

# BEGRIFFSSCHRIFT,

EINE DER ARITHMETISCHEN NACHGEBILDETE

FORMELSPRACHE

DES REINEN DENKENS.

VON

DR. GOTTLLOB FREGE.

PRIVATDOCENTEN DER MATHEMATIK AN DER UNIVERSITÄT JENA.

## VERZEICHNIS

- VI Vorbemerkung
- VII Begriffsschrift
- 89 Anwendungen der Begriffsschrift
- 93 Über den Briefwechsel Leibnizens und Huygens mit Papin
- 97 Über den Zweck der Begriffsschrift
- 106 Über die wissenschaftliche Berechtigung einer Begriffsschrift
- 115 Anhang I: H. Scholz' Anmerkungen zur „Begriffsschrift“
- 117 Anhang II: E. Husserls Anmerkungen zur „Begriffsschrift“
- 122 Textkritische Bemerkungen

---

HALLE 4/S.

VERLAG VON LOUIS NEBERT.

1879.

## VORWORT.

Das Erkennen einer wissenschaftlichen Wahrheit durchläuft in der Regel mehrer Stufen der Sicherheit. Zuerst vielleicht aus einer ungenügenden Zahl von Einzelfällen errathen, wird der allgemeine Satz nach und nach sicherer befestigt, indem er durch Schlussketten mit andern Wahrheiten verbunden erhält, sei es dass aus ihm Folgerungen abgeleitet werden, die auf andere Weise feststehender Sätze erkannt wird. Es kann daher einerseits nach dem Wege gefragt werden, auf dem ein Satz allmählich errungen wurde, andererseits nach der Weise, wie er nun schliesslich am festesten zu begründenden ist. Erstere Frage muss möglicherweise in Bezug auf verschiedene Menschen verschieden beantwortet werden, letztere ist bestimmter, und ihre Beantwortung hängt mit dem innern Wesen des betrachteten Satzes zusammen. Die festeste Beweisführung ist offenbar die rein logische, welche, von der besondern Beschaffenheit der Dinge absehend, sich allein auf die Gesetze gründet, auf denen alle Erkenntnis beruht. Wir theilen danach alle Wahrheiten, die einer Begründung bedürfen, in zwei Arten, indem der Beweis bei den einen rein logisch vorgehen kann, bei den andern sich auf Erfahrungstatsachen stützen muss. Es ist aber wohl vereinbar, dass ein Satz zu der ersteren Art gehört und doch ohne Sinnethätigkeit nie in einem menschlichen Geiste zum Bewusstsein kommen könnte.\*) Also nicht die psychologische Entstehungsweise, sondern die vollkommenste Art der Beweisführung liegt

\*) Da ohne Sinneswahrnehmung keine geistige Entwicklung bei den uns bekannten Wesen möglich ist, so gilt das Letztere von allen Urthellen.

der Eintheilung zu Grunde. Indem ich mir nun die Frage vorlegte, zu welcher dieser beiden Arten die arithmetischen Urtheile gehörten, musste ich zunächst versuchen, wie weit man in der Arithmetik durch Schlüsse allein gelangen könnte, nur gestützt auf die Gesetze des Denkens, die über allen Besonderheiten erhaben sind. Der Gang war hierbei dieser, dass ich zuerst den Begriff der Anordnung in einer Reihe auf die *logische* Folge zurückzuführen suchte, um von hier aus zum Zahlbegriff fortzuschreiten. Damit sich hierbei nicht unmerkelt etwas Anschauliches eindrängen könnte, musste Alles auf die Logiklosigkeit der Schlusskette ankommen. Indem ich diese Forderung auf das strengste zu erfüllen trachtete, fand ich ein Hindernis in der Unzulänglichkeit der Sprache, die bei aller entstehenden Schwerfälligkeit des Ausdrucks doch, je verwickelter die Beziehungen wurden, desto weniger die Genauigkeit erreichen liess, welche mein Zweck verlangte. Aus diesem Bedürfnisse ging der Gedanke der vorliegenden Begriffsschrift hervor. Sie soll also zunächst dazu dienen, die Blüdigkeit einer Schlusskette auf die sicherste Weise zu prüfen und jede Voraussetzung, die sich unhemmerkt einschleichen will, anzuzeigen, damit letztere auf ihren Ursprung untersucht werden könne. Deshalb ist auf den Ausdruck alles dessen verzichtet worden, was für die *Schlussfolge* ohne Bedeutung ist. Ich habe das, worauf allein es mir ankam, in § 3 als *begrifflichen Inhalt* bezeichnet. Diese Erklärung muss daher immer im Sinne behalten werden, wenn man das Wesen meiner Formelsprache richtig auffassen will. Hieraus ergab sich auch der Name „Begriffsschrift“. Da ich mich fürs erste auf den Ausdruck solcher Beziehungen beschränkt habe, die von der besonderen Beschaffenheit der Dinge unabhängig sind, so konnte ich auch den Ausdruck „Formelsprache des reinen Denkens“ gebrauchen. Die Nachbildung der arithmetischen Formelsprache, die ich auf dem Titel angedeutet habe, bezieht sich mehr auf die Grundgedanken als die Einzelgestaltung. Jene Bestrebungen, durch Auffassung des Begriffs als Summe seiner Merkmale eine kinnetliche Aehnlichkeit herzustellen, haben mir dabei durchaus fern gelegen. Am unmittelbarsten berührt sich meine Formelsprache mit der arithmetischen in der Verwendungsweise der Buchstaben.

Das Verhältnis meiner Begriffsschrift zu der Sprache des Lebens glaube ich am deutlichsten machen zu können, wenn ich es mit dem des Mikroskops zum Auge vergleiche. Das Letztere hat durch den Umfang seiner Anwendbarkeit, durch die Beweglichkeit, mit der es sich den verschiedensten Umständen anzuschmiegen weise, eine grosse Ueberlegenheit vor dem Mikroskop. Als optischer Apparat betrachtet, zeigt es freilich viele Unvollkommenheiten, die nur in Folge seiner innigen Verbindung mit dem geistigen Leben gewöhnlich unbeachtet bleiben. Sobald aber wissenschaftliche Zwecke grosse Anforderungen an die Schärfe der Unterscheidung stellen, zeigt sich das Auge als ungenügend. Das Mikroskop hingegen ist gerade solchen Zwecken auf das vollkommenste angepasst, aber eben dadurch für alle andern unbrauchbar.

So ist diese Begriffsschrift ein für bestimmte wissenschaftliche Zwecke erdichtetes Hilfsmittel, das man nicht deshalb verurtheilen darf, weil es für andere nichts taugt. Wenn sie diesen Zwecken einigermassen entspricht, so möge man immerhin neue Wahrheiten in meiner Schrift vermissen. Ich würde mich darüber mit dem Bewusstsein trösten, dass auch eine Weiterbildung der Methode die Wissenschaft fördert. Halt es doch Baco für vorzüglicher ein Mittel zu erfinden, durch welches Alles leicht gefunden werden kann, als Einzelnes zu entdecken, und haben doch alle grossen wissenschaftlichen Fortschritte der neueren Zeit ihren Ursprung in einer Verbesserung der Methode gehabt.

Auch Leibniz hat die Vortheile einer angemessenen Bezeichnungsweise erkannt, vielleicht überschätzt. Sein Gedanke einer allgemeinen Charakteristik, eines *calculus philosophicus* oder *ratiocinator*\*) war zu riesenhaft, als dass der Versuch ihn zu verwirklichen über die blossen Vorbereitungen hätte hinausgelangen können. Die Begeisterung, welche seinen Urheber bei der Erwägung ergriff, welche unermessliche Vermehrung der geistigen Kraft der Menschheit aus einer die Sachen selbst treffenden Bezeichnungsweise entspringen würde, liess ihn die Schwierigkeiten zu gering schätzen, die einem

\*) Siehe hierüber: Trendelenburg, *Historische Beiträge zur Philosophie* 3. Band.

solchen Unternehmen entgegenstehen. Wenn aber auch dieses hohe Ziel mit Einem Anlaufe nicht erreicht werden kann, so braucht man doch an einer langsamen, schrittweisen Annäherung nicht zu verzweifeln. Wenn eine Aufgabe in ihrer vollen Allgemeinheit unlösbar scheint, so beschränke man sie vorläufig; dann wird vielleicht durch allmähliche Erweiterung ihre Bewältigung gelingen. Man kann in den arithmetischen, geometrischen, chemischen Zeichen Verwicklungen das Leibnizische Gedanken für einzelne Gebiete sehen. Die hier vorgeschlagene Begriffsschrift fügt diesen ein neues hinzu und zwar das in der Mitte gelegene, welches allen andern benachbart ist. Von hier aus lässt sich daher mit der größten Aussicht auf Erfolg eine Ausfüllung der Lücken der bestehenden Formelsprachen, eine Verbindung ihrer bisher getrennten Gebiete zu dem Bereiche einer einzigen und eine Ausdehnung auf Gebiete ins Werk setzen, die bisher einer solchen ermangelten.

Ich verspreche mir überall da eine erfolgreiche Anwendung meiner Begriffsschrift, wo ein besonderer Werth auf die Bündigkeit der Beweisführung gelegt werden muss, wie bei der Grundlegung der Differential- und Integralrechnung.

Noch leichter scheint es mir zu sein, das Gebiet dieser Formelsprache auf Geometrie auszu dehnen. Es müssten nur für die hier vorkommenden anschaulichen Verhältnisse noch einige Zeichen hinzugefügt werden. Auf diese Weise würde man eine Art von *analysis situs* erhalten.

Der Uebergang zu der reinen Bewegungslehre und weiter zur Mechanik und Physik möchte sich hier anschliessen. In den letzteren Gebieten, wo neben der Denktrothwendigkeit die Naturnothwendigkeit sich geltend macht, ist am ehesten eine Weiterentwicklung der Bezeichnungswaise mit dem Fortschreiten der Erkenntnis vorzusehen. Deshalb braucht man aber nicht zu warten, bis die Möglichkeit solcher Umformungen ausgeschlossen erscheint.

Wenn es eine Aufgabe der Philosophie ist, die Herrschaft des Wortes über den menschlichen Geist zu brechen, indem sie die Täuschungen aufleckt, die durch den Sprachgebrauch über die Beziehungen der Begriffe oft fast unvermeidlich entstehen, indem sie den Gedanken von demjenigen befreit, womit ihn

allein die Beschaffenheit des sprachlichen Ausdruckmittels beherrscht, so wird meine Begriffsschrift, für diese Zwecke weiter ausgebildet, den Philosophen ein brauchbares Werkzeug werden können. Freilich giebt auch sie, wie es bei einem Ausern Darstellungsmittel wohl nicht anders möglich ist, den Gedanken nicht rein wieder; aber einerseits kann man diese Abweichungen auf das Unvermeidliche und Unschädliche beschränken, andererseits ist schon dadurch, dass sie ganz anderer Art sind als die der Sprache eigenthümlichen, ein Schutz gegen eine einseitige Beeinflussung durch eines dieser Ausdrucksmittel gegeben.

Schon das Erfinden dieser Begriffsschrift hat die Logik, wie mir scheint, gefördert. Ich hoffe, dass die Logiker, wenn sie sich durch den ersten Eindruck des Fremdartigen nicht zurückschrecken lassen, den Neuerungen, zu denen ich durch eine der Sache selbst inwohnende Nothwendigkeit getrieben wurde, ihre Zustimmung nicht verweigern werden. Diese Abweichungen vom Hergebrachten finden ihre Rechtfertigung darin, dass die Logik sich bisher immer noch zu eng an Sprache und Grammatik angeschlossen hat. Insbesondere glaube ich, dass die Ersetzung der Begriffe *Subiect* und *Praedicat* durch *Argument* und *Function* sich auf die Dauer bewähren wird. Man erkennt leicht, wie die Auffassung eines Inhalts als Function eines Argumentes begriffbildend wirkt. Es möchte ferner der Nachweis des Zusammenhanges zwischen den Bedeutungen der Wörter: wenn, und, nicht, oder, es giebt, einige, alle u. s. w. Beachtung verdienen.

Im Besondern sei nur noch Folgendes erwähnt.

Die in § 6 ausgesprochene Beschränkung auf eine einzige Schlussweise wird dadurch gerechtfertigt, dass bei der *Grundlegung* einer solchen Begriffsschrift die Urbestandtheile so einfach wie möglich genommen werden müssen, wenn Uebersichtlichkeit und Ordnung geschaffen werden sollen. Dies schliesst nicht aus, dass *später* Uebergänge von mehreren Urtheilen zu einem neuen, die bei dieser einzigen Schlussweise nur in mittelbarer Weise möglich sind, der Abkürzung wegen in unmittelbarer verwandelt werden. In der That möchte sich dies bei einer spätern Anwendung empfehlen. Dadurch würden dann weitere Schlussweisen entstehen.

Nachträglich habe ich bemerkt, dass die Formeln (31) und (41) in die einzige

$$\vdash \text{---} (\neg \neg a \equiv a)$$

zusammengezogen werden können, wodurch noch einige Vereinfachungen möglich werden.

Die Arithmetik, wie ich im Anfange bemerkt habe, ist der Ausgangspunkt des Gedankenganges gewesen, der mich zu meiner Begriffsschrift geleitet hat. Auf diese Wissenschaft denke ich sie daher auch zuerst anzuwenden, indem ich ihre Begriffe weiter zu zergliedern und ihre Sätze tiefer zu begründen suche. Vorläufig habe ich im dritten Abschnitte einiges von dem mitgetheilt, was sich in dieser Richtung bewegt. Die weitere Verfolgung des angedeuteten Weges, die Beleuchtung der Begriffe der Zahl, der Grösse u. s. w. sollen den Gegenstand fernerer Untersuchungen bilden, mit denen ich unmittelbar nach dieser Schrift hervortreten werde.

Jena, den 18. December 1878.

## I n h a l t.

I. Erklärung der Bezeichnungen.	Seite
§ 1. Buchstaben und andere Zeichen . . . . .	1
Das Urtheil.	
§ 2. Beurtheilbarkeit eines Inhaltes. Inhaltstrich, Urtheilstrich . . . . .	1
§ 3. Subject und Prädikat. Begrifflicher Inhalt. . . . .	2
§ 4. Allgemeine, besondere; vernehmende; kategorische, hypothetische, disjunctive; apodiktische, assertorische, problematische Urtheile . . . . .	4
Die Bedingtheit	
§ 5. Wenn. Bedingungsstrich . . . . .	5
§ 6. Der Schluss. Die Aristotelischen Schlussweisen . . . . .	7
Die Verneinung.	
§ 7. Verneinungsstrich. Oder, entweder — oder, und, aber, und nicht, weder — noch . . . . .	10
Die Inhaltsgleichheit	
§ 8. Nothwendigkeit eines Zeichens für die Inhaltsgleichheit, Einführung eines solchen . . . . .	13
Die Function.	
§ 9. Erklärung der Wörter „Function“ und „Argument“, Functionen mehrer Argumente. Argumentstellen. Subject, Object . . . . .	15
§ 10. Gebrauch der Buchstaben als Functionenzeichen. „A hat die Eigenschaft $\phi$ .“ „B steht in der $\psi$ -Beziehung zu A.“ „B ist Ergebnis einer Anwendung des Verfahrens $\psi$ auf den Gegenstand A.“ Das Functionenzeichen als Argument . . . . .	18
Die Allgemeinheit	
§ 11. Deutsche Buchstaben. Die Hölzung des Inhaltstriches. Er-	