Ontologischer Beweis[1]

<u>Ontologischer Beweis</u> <u>Feb 10, 1970</u>

<u>$P(\varphi)$</u> φ is positive (or $\varphi \in P$)

<u>At. 1</u> $P(\varphi) . P(\psi) \supset P(\varphi . \psi)$ • <u>At 2</u> $P(\varphi) \vee P(\sim\varphi)$

<u>Df 1</u> $G(x) \equiv (\varphi)[P(\varphi) \supset \varphi(x)]$ (God)

<u>Df 2</u> $\varphi \text{ Ess. } x \equiv (\psi)[\psi(x) \supset N(y)[\varphi(y) \supset \psi(y)]]$ (Essence of x)

$p \supset_N q \;=\; N(p \supset q)$ Necessity

<u>At 2</u> $P(\varphi) \supset N P(\varphi)$
$\sim P(\varphi) \supset N \sim P(\varphi)$ } because it follows from the nature of the property

Th. $G(x) \supset G \text{ Ess. } x$

<u>Df.</u> $E(x) \equiv (\varphi)[\varphi \text{ Ess } x \supset N \exists x\, \varphi(x)]$ necessary Existence

<u>Ax 3</u> $P(E)$

<u>Th.</u> $G(x) \supset N(\exists y)\, G(y)$

hence $(\exists x) G(x) \supset N(\exists y)\, G(y)$

" $M(\exists x) G(x) \supset M N(\exists y)\, G(y)$ M = possibility

" $\supset N(\exists y)\, G(y)$

any two essences of x are <u>nec. equivalent</u>

exclusive or * and for any number of summands

$M(\exists x) \cdot G(x)$ means the system of all pos. props. is compatible. This is true because of:

Ax 4: $P(\varphi) \cdot \varphi \supset_N \psi : \supset P(\psi)$ which impl { $x = x$ is positive; $x \neq x$ is negative }

But if a system S of pos. props. were incons. it would mean that the sum prop. s (which is positive) would be $x \neq x$.

Positive means positive in the moral aesth. sense (independently of the accidental structure of the world). Only then the ax. true. It may also mean pure "attribution" as opposed to "privation" (or containing privation). This interpret. [illegible] proof

If φ pos. not: $(x) N \sim \varphi(x)$. Otherwise: $\varphi(x) \supset_N x \neq x$ hence $x \neq x$ [illegible] $x = x$ [illegible] Ax 4 or the [illegible]

X i.e. the normal form in terms of elem. prop. contains a member without negation.

JOHANNES CZERMAK*

Abriß des ontologischen Argumentes

„Gott existiert, weil die Mathematik widerspruchsfrei ist, und der Teufel existiert, weil wir es nicht beweisen können" – dieses Zitat schreibt Lorenzen [1962], 132, dem Mathematiker André Weil im Zusammenhang mit Gödels zweitem Unvollständigkeitssatz zu, Kline [1980], 261, legt eine entsprechende englische Formulierung Hermann Weyl in den Mund. Im folgenden aber beziehen wir uns mit dem Ausdruck „Gödelscher Beweis" nicht auf diesen Gottes- und Teufelsbeweis, sondern auf einen ontologischen Beweis, der sich, datiert mit 10. Februar 1970, in Gödels Nachlaß fand und in dem vorliegenden Band auf den vorhergehenden Seiten abgedruckt ist. Eine von Dana Scott, mit dem Gödel im Februar 1970 diesen Beweis diskutierte, im Herbst 1971 in einem Seminar in Princeton erstmals öffentlich präsentierte Version zirkulierte einige Zeit unter daran interessierten Logikern und Philosophen, manche Kopien versehen mit einer etwas irreführenden einleitenden Bemerkung von einem J.R.B. (Es ist sehr zweifelhaft, daß „Gödel spent his later years proving the existence of God", auch wenn Gödel den Beweis anscheinend durchaus ernstgenommen hat und eine postume Veröffentlichung sicherstellen wollte.) In der Folgezeit entstanden einige Arbeiten zu Gödels Beweis, z.B. Atlas [1984], Sobel [1987] (hier sind auch Dana Scotts und Gödels eigene Version erstmals im Druck veröffentlicht), Essler et al. [1987], Christian [1989], Perzanowski [1991], Kutschera [1991], Muck [1992], Hájek [2000] – diese Liste ist nicht vollständig. Ziel der folgenden Ausführungen ist es nicht, einen weiteren originellen Beitrag zu der Problematik dieses Beweises zu liefern, sondern einige philosophiehistorische Hintergrundinformationen, eine ausführliche Darstellung des Beweises und einige kleine Betrachtungen dazu anzubieten, um dem mit Philosophie oder mit Logik weniger vorbelasteten Leser in gleicher Weise den Zugang zu erleichtern.

Zur Geschichte des ontologischen Argumentes

Die Tradition des „ontologischen Argumentes" für die Existenz Gottes geht bekanntlich auf Anselm von Canterbury (1033–1109) zurück. In den ersten vier Kapiteln seiner Schrift *Proslogion*, dem klassischen Text schlechthin, geschrieben 1077/78, versucht Anselm, aus dem Begriff eines vollkommenen Wesens auf das Dasein Gottes zu schließen. Wir zitieren die zentrale Passage aus dem 2. Kapitel (Anselm [1966], 204f.):

> So gib mir nun, o Herr, der Du dem Glauben auch die Einsicht verleihst, gib mir, so weit Du es als zuträglich weißt, die Erkenntnis des Verstandes, daß Du bist, wie wir glauben, und daß Du das bist, was wir glauben. Wir glauben aber von Dir, daß über Dich hinaus Größeres nicht gedacht werden kann. Oder gibt es etwa kein solches Wesen, weil der Tor in seinem Herzen spricht: es ist kein Gott? Aber selbst dieser Tor versteht meine Worte, wenn ich sage: etwas, worüber hinaus Größeres nicht gedacht werden kann; und was er versteht, ist in seinem Erkennen, auch wenn er nicht versteht, daß es dieses Etwas wirklich gibt. Es ist zweierlei, ob eine Sache im Erkennen sei, oder ob erkannt werde, daß die Sache (in Wirklichkeit da) sei. Wenn ein Maler sich ein Bild ausdenkt, so hat er dieses in seinem Denken, aber er kann es nicht als daseiend erkennen, da er es noch nicht gemacht hat. Hat er es aber gemalt, so hat er es

* Institut für Mathematik, Universität Salzburg, Hellbrunnerstraße 34, A - 5020 Salzburg; Email: johannes.czermak@sbg.ac.at

sowohl in seinem Denken, als auch erkennt er, daß das von ihm Gemachte (wirklich da) sei. Also wird auch der Tor davon überzeugt sein, daß es wenigstens in seinem Denken etwas gebe, worüber hinaus Größeres nicht gedacht werden kann; denn er versteht, was er hört, und alles, was verstanden wird, ist im Verstande. Aber das, worüber hinaus Größeres nicht gedacht werden kann, kann nicht nur im Denken sein. Ist es nämlich nur in unserem Denken, so kann man sich es auch als wirklich seiend vorstellen; das aber ist mehr (als bloß in Gedanken wirklich sein). Wenn also das, worüber hinaus Größeres nicht gedacht werden kann, nur im Denken ist, so ist eben das, worüber hinaus Größeres nicht gedacht werden kann, etwas, über das hinaus etwas Größeres denkbar ist. Dies ist aber offenbar unmöglich. Daher ist zweifellos etwas, worüber hinaus Größeres nicht gedacht werden kann, sowohl dem Denken als der Sache nach wirklich.

Anselms Beweis wurde auch in der modernen Theologie und Philosophie vielfach untersucht und schon oft mit Hilfe der modernen formalen Logik analysiert.[1] Bereits zu Anselms Lebzeiten kritisierte der Mönch Gaunilo, daß man mit einer analogen Argumentation die Existenz einer vollkommenen Insel beweisen könnte (die Auseinandersetzung Anselm-Gaunilo ist in Plantinga [1965] abgedruckt). Auch Thomas von Aquin verwirft den Beweis und begründet dies in seiner *Summa Theologica* (*Liber I, Quaestio 2*) wie folgt (Thomas [1982], 39):

Nicht jeder versteht unter „Gott" notwendig etwas, über das hinaus nichts Größeres gedacht werden kann, denn manche haben sich Gott sogar als Körper vorgestellt. Aber auch zugegeben, daß jedermann unter dem Ausdruck „Gott" ein Wesen verstehe, über das hinaus nichts Größeres gedacht werden kann, so folgt daraus noch nicht, daß man dieses durch den Namen „Gott" bezeichnete Wesen auch als wirklich seiend erkenne, sondern nur, daß es sich in unserem Denken findet. Wollte man weiter schließen, jenes Wesen müsse auch in Wirklichkeit da sein, so müßte vorher feststehen, daß es in der Wirklichkeit selbst etwas gibt, über das hinaus Größeres nicht gedacht werden kann. Das geben aber die Leugner des Daseins Gottes nicht zu.

In seiner 5. *Meditation* revitalisiert Descartes (1596–1650) den Beweis (Descartes [1959], 119ff, vgl. auch Anscombe [1987]). Auch Leibniz mißt ihm sehr große Bedeutung zu. So schreibt er in den *Neuen Abhandlungen über den menschlichen Verstand, IV. Buch, 10. Kapitel* (hier die deutsche Übersetzung zitiert nach Leibniz [1961], 439):

Die Scholastiker (ohne selbst ihren Doctor Angelicus auszunehmen) haben diesen Beweis verachtet und ihn für einen Paralogismus gehalten, womit sie sehr unrecht hatten; und Descartes, der die scholastische Philosophie lange genug am Jesuitenkolleg von La Flèche studiert hatte, war sehr im Recht, diesen Beweis wiederherzustellen. Er ist kein Paralogismus, sondern ein vollkommener Beweis, der etwas voraussetzt, was noch bewiesen werden müßte, um ihm mathematische Evidenz zu verleihen. Er setzt nämlich stillschweigend voraus, daß diese Idee eines ganz großen, ganz vollkommenen Wesens möglich ist und keinen Widerspruch einschließt. Nun ist es schon etwas, daß man durch diese Bemerkung beweist, daß *Gott existiert, gesetzt, daß er möglich ist*, was ein Vorrecht allein der Gottheit ist. Man hat recht, die Möglichkeit jedes Wesens und vor allem die Gottes solange vorauszusetzen, bis jemand das Gegenteil beweist. Derart liefert dieses metaphysische Argument schon einen beweiskräftigen moralischen Schluß, der besagt, daß wir nach dem gegenwärtigen Stand unserer Erkenntnis urteilen müssen, daß Gott existiert, und in Überstimmung damit handeln müssen. Es wäre jedoch zu wünschen, daß gelehrte Männer den Beweis mit strenger mathematischer Evidenz durchführen würden, und ich glaube, anderorts etwas gesagt zu haben, was dazu dienen kann.

Hat Gödel sich durch den letzten hier zitierten Satz angesprochen gefühlt? Hao Wang [1987] schreibt auf S.195: „According to Gödel, he first got his idea of this proof in reading Leibniz",

1 Vgl. etwa Barth [1931]; Findlay [1948]; Scholz [1969]; Malcolm [1960] ; Hartshorne [1965]; Harrison [1970]; Adams [1971], Barnes [1972], Gombocz [1974], Kutschera [1991], Ricken [1991], Meixner [1992]; diese Liste ist bei weitem nicht vollständig.

und auf S.1: „It appears that Gödel identifies himself with Leibniz more than with anybody else". Aber wo hat Leibniz etwas gesagt, was einem strengen mathematischen Beweis dienen kann? In seiner Monadologie (Leibniz [1979], 22f) heißt es lediglich:

41. Daraus folgt dann, daß Gott absolut vollkommen ist. Vollkommenheit ist nichts anderes als die Größe der positiven Realität im genauen Sinn, indem man bei den endlichen Dingen die Grenzen oder Schranken beiseite setzt. Wo gar keine Schranken sind, d.h. in Gott, ist die Vollkommenheit absolut unendlich. ...

44. Wenn es nämlich eine Realität in den Essenzen oder Möglichkeiten, oder auch in den ewigen Wahrheiten gibt, so muß diese Realität in etwas Existierendem und Wirklichem gegründet sein, folglich in der Existenz des notwendigen Wesens, bei welchem die Essenz die Existenz in sich schließt, oder bei dem es hinreicht, möglich zu sein, um wirklich zu sein.

45. Somit hat Gott (oder das notwendige Wesen) allein dieses Vorrecht, daß er notwendig existiert, wenn er möglich ist. Da nun nichts die Möglichkeit dessen hindern kann, was keine Schranken, keine Verneinung und folglich auch keinen Widerspruch in sich schließt, so ist dies allein schon hinreichend, um die Existenz Gottes a priori zu erkennen. ...

Der folgende Text gibt wieder, was Leibniz 1676 Spinoza vorgetragen hat (da mir keine deutsche Übersetzung zugänglich ist und ich meiner diesbezüglichen Kompetenz mißtraue, hier das lateinische Original zitiert nach Gerhardt [1961], 261f.):[2]

Quod Ens Perfectissimum existit.

Perfectionem voco omnem qualitatem simplicem quae positiva est et absoluta, seu quae quicquid exprimit, sine ullis limitibus exprimit.

Qualitas autem ejusmodi quia simplex est, ideo est irresolubilis sive indefinibilis, alioqui enim vel non una erit simplex qualitas, sed plurium aggregatum, vel si una erit, limitibus circumscripta erit, adeoque per negationes ulterioris progessus intelligetur, contra hypothesin, assumta est enim pure positiva.

Ex his non est difficile ostendere, *omnes perfectiones esse compatibiles inter se*, sive in eodem esse posse subjecto.

Nam sit propositio ejusmodi:

***A* et *B* sunt incompatibiles.**

(intelligendo per A et B duas ejusmodi formas simplices sive perfectiones, idemque est si plures assumantur simul) patet eam non posse demonstrari sine resolutione terminorum A et B, alterutrius vel utriusque; alioqui enim natura eorum non ingrederetur ratiocinationem ac posset incompatibilitas aeque

2 Eine englische Übersetzung findet sich in Plantinga [1965], 55f.:

I call every simple quality which is positive and absolute, or expresses whatever it expresses whitout any limits, a *perfection*.

But a quality of this sort, because it is simple, is therefore irresolvable or indefinable, for otherwise, either it will not be a simple quality but an aggregate of many, or, if it is one, it will be circumscribed by limits and so be known through negations of further progress contrary to the hypothesis, for a purely positive quality was assumed.

From these considerations it is not difficult to show that *all perfections are compatible with each other* or can exist in the same subject.

For let the proposition be of this kind:

A and B are incompatible

(for understanding by A and B two simple forms of this kind or perfections, and it is the same if more are assumed like them), it is evident that it cannot be demonstrated without the resolution of the terms A and B, of each or both; for otherwise their nature would not enter into the ratiocination and the incompatibility could be demonstrated from these forms.

But it might certainly be demonstrated by these if it were true, because it is not true *per se*, for all propositions necessarily true are either demonstrable or known *per se*. Therefore, this proposition is not necessarily true.

It is granted, therefore, that either a subject of all perfections or the most perfect being can be known.

Whence it is evident that it also exists, since existence is contained in the number of the perfections.

de quibusvis aliis rebus ac de ipsis demonstrari. Atqui (ex hypothesi) sunt irresolubiles. Ergo haec propositio de ipsis demonstrari non potest.

Posset autem utique de ipsis demonstrari si vera esset, quia non est per se vera, omnes autem propositiones necessario verae sunt aut demonstrabiles, aut per se notae. Ergo necessario vera non est haec propositio. Sive non est necessarium ut A et B sint in eodem subjecto, non possunt ergo esse in eodem subjecto et cum eadem sit ratiocinatio de quibuslibet aliis ejusmodi qualitatibus assumtis, ideo compatibiles sunt omnes perfectiones.

Datur ergo sive intelligi potest subjectum omnium perfectionum, sive Ens perfectissimum.

Unde ipsum quoque existere patet, cum in numero perfectionum existentia contineatur.

Man beachte, daß Vollkommenheiten hier definiert werden als einfache, positive und absolute Qualitäten, die aus diesem Grund nicht miteinander unverträglich sein können, ihre Konjunktion somit konsistent ist, und vergleiche dies mit Gödels erstem Axiom, mit der Bemerkung auf der zweiten handschriftlichen Seite oben, daß „*$M(\exists x)G(x)$ means: the system of all positive properties is compatible*“, und mit dem Hinweis in der Fußnote auf die „*normal form in terms of elementary propositions.*“ – Das obige Zitat von Leibniz schließt mit der Feststellung, daß die Existenz eine der Vollkommenheiten ist.

Der Einwand Kants, daß Existenz kein reales Prädikat sei, schien den ontologischen Beweis erledigt zu haben. In der *Kritik der reinen Vernunft*, 2. Aufl. 1787, liest man auf S. 626ff. („*Von der Unmöglichkeit eines ontologischen Beweises vom Dasein Gottes*“, hier zitiert nach Kant [1781]):

Sein ist offenbar kein reales Prädikat, d.i. ein Begriff von irgend etwas, was zu dem Begriffe eines Dinges hinzukommen könne. Es ist bloß die Position eines Dinges, oder gewisser Bestimmungen an sich selbst. Im logischen Gebrauche ist es lediglich die Kopula eines Urteils. Der Satz: *Gott ist allmächtig*, enthält zwei Begriffe, die ihre Objekte haben: Gott und Allmacht; das Wörtchen: *ist*, ist nicht noch ein Prädikat oben ein, sondern nur das, was das Prädikat *beziehungsweise* aufs Subjekt setzt. Nehme ich nun das Subjekt (Gott) mit allen seinen Prädikaten (worunter auch die Allmacht gehöret) zusammen, und sage: *Gott ist*, oder es ist ein Gott, so setze ich kein neues Prädikat zum Begriffe von Gott, sondern nur das Subjekt an sich selbst mit allen seinen Prädikaten, und zwar den *Gegenstand* in Beziehung auf meinen *Begriff*. Beide müssen genau einerlei enthalten, und es kann daher zu dem Begriffe, der bloß die Möglichkeit ausdrückt, darum, daß ich dessen Gegenstand als schlechthin gegeben (durch den Ausdruck: er ist) denke, nichts weiter hinzukommen. Und so enthält das Wirkliche nichts mehr als das bloß Mögliche. Hundert wirkliche Taler enthalten nicht das Mindeste mehr, als hundert mögliche. Denn, da diese den Begriff, jene aber den Gegenstand und dessen Position an sich selbst bedeuten, so würde, im Fall dieser mehr enthielte als jener, mein Begriff nicht den ganzen Gegenstand ausdrücken, und also auch nicht der angemessene Begriff von ihm sein. Aber in meinem Vermögenszustande ist mehr bei hundert wirklichen Talern, als bei dem bloßen Begriffe derselben, (d.i. ihrer Möglichkeit). Denn der Gegenstand ist bei der Wirklichkeit nicht bloß in meinem Begriffe analytisch enthalten, sondern kommt zu meinem Begriffe (der eine Bestimmung meines Zustandes ist) synthetisch hinzu, ohne daß, durch dieses Sein außerhalb meinem Begriffe, diese gedachte hundert Taler selbst im mindesten vermehrt werden.

Wenn ich also ein Ding, durch welche und wie viel Prädikate ich will (selbst in der durchgängigen Bestimmung), denke, so kommt dadurch, daß ich noch hinzusetze, dieses Ding *ist*, nicht das mindeste zu dem Dinge hinzu.

Auch Frege stellt lapidar fest: „Weil Existenz Eigenschaft des Begriffes ist, erreicht der ontologische Beweis von der Existenz Gottes sein Ziel nicht.“ (*Grundlagen der Arithmetik*, § 53).

Als in unserem Jahrhundert neuerlich über Existenzprädikate (auch im Zusammenhang mit der Entwicklung der sog. *Free Logic*) diskutiert wurde, erwachte wieder das Interesse am ontologischen Beweis vgl. z.B. Rescher [1959], Hintikka [1969], Gombocz [1974], bis hin zu Smullyan [1983]. Zudem lieferte die Modallogik Hilfsmittel zur Formalisierung z.B. Hartshorne [1961], [1962] (wir geben auch diesen Beweis, den Gödel gekannt hat, unten wieder), und Harrison [1970]. Gödels Beweis stellt meines Erachtens den Versuch dar, unter Umgehung der Einwände von Kant und Frege den Wunsch von Leibniz nach einem Beweis mit strenger mathematischer Evidenz zu verwirklichen.

Zur Modallogik

Den Anstoß zu ihrer modernen Entwicklung (nach Blütezeiten in Antike und Scholastik) gab C. I. Lewis (1883–1964), als er fünf aussagenlogische Axiomensysteme („S1“ bis „S5“ genannt) für eine „strikte“ Implikation entwarf. Gödel bemerkte [1933], daß man das System *S4* wie folgt axiomatisieren kann (es ist $\Box$ als „notwendig“, $\Diamond$ als „möglich“ zu lesen, wobei man $\Diamond A$ als Abkürzung für $\neg\Box\neg A$ auffassen kann):

Axiome:

(1) $\Box A \rightarrow A$

(2) $\Box(A \rightarrow B) \rightarrow (\Box A \rightarrow \Box B)$

(3) $\Box A \rightarrow \Box\Box A$

Regel:

(4) $\dfrac{A}{\Box A}$ („Necessierungsregel“)

Dazu kommen noch hinreichend viele Axiome und Regeln der (klassischen) Aussagen- oder Prädikatenlogik. Man erhält das stärkere System *S5*, wenn man das Axiomenschema (3) ersetzt durch *Beckers Prinzip*

(5) $\Diamond\Box A \rightarrow \Box A$

(es ist dann (3) herleitbar). Die Necessierungsregel ist motiviert durch den Umstand, daß man in einem rein logischen Axiomensystem nur „logisch notwendige Wahrheiten“ herleiten kann, sie verliert aber ihren Sinn bei uneingeschränkter Anwendung in Theorien mit kontingenten Eigenaxiomen. Diese Frage wird uns im folgenden noch beschäftigen; Gödel verwendet in seinem Beweis auch die Regeln

(6) $\dfrac{A \rightarrow B}{\Box A \rightarrow \Box B}$

(7) $\dfrac{A \rightarrow B}{\Diamond A \rightarrow \Diamond B}$,

deren Zulässigkeit sich mithilfe von (2) und der Necessierungsregel (4) unmittelbar ergibt. Man kann weiters umgekehrt die Regel (4) durch (6) bzw. (7) ersetzen, wenn es wenigstens eine herleitbare Formel der Form $\Box A$ gibt.

Der oben erwähnte ontologische Beweis von Hartshorne [1962], 50f., läßt sich nun, etwas vereinfacht, im System *S5* wie folgt durchführen (es stehe V für „vollkommen“):

(8) $\Diamond\exists x\, V(x)$ Annahme: Vollkommenes ist möglich

(9) $\exists x\, V(x) \rightarrow \Box\exists x\, V(x)$ *Anselms Prinzip* (Annahme: Wenn Vollkommenes existiert, dann existiert es notwendigerweise)

(10) $\Diamond\exists x\, V(x) \rightarrow \Diamond\Box\exists x\, V(x)$ aus (9) mit Regel (7)

(11)	$\Diamond\Box\exists x V(x) \rightarrow \Box\exists x V(x)$	ist ein *S5*-Axiom (5)
(12)	$\Box\exists x V(x)$	mit Modus ponens aus (8), (10) und (11)

Man hat eingewendet, daß in den Annahmen (8) und (9), die natürlich ihrerseits noch zu begründen wären, ein anderer Notwendigkeitsbegriff steckt als der der logischen Notwendigkeit, wie er durch das System *S5* repräsentiert wird (vgl. etwa Hick [1967]). Hartshornes Argumentation findet sich in der hier angegebenen vereinfachten Form als Bruchstück in Gödels Beweis wieder.

Die Stärke des Systems *S5* zeigt sich nicht nur in der Möglichkeit, von (8) und (9) auf (12) zu schließen, sondern auch in der Herleitbarkeit der sogenannte *Barcanformel*

(13) $\forall x \Box A(x) \leftrightarrow \Box\forall x A(x)$

bzw. (damit äquivalent)

(14) $\Diamond\exists x A(x) \leftrightarrow \exists x \Diamond A(x)$

womit insbesonders eine Existenzbehauptung aus einer Möglichkeitsbehauptung folgen kann. Zur Modallogik gibt es in deutscher Sprache das klassische, wenn auch nicht mehr ganz zeitgemäße Lehrbuch Hughes / Cresswell [1978].

Ausführliche Darstellung des Gödelschen Beweises

Zwecks übersichtlicheren Verweisens geben wir zunächst eine Zusammenstellung der Axiome, Definitionen und Theoreme aus Gödels handschriftlicher Version, benützen dabei allerdings eine heute eher übliche logische Symbolik.

Es sei P eine einstellige Prädikatenkonstante zweiter Stufe; $P(\varphi)$ bedeute: „φ ist eine positive Eigenschaft".

Axiom 1: $P(\varphi) \wedge P(\psi) \rightarrow P(\varphi \wedge \psi)$

Gödel fügt in einer Fußnote hinzu: „und für jede Anzahl von Summanden". Er führt zwei Axiome 2 an; wir spalten das erste dieser beiden in zwei auf.

Axiom 1°: $P(\varphi) \vee P(\neg\varphi)$

In einer weiteren Fußnote weist Gödel darauf hin, daß es sich um das ausschließende Oder handeln soll – wir fügen daher noch hinzu

Axiom 1*: $\neg(P(\varphi) \wedge P(\neg\varphi))$

Dana Scott verwendet in seiner Aufzeichnung die Formel $\neg P(\varphi) \leftrightarrow P(\neg\varphi)$ anstelle der Axiome 1° und 1*.

Definition 1:	$G(x) \leftrightarrow \forall\varphi(P(\varphi) \rightarrow \varphi(x))$	*(Gott)*
Definition 2:	$\varphi Ess.x \leftrightarrow \forall\psi(\psi(x) \rightarrow \Box\forall y(\varphi(y) \rightarrow \psi(y)))$	*(Essenz von x)*
Axiom 2a:	$P(\varphi) \rightarrow \Box P(\varphi)$	
Axiom 2b:	$\neg P(\varphi) \rightarrow \Box\neg P(\varphi)$	
Theorem 1:	$G(x) \rightarrow G\,Ess.x$	
Definition 3:	$E(x) \leftrightarrow \forall\varphi(\varphi Ess.x \rightarrow \Box\exists y\,\varphi(y))$	*(Notwendige Existenz)*
Axiom 3:	$P(E)$	
Theorem 2:	$G(x) \rightarrow \Box\exists y\,G(y)$	
Axiom 4:	$P(\varphi) \wedge \Box(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow P(\psi)$	

Theorem 3: $\Diamond\exists x\,G(x)$

Theorem 4: $\Box\exists x\,G(x)$

Im folgenden kennzeichnen wir Herleitungsschritte, die nach Gesetzen der Aussagenlogik, der Prädikatenlogik erster oder zweiter Stufe erfolgen, durch *AL*, *PL1* respektive *PL2*.
Um Theorem 1 zu beweisen, leiten wir zunächst zwei Hilfsformeln her.

(15)	$G(x) \rightarrow (\psi(x) \rightarrow P(\psi))$	
Beweis:	$G(x) \rightarrow \forall\varphi(P(\varphi) \rightarrow \varphi(x))$	Definition 1
	$\rightarrow (P(\neg\psi) \rightarrow \neg\psi(x))$	*PL2*
	$\rightarrow (\psi(x) \rightarrow P(\psi))$	Axiom 1° und *AL*

Dabei haben wir folgende Form des Komprehensionsaxioms benützt:

$$\neg\psi = \lambda x.\neg\psi(x) \quad \text{mit} \quad (\neg\psi)(x) = (\lambda x.\neg\psi(x))(x) \leftrightarrow \neg\psi(x)$$

sowie ein Schema der Prädikatenlogik 2. Stufe: $\forall\varphi F(\varphi) \rightarrow F(\neg\psi)$.

(16)	$P(\psi) \rightarrow \Box\forall y(G(y) \rightarrow \psi(y))$	
Beweis:	$G(y) \rightarrow (P(\psi) \rightarrow \psi(y))$	Definition 1 und *PL2*
	$P(\psi) \rightarrow \forall y(G(y) \rightarrow \psi(y))$	*AL* und *PL1*
	$\Box P(\psi) \rightarrow \Box\forall y(G(y) \rightarrow \psi(y))$	mit Regel (6); wir haben noch kein Eigenaxiom in der Herleitung benützt
	$P(\psi) \rightarrow \Box P(\psi)$	dies ist Axiom 2a; nun *AL*

Theorem 1: $G(x) \rightarrow G\,Ess.x$

Beweis: $G(x) \rightarrow (\psi(x) \rightarrow \Box\forall y(G(y) \rightarrow \psi(y)))$ aus (15) und (16) mit *AL*.

Nun universelle Generalisierung über ψ, das ist *PL2*, und Definition 2.

Theorem 2: $G(x) \rightarrow \Box\exists y\,G(y)$

Beweis:	$G(x) \rightarrow \forall\varphi(P(\varphi) \rightarrow \varphi(x))$	Definition 1
	$\rightarrow (P(E) \rightarrow E(x))$	*PL2*
	$\rightarrow E(x)$	Axiom 3 und *AL*
	$\rightarrow \forall\varphi(\varphi Ess.x \rightarrow \Box\exists y\varphi(2x))$	Definition 3
	$\rightarrow (G\,Ess.x \rightarrow \Box\exists y\,G(2x))$	Definition 1 und *PL2*
	$\rightarrow \Box\exists y\,G(2x)$	Theorem 1 und *AL*.

Wir haben hier wiederum das Komprehensionsaxiom benützt:

$$E = \lambda x.E(x) = \lambda x.\forall\varphi(\varphi Ess.x \rightarrow \Box\exists y\,\varphi(y))$$
$$G = \lambda x.G(x) = \lambda x.\forall\varphi(P(\varphi) \rightarrow \varphi(x))$$

mit

$$E(x) \leftrightarrow (\lambda x.\forall\varphi(\varphi Ess.x \rightarrow \Box\exists y\,\varphi(y)))(x)$$
$$G(x) \leftrightarrow (\lambda x.\forall\varphi(P(\varphi) \rightarrow \varphi(x)))(x)$$

und zwar wieder im Zusammenhang mit dem *PL2*-Schema $\forall\varphi F(\varphi) \rightarrow F(\tau)$ für Prädikatsterme τ wie E und G. (Wir verwenden „E" und „$2x$" somit zweideutig, als Abkürzungen für Formeln und als Bezeichnungen für Prädikatsterme.)

Wir beweisen einen weiteren „Hilfssatz":

(17) $\Diamond\exists x\,G(x) \rightarrow \Box\exists y\,G(y)$

Beweis:	$\exists x\,G(x) \rightarrow \Box\exists y\,G(y)$	mit *PL1* aus Theorem 2
	$\Diamond\exists x\,G(x) \rightarrow \Diamond\Box\exists y\,G(y)$	mit Regel (7)
	$\Diamond\Box\exists y\,G(y) \rightarrow \Box\exists y\,G(y)$	ist ein *S5*-Axiom (5)

Das war Hartshornes Beweis, vgl. (9) bis (11). Man beachte, daß wir die Regel (7) in einer Herleitung verwendet haben, in der die Eigenaxiome 1°, 2a und 3 benützt worden sind.

Im nun folgenden Beweis werden wir Axiom 4 verwenden – allerdings haben wir die Schreibweise $\Box(\varphi \rightarrow \psi)$ noch nicht erklärt.

Definition 4a: $\Box(\varphi \rightarrow \psi)$ sei $\Box\forall x(\varphi(x) \rightarrow \psi(x))$

Definition 4b: $\Box(\varphi \rightarrow \psi)$ sei $\forall x\Box(\varphi(x) \rightarrow \psi(x))$

Der Einschub auf der zweiten handschriftlichen Seite von Gödels Manuskript weist darauf hin, daß Gödel die Definition 4b im Auge hatte; wegen der in S5 herleitbaren Barcanformel (13) sind beide Versionen jedoch logisch gleichwertig; wir entscheiden uns für Definition 4a.

Definition 5: $I = \lambda x.\,x = x$ und $\neg I = \lambda x.\,\neg x = x$

Es gilt aufgrund des Komprehensionsaxioms $(\neg I)(x) \leftrightarrow \neg I(x)$. Gödel schreibt nach Axiom 4, daß es $P(I)$ impliziert, ebenso wie:

(18) $\neg P(\neg I)$

Beweis:	$\forall x(\neg x = x \rightarrow x = x)$	*PL1*
	$\forall x(\neg I(x) \rightarrow I(x))$	Komprehensionsaxiom
	$\Box\forall x(\neg I(x) \rightarrow I(x))$	Necessierungsregel (4)
	$\Box(\neg I \rightarrow I)$	Definition 4a
	$P(\neg I) \rightarrow P(I)$	Axiom 4 und *AL*
	$P(I)$	Axiom 1° und *AL*
	$\neg P(\neg I)$	Axiom 1* und *AL*

Als weitere Hilfsformel benötigen wir:

(19) $P(\varphi) \rightarrow \Diamond\exists x\,\varphi(x)$

Beweis:	$\forall x\neg\varphi(x) \rightarrow \forall x(\varphi(x) \rightarrow \neg x = x)$	*PL1*
	$\Box\forall x\neg\varphi(x) \rightarrow \Box\forall x(\varphi(x) \rightarrow \neg I(x))$	Regel (6) und Komprehensionsaxiom
	$\Box\forall x\neg\varphi(x) \rightarrow \Box(\varphi \rightarrow \neg I)$	Definition 4a
	$P(\varphi) \wedge \Box\forall x\neg\varphi(x) \rightarrow P(\neg I)$	*AL* und Axiom 4
	$P(\varphi) \rightarrow \neg\Box\forall x\neg\varphi(x)$	mit (18) und *AL*

Um die Hilfsformel

(20) $P(G)$

zu beweisen, benötigen wir eine inhaltliche Überlegung: Bisher haben wir Axiom 1 noch gar nicht benützt. Der dortige Zusatz „*und für jede Anzahl von Summanden*" scheint eine Formulierung der Form

Axiom 1': $\forall\varphi(F(\varphi) \rightarrow P(\varphi)) \rightarrow P(\prod_{F(\varphi)}\varphi)$

nahezulegen, wobei $\prod_{F(\varphi)}\varphi = \lambda x.\forall\varphi(F(\varphi) \rightarrow \varphi(x))$

woraus sich insbesondere $\prod_{P(\varphi)}\varphi = \lambda x.\forall\varphi(P(\varphi) \rightarrow \varphi(x)) = G$ ergibt,

und mit Axiom 1' dann $\forall\varphi(P(\varphi) \rightarrow P(\varphi)) \rightarrow P(G)$

und damit die Formel (20), die in der Dana-Scott-Version gleich als Axiom auftaucht. (Sie ist offensichtlich mit Axiom 1' logisch äquivalent und anscheinend stärker als Axiom 1, wenn dieses nur auf zwei, d. h. endlich viele Summanden bezogen wird.)

Mit obigen Hilfsformeln erhalten wir:

Theorem 3: $\Diamond\exists x\,G(x)$ (Ergibt sich nun sofort aus (19) und (20).)

Theorem 4: $\Box\exists x\,G(x)$ (Mit Modus ponens aus (17) und Theorem 3, Endresultat.)

Betrachten wir kurz noch einmal das erwähnte Problem der Anwendung der Necessierungsregeln (es sind (4), (6) und (7) miteinander äquivalent, da $\Box P(E)$ mit Modus ponens aus den Axiomen 2a und 3 herleitbar ist): sie wurden in Herleitungen mit den Eigenaxiomen 1°, 2a und 3 benützt. Übrigens wurde Axiom 2b nirgends explizit verwendet; man erhält als „Zusammenfassung" von 2a und 2b

$$\Diamond P(\varphi) \rightarrow \Box P(\varphi)$$

Nun sind in *S5* die Formeln

$$(\Diamond A \rightarrow \Box A) \leftrightarrow \Box(\Diamond A \rightarrow \Box A)$$

$$(A \rightarrow \Box A) \wedge (B \rightarrow \Box B) \rightarrow (A \vee B \leftrightarrow \Box(A \vee B))$$

herleitbar, somit sind die Eigenaxiome 1° und 2 mit

$$\Box(P(\varphi) \vee P(\neg\varphi)) \quad \text{bzw.} \quad \Box(\Diamond P(\varphi) \rightarrow \Box P(\varphi))$$

logisch äquivalent, also nicht „kontingent". Entsprechendes gilt auch für

$$\neg P(\varphi) \leftrightarrow P(\neg\varphi)$$

(eine Formel, die Dana Scott anstelle der Axiome 1° und 1* verwendet), und für die Axiome 1' und 4. Somit ist die Necessierungsregel in diesem System allgemein zulässig.

Das formale System

Bei der Rekonstruktion des logischen Rahmens gehen wir möglichst restriktiv vor. Insbesonders beschränken wir Abstraktionsterme und das Komprehensionsaxiom

$$(\lambda x.A)(y) \leftrightarrow A^x_y$$

(wobei A^x_y aus A durch Substitution von y für die freien Vorkommnisse von x in A unter Beachtung der üblichen Vorsichtsmaßnahmen entsteht) auf die tatsächlich im Beweis vorkommenden Fälle und führen zu diesem Zweck „G", „E" und „Ix" als eigene Prädikatsterme ein. (Allerdings haben wir keinen direkten Anlaß anzunehmen, daß die Bildung von Abstraktionstermen von Gödel selbst nicht frei zugelassen worden wäre, zumal in den entsprechenden Formeln alles Mögliche vorkommt, nämlich $\neg, \rightarrow, =, \Box$ und Quantoren beider Stufen.)

I. Sprache:

I.1 *Liste der Grundzeichen*:

Individuenvariable (IV), mitgeteilt durch x, y, z
(1-stellige) Prädikatenvariable erster Stufe (PV), mitgeteilt durch φ, ψ, χ
1-stellige Prädikatenkonstante erster Stufe: G, E, I
1-stellige Prädikatenkonstante zweiter Stufe: P
Logische Zeichen: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, ^{-}, \exists, \forall, =, \Box$
Hilfszeichen: (,)

I.2 *Induktive Definition der Prädikatsterme* (PT) *und Formeln*:

G, E, I und jede PV ist ein PT.
Ist τ ein PT, dann auch $\bar{\tau}$. ($\bar{\tau}$ ist die „Negation" von τ.)
Ist x eine IV und τ ein PT, so ist $\tau(x)$ eine Formel.
Ist τ ein PT, dann ist $P(\tau)$ eine Formel.
Sind x und y IV, dann ist $x = y$ eine Formel.
Sind A und B Formeln, ist x eine IV und φ eine PV, dann sind
$\neg A$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$, $(A \leftrightarrow B)$, $\forall x A$, $\exists x A$, $\forall \varphi A$, $\Box A$ Formeln.

PTe werden im folgenden mit σ oder τ bezeichnet.

I.3 *Abkürzungen*:

D1. $\sigma \leq \tau$ stehe für $\Box \forall x(\sigma(x) \rightarrow \tau(x))$
D2. $\varphi\ Ess.x$ stehe für $\varphi(x) \wedge \forall \psi(\psi(x) \rightarrow \varphi \leq \psi)$

(Wir haben, Dana Scott folgend, die ursprüngliche Gödelsche Definition der Essenz abgeändert, da diese $(\neg I) Ess.x$ abzuleiten gestatten würde, was sicherlich Gödels Intention und der seiner Fußnote in der handschriftlichen Version, wonach je zwei Essenzen von x notwendigerweise äquivalent sind, widerspricht.)

II. Axiome:

II.1 *Axiome der (klassischen) Prädikatenlogik 1. Stufe*
II.2 *Gleichheitsaxiom*: $\forall x\, (x = x)$
II.3 *Axiomenschema der Prädikatenlogik 2. Stufe*: $\forall \varphi F(\varphi) \rightarrow F(\tau)$

II.4 *Modallogische Axiome für S5* (die Formeln (1), (2), (3) und (5))
II.5 *„Komprehensionsaxiome"*:

K1. $\bar{\tau}(x) \leftrightarrow \neg \tau(x)$
K2. $G(x) \leftrightarrow \forall \varphi(P(\varphi) \rightarrow \varphi(x))$
K3. $E(x) \leftrightarrow \forall \varphi(\varphi Ess.x \rightarrow \Box \exists x \varphi(x))$
K4. $I(x) \leftrightarrow x = x$

II.6 *Eigenaxiome*:

A1. $\neg P(\varphi) \leftrightarrow P(\bar{\varphi})$
A2. $\Diamond P(\varphi) \rightarrow \Box P(\varphi)$
A3. $P(E)$
A4. $P(\varphi) \wedge \varphi \leq \psi \rightarrow P(\psi)$
A5. $P(G)$

III. Regeln:

III.1 *Regeln der (klassischen) Prädikatenlogik 1. Stufe*
III.2 *Regel für die universelle Generalisierung auf der 2. Stufe*
III.3 *Necessierungsregel* (als (4), (6) oder (7))

Einige Anmerkungen: Die Wahl der „Komprehensionsaxiome" (es sind eigentlich keine) K1 bis K4 vereinfachen den Beweis etwas; insbes. benötigen wir keine Gleichheitsaxiome auf der 2. Stufe. Wir haben $P(G)$ als Axiom statt 1′ gewählt, um Terme wie $\prod_{P(\varphi)} \varphi$ zu vermeiden. (Diese Formel macht die Definition von G imprädikativ – G wird definiert unter Bezugnahme auf eine Gesamtheit, der es selbst angehört.) Außerdem ist $P(G)$ auf der Basis der anderen Axiome mit unserem Theorem 4, $\Box \exists x\, G(x)$, äquivalent: aus (15) folgt ja sofort $G(x) \rightarrow P(G)$, und damit $P(G)$ aus $\Box \exists x\, G(x)$. Die Umkehrung zeigten wir bereits mit Hilfe von (19) und (17).

Würde man G statt K2 annehmen:

K2a. $G(x) \leftrightarrow \forall \varphi(P(\varphi) \rightarrow \Box \varphi(x))$ oder
K2b. $G(x) \leftrightarrow \forall \varphi \Box(P(\varphi) \rightarrow \varphi(x))$ bzw.
K2c. $G(x) \leftrightarrow \Box \forall \varphi(P(\varphi) \rightarrow \varphi(x))$

(in *S5* sind diese Möglichkeiten wegen A2 gleichwertig), so wäre A3, das ist $P(E)$, überflüssig und der Beweis entsprechend kürzer: wie im Beweis von (19) ergibt sich $P(G) \rightarrow \Diamond \exists x\, G(x)$ mit Hilfe von A1 und A4 wie folgt:

$\forall x \neg G(x) \rightarrow \forall x(Gx \rightarrow \neg x = x)$	*PL1*
$\Box \forall x \neg G(x) \rightarrow \Box \forall x(Gx \rightarrow \bar{I}(x))$	K1, K2 und (6)
$\neg \Diamond \exists x G(x) \rightarrow G \leq \bar{I}$	*S5*, D1
$P(G) \wedge G \leq \bar{I} \rightarrow P(\bar{I})$	A4
$\neg P(\bar{I})$	wie (18), also mit A1
$P(G) \rightarrow \Diamond \exists x G(x)$	mit *AL* aus den letzten drei Formeln

Mit A5 folgt nun $\Diamond \exists x G(x)$; aufgrund von K2a, K2b oder K2c erhält man in *S5* zunächst $\Diamond \exists x \Box G(x)$ und schließlich $\Box \exists x G(x)$. (Allerdings würden hier dann *de-re-Modalitäten*, wie sie im Beweis sonst nirgendwo auftreten, vorkommen – wir haben auch deswegen Definition 4a vorgezogen.)

Übrigens zeigt Hájek [1994], daß $P(E)$ für den Beweis von $\Box\exists x\, G(x)$ notwendig ist, indem er ein „Kripkemodell“ angibt, in dem alle Axiome bis auf $P(E)$ erfüllt sind, $\Box\exists x\, G(x)$ aber falsch ist (woraus nun auch insbesonders folgt, daß $G(x) \to \Box G(x)$ nicht herleitbar sein kann –was ja mit Hilfe von K2a, K2b oder K2c der Fall wäre).

Modelle für das vorgestellte formale System

Ein *Rahmen* K ist ein Tripel $\langle W, D, \mathcal{P}\rangle$, wobei

W eine nichtleere Menge von „*möglichen Welten*“,
D eine nichtleere Menge von *Individuen* und
$\mathcal{P}$ eine Teilmenge der Potenzmenge von D ist.

Eine *Bewertungsfunktion* v für K ist eine 2-stellige Funktion mit folgenden Eigenschaften:

$v(x,\alpha) \in D$	für jede IV x und jedes α aus W
$v(\varphi,\alpha) \subset D$	für jede PV φ und jedes α aus W
$v(G,\alpha) = \bigcap\mathcal{P}$ und $v(I,\alpha) = D$	für jedes α aus W
$v(\bar{\tau},\alpha) = D\setminus v(\tau,\alpha)$	für jeden PT τ und jedes α aus W

(weitere Bedingungen folgen später).

Sind v und v' zwei Bewertungsfunktionen für K, so schreiben wir $v = v'\langle x,\alpha\rangle$, wenn v mit v' überall übereinstimmt mit der eventuellen Ausnahme bei $\langle x,\alpha\rangle$. Analog sei die Schreibweise $v = v'\langle\varphi,\alpha\rangle$ erklärt.

Sei $\mathcal{F}$ die Menge aller Formeln (zunächst ohne „E“). Die Bewertungsfunktion v für K werde mit Werten aus $\{0,1\}$ fortgesetzt auf die Menge $\mathcal{F}\times W$ mit Hilfe der folgenden induktiven Definition über den Formelaufbau:

$$
\begin{aligned}
v(\tau(x),\alpha)=1 &\Leftrightarrow v(x,\alpha)\in v(\tau,\alpha)\\
v(P(\tau),\alpha)=1 &\Leftrightarrow v(\tau,\alpha)\in\mathcal{P}\\
v(x=y,\alpha)=1 &\Leftrightarrow v(x,\alpha)=v(y,\alpha)\\
v(\neg A,\alpha)=1 &\Leftrightarrow v(A,\alpha)=0\\
&\text{usw.}\\
v(\forall x A,\alpha)=1 &\Leftrightarrow v'(A,\alpha)=1 \text{ für alle Bewertungsfunktionen } v' \text{ mit } v'=v\langle x,\alpha\rangle\\
v(\Box A,\alpha)=1 &\Leftrightarrow \forall\beta\in W: v(A,\beta)=1\\
v(\forall\varphi A,\alpha)=1 &\Leftrightarrow v'(A,\alpha)=1 \text{ für alle Bewertungsfunktionen } v' \text{ mit } v'=v\langle\varphi,\alpha\rangle.
\end{aligned}
$$

(Man beachte insbesonders bei dieser letzten Klausel, daß die Bewertungsfunktionen noch weiteren, unten angeführten Bedingungen genügen müssen.) Wir schreiben

$$(K,v,\alpha)\vDash F \quad \text{wenn} \quad v(F,\alpha)=1.$$

Sei $a\in D$ und $A(x)$ eine Formel mit freier IV x. Es sei dann

$$(K,v,\alpha)\vDash A(a)$$

eine Abkürzung für: Es gibt eine Bewertungsfunktion v' mit $v'=v\langle x,\alpha\rangle$, $v'(x,\alpha)=a$ und $(K,v',\alpha)\vDash A(x)$. Wir vervollständigen die Definition der Bewertungsfunktion v für K durch

$$v(E,\alpha)=\{a\in D: (K,v,\alpha)\vDash\forall\varphi(\varphi Ess.\, a\to\Box\exists x\,\varphi(x))\}.$$

Wir schreiben $(K,v)\vDash A$, wenn $(K,v,\alpha)\vDash A$ für jedes α aus W gilt.

Es ist dann $(K,v)\vDash A$ für jedes Axiom A aus der Liste II.1 bis II.5. Wir nennen ein solches Paar (K,v) ein *Modell.*

Für die Gültigkeit der Eigenaxiome A1 bis A5 ergeben sich aus einer naheliegenden Übersetzung folgende Bedingungen für ein Modell $\langle K,v\rangle$:

B1. $M\in\mathcal{P}\Leftrightarrow(D\setminus M)\notin\mathcal{P}$
B2. $\forall\alpha,\beta\leftarrow W: v(\tau,\alpha)\in\mathcal{P}\Leftrightarrow v(\tau,\beta)\in\mathcal{P}$
B3. $v(E,\alpha)\in\mathcal{P}$ für jedes $\alpha\in W$
B4. $v(\tau,\alpha)\in\mathcal{P},\ \forall\beta\in W[v(\tau,\beta)\subset v(\sigma,\beta)]\Rightarrow v(\sigma,\alpha)\in\mathcal{P}$
B5. $\bigcap\mathcal{P}\in\mathcal{P}$

Ein Modell (K,v), das diesen Bedingungen genügt, ist ein Modell für das vorgestellte formale System in dem Sinn, daß $(K,v)\vDash A$ auch für jedes Eigenaxiom A (A1 bis A5) gilt und in der Folge auch für jede in dem formalen System herleitbare Formel A.

Beispiel 1: Sei $K=\langle W,D,\mathcal{P}\rangle$ mit $W=\{\alpha,\beta\}$, $D=\{1,2\}$, $\mathcal{P}=\{\{2\},\{1,2\}\}$ und $v(x,\alpha)=1$, $v(\varphi,\alpha)=\{1\}$, $v(\varphi,\beta)=\emptyset$ gegeben, und weiters sei v derart definiert, daß B1 bis B5 erfüllt sind. Dann gilt

$$(K,v,\alpha)\vDash\Diamond\forall x\neg\varphi(x) \quad\text{und}\quad (K,v,\alpha)\vDash\varphi(x)\wedge\forall\psi(\psi(x)\to\varphi\le\psi))$$

somit $(K,v,\alpha)\vDash\neg E(x)$ und $v(E,\alpha)=\{2\}$. Daher kann die Formel $\forall x E(x)$ nicht herleitbar sein. Insbesonders gilt auch

$$(K,v,\alpha)\vDash\exists x\,\varphi(x)\wedge\neg\Box\exists x\varphi(x),$$

woraus folgt, daß die Modalitäten nicht „kollabieren“.

Natürlich ergibt sich durch die konkrete Angabe eines Modells auch die Konsistenz des vorgestellten Systems.

Beispiel 2: Sei $K=\langle W,D,\mathcal{P}\rangle$, W und D wie in Beispiel 1, $\mathcal{P}=\{\emptyset,\{1\}\}$; es sei v derart definiert, daß neben B1 und B5 auch B2 erfüllt ist.

Es gilt $(K,v,\alpha)\vDash E(2)$: Ist $v(\varphi,\alpha)=\{2\}$ oder $v(\varphi,\alpha)=\{1,2\}$, so ist $v(\varphi,\alpha)\notin\mathcal{P}$, wegen B2 dann auch $v(\varphi,\beta)\notin\mathcal{P}$, insbes. $v(\varphi,\beta)\neq\emptyset$, also $v(\exists x\,\varphi(x),\beta)=1$ und $v(\exists x\,\varphi(x),\alpha)=1$, daher $v(\Box\exists x\,\varphi(x),\alpha)=1$ und $v(E(x),\alpha)=1$, wenn $v(x,\alpha)=2$. Damit gilt aber auch $v(E,\alpha)\notin\mathcal{P}$, somit ist $(K,v,\alpha)\vDash\neg P(E)$ und wegen B2 schließlich auch $(K,v)\vDash\neg P(E)$.

Weiters ist wegen $\bigcap\mathcal{P}=\emptyset$ auch $(K,v)\vDash\Box\neg\exists x\,G(x)$. Dies zeigt, daß man A3 und/oder A4 für den Beweis von $\Box\exists x\,G(x)$ benötigt.

Beispiel 3: Da jede Eigenschaft, die man logischerweise hat, wie eben z.B. die Selbstidentität, positiv ist, folgt, daß es nichts geben kann, was nur negative Eigenschaften hat. Definiert man aber

$$T(x)\leftrightarrow\forall\varphi(\Diamond\exists x\,\varphi(x)\wedge\neg P(\varphi)\to\varphi(x)) \qquad (\text{„}\textit{Teufel}\text{“})$$

so ergibt sich für die Modelle in den Beispielen 1 und 2 $(K,v)\vDash\Box\exists x\,T(x)$. Andererseits ist es nicht schwierig, ein Modell (K,v) anzugeben mit $(K,v)\vDash\Box\neg\exists x\,T(x)$: es sei $W=\{\alpha,\beta\}$, $D=\{1,2,3\}$

und $\mathcal{P}=\{\{1\},\{1,2\},\{1,3\},\{1,2,3\}\}$. Dieses Beispiel zeigt insbesonders auch, daß sich Gödels Beweis nicht „dualisieren" läßt, wie es bei Anselms Argument anscheinend möglich ist, vgl. dazu Haight [1970].

Schlußbemerkungen

Die Glaubwürdigkeit eines Theorems hängt von der Glaubwürdigkeit der Axiome und der Adäquatheit des logischen Rahmens ab. Letzteres ist im Falle dieses Gödelschen Beweises durchaus diskussionswürdig – wie Atlas [1984], 21 erwähnt, hatte Gödel selbst Bedenken gegen Bekkers Prinzip (die Formel (5), die dem System *S5* wesentlich zu seiner Stärke verhilft) geäußert. Die Glaubwürdigkeit der Axiome, insbesonders von A1, hängt wiederum von einer sinnvollen Interpretation von „positiver Eigenschaft" ab.[3] (Etwas polemisch: Welche der beiden Eigenschaften „Verheiratet" und „Unverheiratet" sollte z.B. positiv sein?) Wie anfangs schon erwähnt, scheint dieser Gödelsche Beweis eine formale Ausgestaltung der Leibnizschen Beweisidee zu sein, mit der sich Gödel durchaus auch selbst identifiziert haben mag. Wie aus einer Notiz Carnaps über ein Gespräch mit Gödel am 13.11.1940 hervorgeht, hielt Gödel eine wissenschaftliche metaphysische Theorie (im Sinne eines exakten Postulatsystems) für möglich. In einem Brief vom 6.10.1961 an seine damals 82-jährige Mutter schrieb er:[4]

> Man ist natürlich heute weit davon entfernt, das theologische Weltbild wissenschaftlich begründen zu können, aber ich glaube, schon heute dürfte es möglich sein rein verstandesmässig (ohne sich auf den Glauben an irgend eine Religion zu stützen) einzusehen, daß die theologische Weltanschauung mit allen bekannten Tatsachen . . . durchaus vereinbar ist. Das hat schon vor 250 Jahren der berühmte Philosoph und Mathematiker Leibniz zu tun versucht ...

Literatur

ADAMS, ROBERT M.
[1971] „The Logical Structure of Anselms Argument", *Philosophical Review* **80**, 28–54.

ANSCOMBE, G. ELIZABETH M.
[1987] „Descartes and Anselm", in: PERZANOWSKI [1987], 15–18.

ANSELM von Canterbury
[1966] *Monologion – Prosologion. Die Vernunft und das Dasein Gottes.* Deutsch-Lateinische Ausgabe übersetzt, eingeleitet und erläutert von Rudolf Allers, Köln (Hegner).

ATLAS, J.D.
[1984] „Gödel's Ontological Argument", presented to the Joint Mathematics-Philosophy Colloquium in Amherst College, Amherst MA, 16 April 1984 (Manuscript).

BARNES, J.
[1972] *The Ontological Argument*, London / Basingstoke (The Macmillan Press LTD).

BARTH, KARL
[1931] *Fides quaerens intellectum. Anselms Beweis der Existenz Gottes*, Zürich (Zollikon Evang. Verlag).

BURKHARDT, H. & SMITH, B.
[1991] *Handbook of Metaphysics and Ontology*, München (Philosophia Verlag).

3 Vergleiche dazu etwa Orilia [1994] und Muck [1992].

4 Den kompletten Wortlaut dieses Briefes Nr. 177 findet der Leser im 1. Abschnitt des Artikels „Princeton–Wien, 1946–1966. Briefe an die Mutter" von Maria-Elena Schimanovich-Galidescu im Band 1, Kapitel B.

CHRISTIAN, C.
[1989] „Gödels Version des Ontologischen Gottesbeweises", *Sitzungsberichte der Österreichischen Akademie der Wissenschaften, Abt. II* **198**, 1–26.

DESCARTES, RENÉ
[1959] *Meditationes de prima philosophia* (lateinisch-deutsch), hrsg. von LÜDER GÄBE, Hamburg (Meiner).

EDWARDS, P. (Hrsg.)
[1967] *The Encyclopedia of Philosophy*, New York (Free Press).

ESSLER, WILHELM K. & BRENDEL, E. & CRUZADO, R. F. M.
[1987] „Gödels Gottesbeweis", in: *Grundzüge der Logik II*, Frankfurt a.M. (Vittorio Klostermann), *Anhang III.*

FINDLAY, J.N.
[1948] „Can God's Existence Be Disproved?", *Mind* **57** (1948), 176–183 (wieder abgedruckt in: PLANTINGA [1965], 111–122).

GERHARDT, C.I.
[1961] *Die philosophischen Schriften von Gottfried Wilhelm Leibniz VII*, Hildesheim (Georg Olms).

GÖDEL, KURT
[1933] „Eine Interpretation des intuitionistischen Aussagenkalküls", *Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums* **4** (1933), 39–40 (wieder abgedruckt in: GÖDEL [1986], 300–303).
[1986] *Kurt Gödel, Collected Works*, Bd. I, hrsg. von SOLOMON FEFERMAN et al. Oxford/New York (Oxford UP).

GOMBOCZ, W.L.
[1974] *Über E! Zur Semantik des Existenzprädikates und des ontologischen Argumentes für Gottes Existenz von Anselm von Canterbury.* Dissertation an der Philosophischen Fakultät der Universität Graz.

HAIGHT, D. & M.
[1970] „An Ontological Argument for the Devil", *The Monist* **54**, No.2, 218–220.

HÁJEK, PETR
[2000] „Der Mathematiker und die Frage der Existenz Gottes (betreffend Gödels ontologischen Beweis"), in diesem Band.

HARRISON, C.
[1970] „The Ontological Argument in Modal Logic", *The Monist* **54**, No.2, 302–313.

HARTSHORNE, CHARLES
[1961] „The Logic of the Ontological Argument", *The Journal of Philosophy* **58**, 471–473.
[1962] *The Logic of Perfection*, La Salle IL (Open Court).
[1965] *Anselm's Discovery: A Re-examination of the Ontological Proof of God's Existence*, La Salle IL (Open Court).

HICK, J.
[1967] *Ontological Argument for the Existence of God*, in: EDWARDS [1967], 538–542.

HINTIKKA, JAAKKO
[1969] „On the Logic of the Ontological Argument: Some Elementary Remarks", in: LAMBERT [1969], 185–197.

HUGHES, G.E. & CRESSWELL, M. J.
[1978] *Einführung in die Modallogik*, Berlin (de Gruyter) (zuerst engl. als: *An Introduction to Modal Logic*, London (Methuen) 1968).

KANT, IMMANUEL
[1781] *Kritik der reinen Vernunft*, hrsg. von I. HEIDEMANN, Stuttgart (Reclam) 1966.

KLINE, M.
[1980] *Mathematics, the Loss of Certainty*, New York (Oxford UP).

KUTSCHERA, FRANZ VON
[1991] „Zum ontologischen Gottesbeweis", in: *Vernunft und Glaube*, Berlin (Gruyter) 1991, Anhang 1, 322–334.

LAMBERT, K. (Hrsg.)
[1969] *The Logical Way of Doing Things*, New Haven / London.

LEIBNIZ, GOTTFRIED W.
[1961] *Neue Abhandlungen über den menschlichen Verstand*, Band 2, hrsg. u. übers. von W. V. ENGELHARDT und H. H. HOLZ, Frankfurt a.M. (Insel).
[1979] *Monadologie*, übers., eingel. u. erläutert von H. Glockner, Stuttgart (Reclam).

LORENZEN, PAUL
[1962] *Metamathematik*, Mannheim (Bibliographisches Institut).

MALCOLM, NORMAN
[1960] „Anselm's Ontological Arguments", *Philosophical Review* 69, 41–62 (wieder abgedruckt in: PLANTINGA [1965], 137–80).
MEIXNER, U.
[1992] „Der ontologische Gottesbeweis in der Perspektive der analytischen Philosophie", *Theologie und Philosophie* 67, 246–262.
MUCK, O.
[1992] „Eigenschaften Gottes im Licht des Gödelschen Arguments", *Theologie und Philosophie* 67, 60–85.
[1992a] „Religiöser Glaube und Gödels ontologischer Gottesbeweis", *Theologie und Philosophie* 67, 263-267.
ORILIA, F.
[1994] „A Note on Gödel's Ontological Argument", im Erscheinen.
PERZANOWSKI, J.
[1987] *Essays on Philosophy and Logic,* Cracow (Jagiellonian University Press).
[1991] „Ontological Arguments II: Cartesian and Leibnizian", in: BURKHARDT/SMITH [1991], Vol. 2, 625–633.
PLANTINGA, ALVIN
[1965] *The Ontological Argument. From St. Anselm to Contemporary Philosophers*, Garden City, New York (Doubleday & Co. Inc.).
[1991] „Ontological Arguments I: Classical", in: BURKHARDT/SMITH [1991], Vol. 2, 622–625.
RESCHER, NICHOLAS
[1959] „The Ontological Proof Revisited", *Australasian Journal of Philosophy* 37, 138–148.
RICKEN, F. (Hrsg.)
[1991] *Klassische Gottesbeweise in der Sicht der gegenwärtigen Logik und Wissenschaftstheorie*, Stuttgart (Kohlhammer).
SCHOLZ, H.
[1969] „Der Anselmische Gottesbeweis", in: *Mathesis Universalis*, hrsg. von H. HERMES, F. KAMBARTEL und J. RITTER, Basel/Stuttgart (Schwabe & Co. Verlag).
SMULLYAN, RAYMOND
[1983] *5000 B.C. and Other Philosophical Phantasies*, New York (St. Martin's Press).
SOBEL, JORDAN H.
[1987] „Gödel's Ontological Proof", in: *On Being and Saying. Essays for Richard Cartwright*, hrsg. von. J. J. THOMSON, Cambridge MA / London (MIT Press), 241–261.
THOMAS VON AQUIN
[1982] *Summa Theologica*, Bd. 1: „Gottes Dasein und Wesen", Graz/Wien/Köln (Verlag Styria).
WANG, HAO
[1987] *Reflections on Kurt Gödel*, Cambridge MA/London (MIT Press).

PETR HÁJEK*

Der Mathematiker und die Frage der Existenz Gottes
(betreffend Gödels ontologischen Beweis)

Es ist gut, daß wir nicht wissen,
sondern glauben, daß ein Gott sei.
(Kant, Nachlaß)

1. Einführung

Gödels zu Lebzeiten unveröffentlichter Beweis für die notwendige Existenz eines Gott-ähnlichen Wesens hat sowohl philosophisches als auch mathematisches Interesse geweckt. Zweck der vorliegenden Arbeit ist es, zu einer Deutung des Gödelschen Textes beizutragen, 1. durch Kommentierung der einschlägigen Literatur und 2. durch Bereitstellung von etwas Modelltheorie. Die Arbeit enthält keinen philosophischen Beitrag. Während der letzten Jahre habe ich etliche Male über Gödels Gottesbeweis vorgetragen, insbesondere auf dem Symposium zur Feier von Professor Gert Müller (Heidelberg, Jänner 1991), doch habe ich niemals beabsichtigt, eine Veröffentlichung über das Thema zu machen. Da ich wiederholt um eine schriftliche Version gebeten wurde, entschloß ich mich, schnell eine „erweiterte Kurzfassung"[1] zu schreiben, ohne aus ihr einen voll ausgearbeiteten Artikel machen zu wollen. Die vorliegende Arbeit, welche das Ergebnis einer Einladung der Herausgeber dieses Buches ist, ist eine Ausarbeitung jener erweiterten Kurzfassung; speziell ist § 5 (betreffend Anderson [1990]) neu. Meinen Dank für wertvolle Informationen richte ich an M. Baaz, C. Smoryński, F. Montagna, G. Müller, H. Luckhardt, U. Felgner, A. Oberschelp und C. Parsons (in chronologischer Ordnung).

2. Überblick über die einschlägige Literatur

(a) Als *theologischer Hintergrund* ist Küng [1978] sehr zu empfehlen, insbesondere (aber nicht nur) Kapitel F.III. („Gott beweisen?", S. 583). Küng schreibt:

> Gottesbeweise haben heute viel von ihrer Überzeugung, wenig aber von ihrer Faszination eingebüßt. Immer noch üben sie eine stille, geheime Anziehungskraft auf denkende Menschen aus. Existiert Gott? Das muß sich doch beweisen lassen! Unwiderlegbar, rational, jedem einsichtig. Mag sein: Gottesbeweise sind heute als Beweise gescheitert, tot. Aber noch als gescheiterte und tote nötigen sie den Nachgeborenen Respekt ab. Und nicht wenige hat an der Bahre der Gottesbeweise ein wehmütiger Trotz ergriffen: Es müßte doch möglich sein!

Zweitens ist wegen der Beziehung des Gödelschen Beweises zu Anselm die Lektüre von Barth [1958] besonders empfehlenswert. Barth interpretiert Anselms Gottesbeweis; interessant für

* Institute of Computer Science, Academy of Sciences of the Czech Republic, CZ - 182 07 Prague; Email: hajek@uivt.cas.cz

1 Diese erweiterte Kurzfassung mit dem gleichen Titel wie dieser Aufsatz habe ich an Interessenten auf Anfrage verteilt. Eine Fortsetzung der vorliegenden Arbeit wurde als Hájek [1996] veröffentlicht. Die Diskussion wurde von Anderson und Gettings [1996] weitergeführt.