \varphi_3)$

(J.1) $\vdash (\varphi_1 \vee \varphi_2) \leftrightarrow (\varphi_2 \vee \varphi_1)$

(J.2) $\vdash (\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3 \leftrightarrow \varphi_1 \vee (\varphi_2 \vee \varphi_3)$

(K.1) $\vdash (\neg\varphi \vee \psi) \to (\varphi \to \psi)$

(K.2) $\vdash (\varphi \to \psi) \to (\neg\varphi \vee \psi)$

(K.0) $\vdash (\varphi \to \psi) \leftrightarrow (\neg\varphi \vee \psi)$

(L.1) $\vdash (\neg\varphi \vee \neg\psi) \to \neg(\varphi \wedge \psi)$

(L.2) $\vdash \neg(\varphi \wedge \psi) \to (\neg\varphi \vee \neg\psi)$

(L.0) $\vdash \neg(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow (\neg\varphi \vee \neg\psi)$

(M.1) $\vdash \big(\varphi_1 \to (\varphi_2 \to \varphi_3)\big) \leftrightarrow \big((\varphi_1 \wedge \varphi_2) \to \varphi_3\big)$

(M.2) $\vdash \neg(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (\neg\varphi \wedge \neg\psi)$

(N.1) $\vdash (\varphi_1 \wedge \varphi_2) \vee \varphi_3 \to (\varphi_1 \vee \varphi_3) \wedge (\varphi_2 \vee \varphi_3)$

(N.2) $\vdash (\varphi_1 \vee \varphi_3) \wedge (\varphi_2 \vee \varphi_3) \to (\varphi_1 \wedge \varphi_2) \vee \varphi_3$

(N.0) $\vdash (\varphi_1 \wedge \varphi_2) \vee \varphi_3 \leftrightarrow (\varphi_1 \vee \varphi_3) \wedge (\varphi_2 \vee \varphi_3)$

(O) $\vdash (\varphi_1 \vee \varphi_2) \wedge \varphi_3 \leftrightarrow (\varphi_1 \wedge \varphi_3) \vee (\varphi_2 \wedge \varphi_3)$

(P.1) $\vdash \neg\exists x\varphi \to \forall x\neg\varphi$

(P.2) $\vdash \neg\forall x\neg\varphi \to \exists x\varphi$

(P.3) $\vdash \exists x\varphi \to \neg\forall x\neg\varphi$

(P.0) $\vdash \exists x\varphi \leftrightarrow \neg\forall x\neg\varphi$

(Q) $\{\varphi \leftrightarrow \psi\} \vdash \forall x\varphi \leftrightarrow \forall x\psi$

(R) $\vdash \forall x\varphi \leftrightarrow \neg\exists x\neg\varphi$

(S.1) $\vdash x = y \leftrightarrow y = x$

(S.2) $\vdash (x = y \wedge y = z) \to x = z$

(T) $\vdash \exists x\varphi(x) \to \exists y\varphi(y)$ [falls y in $\varphi(x)$ nicht vorkommt]

Zeichen & Bedeutung

Syntax & Semantik

Die mathematische Logik zerfällt in **Syntax** (Theorie der Beziehungen zwischen den Zeichen) und **Semantik** (Lehre der Bedeutung der Symbole, *bzw.* deren Interpretation). Im Vergleich zur Musik könnte man sagen, dass die Syntax (*d.h.* die formale Logik) der Partitur entspricht, welche Schwarz auf Weiss festhält, welche Noten gespielt werden sollen, während die Semantik der Umsetzung einer Partitur in hörbare Musik entspricht, welche sich zwar an die Partitur halten muss, in der Interpretation der Partitur aber frei ist. Obwohl die ganze Musik schon in der Partitur enthalten ist, so wird sie doch erst durch die Interpretation mit Leben erfüllt. Nehmen wir zum Beispiel als Partitur die Gruppenaxiome, so erhalten auch diese erst durch das betrachten konkreter Gruppen (*d.h.* erst durch die Interpretation) ihre Bedeutung.

Im Folgenden werden ein paar Parallelen zwischen der syntaktischen und der semantischen Ebene der Mathematik aufgezeigt. Diese sollen helfen, den logischen Aufbau (*bzw.* das Fundament) der Mathematik besser zu verstehen.

Syntaktische Ebene	Semantische Ebene
Terme. Das sind Zeichenketten, welche nach den formalen Regeln (T1)–(T3) aufgebaut werden. Zum Beispiel ist das Konstantensymbol e der Gruppentheorie ein Term.	***Objekte.*** Terme sind Namen für Objekte. Durch die Interpretation wird ein Term (Name) zu dem *Objekt*, welches er bezeichnet. Zum Beispiel wird das Konstantensymbol e durch die Interpretation zum Neutralelement e einer Gruppe, e ist also ein Objekt.
Formeln. Das sind Zeichenketten, welche nach den formalen Regeln (F1)–(F5) aufgebaut werden. Formeln sind weder wahr noch falsch; auf der syntaktischen Ebene gibt es keinen Wahrheitsbegriff!	***Aussagen.*** Wird eine Formel interpretiert, so wird sie zu einer konkreten Aussage über bestimmte Objekte die entweder wahr oder falsch ist; und zwar unabhängig davon, ob wir ihren Wahrheitswert kennen.
Logische Axiome. Das sind Formeln, genauer *Formelschemen*, aus denen, mit Hilfe von Schlussregeln, weitere Formeln hergeleitet werden können.	***Tautologien.*** Egal wie wir ein logisches Axiom interpretieren, die Aussage die wir erhalten ist immer wahr, *d.h.* eine Tautologie. Die logischen Axiome sind so gewählt, dass aus ihnen alle Tautologien hergeleitet werden können.
Nicht-logische Axiome. Das sind Formeln (*bzw.* Formelschemen) welche nicht-logische Symbole enthalten, aus denen, mit Hilfe von Schlussregeln, weitere Formeln hergeleitet werden können. Zum Beispiel sind die Gruppenaxiome, welche die nicht-logischen Symbole “e” und “$\circ$” enthalten, nicht-logische Axiome.	***Axiomensystem einer Theorie.*** Das sind Axiome (*d.h.* Grundaussagen), welche am Anfang einer Theorie (*z.B.* Gruppentheorie) stehen. Die nicht-logischen Symbole werden dann so interpretiert, dass alle Axiome wahr werden.

Ausser in der formalen Logik befinden wir uns in der Mathematik immer auf der semantischen Ebene. Auch wenn wir zum Beispiel eine allgemeine Gruppe untersuchen, besteht diese Gruppe in unserer Vorstellung aus Elementen, also aus Objekten, auf denen eine konkrete binäre Operation (mit gewissen Eigenschaften) definiert ist. Sogar wenn wir mathematische Beweise führen, bleiben wir auf der semantischen Ebene — wir können aber jeden mathematischen Beweis in einen formalen Beweis der syntaktischen Ebene übersetzen, dessen Korrektheit sogar von einem Computer überprüft werden kann.

Obwohl mathematische Theorien (wie *z.B.* die Gruppentheorie) üblicherweise auf nicht-logischen Axiomen beruhen, wird der Übergang von der syntaktischen Ebene der nicht-logischen Axiome (*z.B.* der Gruppenaxiome) auf die semantische Ebene (*z.B.* der konkreten Gruppen) im Allgemeinen nicht vollzogen.

In der Gruppentheorie mag dies noch statthaft sein, denn wir können Modelle von endlichen Gruppen effektiv angeben. Wesentlich anders ist es aber bei der Mengenlehre, denn es gibt kein umfassendes System, in welchem die Mengenlehre existiert. Deshalb muss die axiomatische Mengenlehre auch aus den Axiomen aufgebaut werden und bleibt in einem gewissen Grad immer auf der syntaktischen Ebene.