Hilbert und sein Programm

Clemens Jeger, Marcel Schneider, Marko Tepeluk

12. November 2014

Einleitung

David Hilbert (geb. 1862, † 1943) war einer der bedeutendsten Mathematiker des 19. und 20. Jahrhunderts. Er befasste sich nebst diversen Problemstellungen aus Mathematik und Physik auch mit Logik und der Frage nach der Widerspruchsfreiheit der Mathematik. 1899 lieferte er mit seinem Werk „Grundlagen der Geometrie“ einen kompletten Beweis der Konsistenz der euklidischen Geometrie. Ein Jahr später präsentierte er beim internationalen Mathematikerkongress in Paris eine Liste mit 23 Problemen, die zur Hausaufgabe der Mathematiker des 20. Jahrhunderts wurde. Themenpunkt Nr. 2 auf ebendieser Liste war der Beweis der „Widerspruchslosigkeit der arithmetischen Axiome“ beziehungsweise der Axiomensysteme der Mathematik im Allgemeinen, mit dem sich Hilbert in den folgenden Jahren intensiv befassen sollte (dieses Forschungsprogramm wird heute als „Hilbertprogramm“ bezeichnet). In den 20er Jahren wagte Hilbert erstmals den Versuch, ein Axiomensystem für die Arithmetik aufzustellen und somit das Problem anzugehen. Infolge dieser Bemühungen entwickelte er fortlaufend (unter Einbezug der Arbeiten von Frege) den Hilbertkalkül, was in der Veröffentlichung von „Grundzüge der Theoretischen Logik“ mündete. Dieses Grundlagenwerk, das er 1928 zusammen mit Wilhelm Ackermann publizierte, begründete die Prädikatenlogik erster Stufe. Anfang der 30er Jahre veröffentlichte Gödel seinen Unvollständigkeitssatz, der die Undurchführbarkeit des Hilbertprogrammes bewies und diesem somit ein Ende setzte.

Das Hilbertprogramm

Das Hilbertprogramm entstand aus dem Ziel, die Widerspruchsfreiheit der mathematischen Grundlagen zu sichern. Dazu wurde ein (möglichst minimales aber vollständiges) logisch konsistentes Axiomensystem benötigt. Der Aufbau eines Axiomensystems erfolgt traditionell durch grundlegende Definitionen und die Formulierung von „Grundwahrheiten“ (Axiome), aus denen Sätze (Aussagen) hergeleitet werden. Die Widerspruchsfreiheit der Axiome ist für die Mathematik von enormer Bedeutung, da mit widersprüchlichen Theorien beliebige Sätze ableitbar sind, was diese natürlich wertlos macht. Dies ist auch der Grund, weshalb die Ableitung eines Paradoxons durch Russel aus den Frege'schen Axiomen für dieselben so vernichtend war.

Hilbert wollte die Mathematik möglichst generell auffassen, um sie auf verschiedene Fragestellungen übertragbar zu machen und somit ihre Gültigkeit nicht auf das jeweilige Anwendungsgebiet zu beschränken. Er beschreibt dies als „Abkoppelung von der Frage der sachlichen Wahrheit“. Was jedoch wiederum die Frage mit sich bringt, ob denn Resultate zuverlässig sein können, die aus einem Axiomensystem abgeleitet wurden, welches nicht per se auf „Wahrheiten“ gründet.

Um die Korrektheit von Beweisen zu sichern, sollten diese (nebst den inhaltlichen Annahmen) ausschliesslich aus *logischen* Schlüssen bestehen, insbesondere also keine *inhaltlichen* Schlüsse enthalten.

> Man muss jederzeit an Stelle von „Punkte, Geraden, Ebenen“ „Tische, Stühle, Bierseidel“ sagen können.
> (*David Hilbert, 1891*)

Diese Forderung ist auch für die Frage nach der *Beweisbarkeit* im Allgemeinen von zentraler Bedeutung: um nämlich eine solche Frage beantworten zu können, muss a priori festgelegt sein, welche Beweismittel zulässig sind. Es dürfen also keine Axiome nachträglich hinzugefügt werden.

Unter diesem Gesichtspunkt definiert Hilbert die Vollständigkeit wie folgt:

> Die Vollständigkeit eines Axiomensystems besteht darin, dass bei Zufügung eines nicht aus den Axiomen folgenden neuen Axioms ein Widerspruch auftritt. (*David Hilbert, 1923*)

Nebst der Vollständigkeit des Axiomensystems war für Hilbert auch dessen Minimalität wichtig; dass es „möglichst einfach und durchsichtig“ ist (es war für ihn aber kein notwendiges Kriterium). Insgesamt stellte er also an ein Axiomensystem also die folgenden grundlegenden Kriterien: Widerspruchsfreiheit, Vollständigkeit und Einfachheit sowie Unabhängigkeit. Das wichtigste dieser Kriterien war jedoch zweifellos die Widerspruchsfreiheit. In seiner Arbeit stösst man auf mehrere Versionen davon: Die *logische Widerspruchsfreiheit*, für keine Formel ϕ gilt, dass ϕ und $\neg\phi$ ableitbar sind, und die *Arithmetische Widerspruchsfreiheit*, für keine zwei Terme s und t darf $s = t$ und $s \neq t$ ableitbar sein (insbesondere dürfen $0 = 1$ oder $0 \neq 0$ nicht ableitbar sein und somit auch keine falschen numerischen Gleichungen).

Hilberts formales System

1921/1922 versuchte Hilbert in seinen Aufsätzen zur „Neubegründung der Mathematik“ erstmals, ein konkretes Axiomensystem für die Arithmetik aufzustellen, welches im Folgenden präsentiert wird. Um dieses zu legitimieren kam für ihn nur die grundlegendste allgemein gültige Theorie überhaupt in Frage, nämlich die Logik. Konsequenterweise beschäftigte sich Hilbert in den 20er Jahren intensiv mit Logik - vermutlich stets mit dem Hintergedanken, ein logisches Modell für die Arithmetik aufzustellen und somit die Mathematik auf sicheren Boden zu bringen.

Hilbert trennt die Mathematik in einen formalen Kalkül, in dem Beweise aus Axiomen nach einem festen Schema geführt werden, und die *Metamathematik*, in der das klassische *inhaltliche* Schließen zum Einsatz kommt, allerdings nur um das formale System zu untersuchen. Die gesamte bisherige Mathematik sollte aus dem formalen System herleitbar sein, und ein metamathematischer Beweis der Widerspruchsfreiheit die seinerzeit umstrittenen Beweistechniken absichern.

Die verwendeten Symbole sind als *Zeichen* zu verstehen, sie haben zunächst keinerlei konkrete Bedeutung. Die Bedeutung ergibt sich erst aus den Axiomen und ggf. Schlussregeln, über die die Symbole implizit definiert werden. Die Interpretationen in Klammern haben keinen formalen Nutzen, sie dienen nur zur Erläuterung. Erst durch die Axiome wird erzwungen, dass die Symbole sich isomorph zu den bekannten mathematischen Objekten verhalten. Dies betrifft insbesondere auch $=$, $\neq$ und den Allquantor![1]

Ein *Beweis* der Formel $\mathfrak{B}$ besteht aus einer Abfolge von Schlüssen nach der Schlussregel, in die für $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$ Formeln eingesetzt wurden, die entweder durch Einsetzen von Variablen in ein Axiom oder als *Endformel* $\mathfrak{B}$ eines vorhergegangenen Schlusses entstanden sind.

Das im Folgenden vorgestellte Axiomensystem ist exemplarisch zu sehen, es erreicht nicht die geforderten Ansprüche an Vollständigkeit, Einfachheit und Unabhängigkeit. Insbesondere werden die natürlichen Zahlen zweimal, in den Axiomen 2.-7. sowie 16.-23., auf verschiedene Weisen definiert. Hilbert nutzt diese Axiome, um für verschie-

[1] Allerdings wird der Allquantor im hier behandelten Aufsatz noch separat definiert.

dene Teilmengen beispielhaft die Widerspruchsfreiheit zu zeigen. Die Axiome 24.-27. sind ein Vorschlag, um die Widerspruchsfreiheit der umstrittenen transfiniten Methoden zu zeigen, den Beweis bleibt Hilbert aber schuldig. Später führt er andere Axiomensysteme ein, die z. B. Negationen erlauben, die 0 enthalten und andere Axiome für transfinite Funktionen zugrundelegen.

Zeichen

I Individualzeichen

1. $1, +$ (für Zahlzeichen)
2. $\varphi(*), \ldots$ (*individuelle* Funktionen[2])
3. $=, \neq, >$ (mathematische Zeichen)
4. $Z(*), \Phi(*)$ (Prädikate: Zahl sein, Funktion sein)
5. $\rightarrow$ (Implikation)
6. $(*)(\ldots)$ (Allquantor)

II Variable

1. $a, b, c, \ldots$ (*Grundvariable*)
2. $f(*), g(*), \ldots$ (*variable* Funktion)
3. $A, B, C, \ldots$ (*variable Formeln*)

III Zeichen zur Mitteilung

1. $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \ldots$ (*Funktionale*, Prädikatenlogik: Term)
2. $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \ldots$ (Formeln)

Schlussregel

$$\frac{\begin{array}{c}\mathfrak{A}\\ \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}\end{array}}{\mathfrak{B}}$$

Axiome

1. $a = a$
2. $1 + (a + 1) = (1 + a) + 1$
3. $a = b \rightarrow a + 1 = b + 1$
4. $a + 1 = b + 1 \rightarrow a = b$
5. $a = c \rightarrow (b = c \rightarrow a = b)$
6. $a + 1 \neq 1$
7. $a \neq 1 \rightarrow a = \delta(a) + 1$
8. $a = b \rightarrow (A(a) \rightarrow A(b))$
9. $(a)(A(a) \rightarrow A(a + 1)) \rightarrow (A(1) \rightarrow (Z(b) \rightarrow A(b)))$
10. $A \rightarrow (B \rightarrow A)$
11. $(A \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (A \rightarrow B)$
12. $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (B \rightarrow (A \rightarrow C))$
13. $(B \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$
14. $a \neq a \rightarrow A$
15. $(a = b \rightarrow A) \rightarrow ((a \neq b \rightarrow A) \rightarrow A)$
16. $Z(1)$
17. $Z(a) \rightarrow Z(a + 1)$
18. $Z(a) \rightarrow (a \neq 1 \rightarrow Z(a - 1))$
19. $Z(a) \rightarrow (a + 1 \neq 1)$
20. $(a + 1) - 1 = a$
21. $(a - 1) + 1 = a$
22. $a + (b + 1) = (a + b) + 1$
23. $a - (b + 1) = (a - b) - 1$
24. $(\mu(f) = 1 - 1) \rightarrow (Z(a) \rightarrow f(a) = 1)$
25. $(\mu(f) \neq 1 - 1) \rightarrow (Z(\mu(f)))$
26. $(\mu(f) \neq 1 - 1) \rightarrow (f(\mu(f)) \neq 1)$
27. $Z(a) \rightarrow (Z(\mu(f) - a) \rightarrow f(\mu(f) - a) = 1)$

Strömungen der Mathematik/Logik zur Zeit Hilberts

Realismus/Platonismus. Die Mathematik ist unabhängig vom menschlichen Denken. Dies bedeutet, dass Mathematik von jedem intelligenten Lebewesen entdeckt werden kann; Mathematik wurde entdeckt, nicht erfunden. *Anhänger:* Kurt Gödel

Logizismus. Mathematik lässt sich vollständig auf die formale Logik zurückführen, insbesondere ist sie ein Teil der Logik selbst. Mathematische Sätze folgen direkt aus den Axiomen der Logik nach

[2] *Funktionen* umfasst hier auch *Funktionenfunktionen*, anders als in Prädikatenlogik 1. Ordnung

den Schliessregeln. *Anhänger:* G. Frege, B. Russel

Formalismus. Mathematik ist nichts anderes als eine Manipulation von Zeichenketten, bzw. reine Syntax. Diese Zeichenketten sind keine Aussagen und somit haben Sätze auch keine Bedeutung, vielmehr wird ihnen eine Bedeutung aufgezwängt. *Anhänger:* David Hilbert

Konstruktivismus/Finitismus. Mathematische Objekte müssen aus einer endlichen Anzahl von Schritten aus den natürlichen Zahlen abgeleitet werden können . *Anhänger:* Leopold Kronecker

Intuitionismus. Die Mathematik ist ein Erzeugnis menschlichen Denkens und die Wahrheit mathematischer Aussagen wird reduziert auf ihre Konstruierbarkeit, ähnlich wie beim Konstruktivismus. Jedoch sind einige Sätze der klassischen Logik nicht gültig, z.B. der Satz des ausgeschlossenen Dritten.

> Was Weyl und Brouwer tun, kommt im Grunde darauf hinaus, daß sie die einstigen Pfade von Kronecker wandeln: sie suchen die Mathematik dadurch zu begründen, daß sie alles ihnen unbequem erscheinende über Bord werfen und eine Verbotsdiktatur à la Kronecker errichten. (*David Hilbert, 1922*)

Anhänger: L.E.J. Brouwer, H. Weyl

Obwohl Hilbert als der Repräsentant des Formalismus angesehen wird, kann man in seinem Werk doch realistische und logizistische Züge erkennen.

Literatur

[Davis(2000)] Martin Davis. *The universal computer: The road from Leibniz to Turing.* WW Norton & Company, 2000.

[Hilbert(1922)] David Hilbert. Neubegründung der Mathematik. Erste Mitteilung. *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg.*, 1(1):157–177, 1922.

[Hilbert and Ackermann(1928)] David Hilbert and Wilhelm Ackermann. *Grundzüge der theoretischen Logik, Band XXVII von Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften.* Verlag von Julius Springer, 1928.

[Tapp(2013)] C. Tapp. *An den Grenzen des Endlichen; Mathematik im Kontext.* Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2013.

[Wikipedia(2014a)] Wikipedia. David Hilbert — Wikipedia, Die freie Enzyklopädie, 2014a. URL `http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=David_Hilbert&oldid=135012164`. [Online; 2014-11-08].

[Wikipedia(2014b)] Wikipedia. Formalism — Wikipedia, the free encyclopedia, 2014b. URL `http://en.wikipedia.org/wiki/Formalism_(mathematics)`. [Online; 2014-11-08].

[Wikipedia(2014c)] Wikipedia. Hilbert system — Wikipedia, the free encyclopedia, 2014c. URL `http://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Hilbert_system&oldid=617983547`. [Online; 2014-11-08].

[Wikipedia(2014d)] Wikipedia. Logizismus — Wikipedia, Die freie Enzyklopädie, 2014d. URL `http://de.wikipedia.org/wiki/Logizismus`. [Online; 2014-11-08].

[Wikipedia(2014e)] Wikipedia. Philosophie der Mathematik — Wikipedia, Die freie Enzyklopädie, 2014e. URL `http://de.wikipedia.org/wiki/Philosophie_der_Mathematik`. [Online; 2014-11-08].

[Wikipedia(2014f)] Wikipedia. Prädikatenlogik — Wikipedia, Die freie Enzyklopädie, 2014f. URL `http://de.wikipedia.org/wiki/Pr%C3%A4dikatenlogik`. [Online; 2014-11-08].