Prädikatenlogik II

F. Schmid, A. Kaderli, J. Dohrau

19. November 2014

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung und Begriffsbildung

Im Folgenden betrachten wir die Prädikatenlogik erster Stufe (engl. first-order logic), die nicht nur in der Logik, sondern in der gesamten Mathematik in Bezug auf Axiomatisierung und Formalisierung eine zentrale Rolle spielt. Als formale Sprache mit ihrer eigenen Syntax bedient sie sich folgender Elemente:

Logische Symbole

- Variablensymbole
- Logische Operatoren wie z. B. $\rightarrow$', '$\wedge$', '$\neg$'
- Quantoren: '$\forall$','$\exists$'
- Das Gleichheitszeichen '$=$'

Nicht-logische Symbole

- Individuelle Symbole für Konstanten mit ausgezeichneten Eigenschaften z. B. '$\mathbb{1}_n$', '$\emptyset$'
- Funktionssymbole: '$+$','$\cdot$','$\circ$', etc. im Allgemeinfall 'f'
- Relationssymbole: '$\subseteq$', '$\in$', etc. im Allgemeinfall 'R'

Terme

Unter einem *Term* verstehen wir per Definition Zeichenketten folgender Gestalt:

⋆ Variablen

⋆ Konstanten

⋆ $ft_1t_2\cdots t_n$, wobei f eine n-stellige Funktion und $t_1, \cdots, t_n$ jeweils *Terme* bezeichnen.

Im Folgenden werden wir stillschweigend voraussetzen, dass t_i ein *Term* ist und f, R n-stellige Funktionssymbole bzw. Relationssymbole.

Ausdrücke

Ausgehend vom Begriff *Term* lassen sich *Ausdrücke* (engl. *formulae*) einführen, deren wir zwei verschiedene Typen kennen.
Atomare Ausdrücke sind folgender Form:

- $t_1 = t_2$
- $Rt_1 \cdots t_n$

Zusammengesetzte Ausdrücke haben folgende Gestalt:

- $\neg\varphi$
- $(\varphi \wedge \psi), (\varphi \vee \psi), (\varphi \rightarrow \psi), (\varphi \leftrightarrow \psi)$
- $\exists x\varphi, \quad \forall x\varphi,$

wobei x eine Variable ist und griechische Buchstaben *Ausdrücke* repräsentieren.
Abhängig davon, ob eine Variable durch einen Quantor eingeführt wird oder nicht, unterscheiden wir zwischen gebundenen bzw. freien Variablen. Man beachte, dass durch geeignete Umbenennung gebundener Variablen stets gewährleistet werden kann, dass Variablensymbole jeweils entweder frei oder gebunden sind. Die Menge der freien Variablen zu einem gegebenem *Ausdruck* φ bezeichnen wir mit $frei(\varphi)$. Um anzudeuten, dass x als freie Variable in einem *Ausdruck* φ auftritt, schreiben wir gelegentlich $\varphi(x)$.
Einen *Ausdruck*, der keine freien Variablen beinhaltet wie z. B.
„$\forall x \quad x^2 \geq 0$“ nennen wir *Satz*.

2 Substitutionen

Sei ein *Ausdruck* $\varphi(x)$ gegeben. Dann bezeichnet $\varphi(x/t)$, den *Ausdruck*, der bei Ersetzung von allen frei auftretenden x durch den *Term* t entsteht. Hierbei ist allerdings Vorsicht geboten.
Eine Substitution ist dann und nur dann zulässig, wenn sie für keine in t vorkommende Variable bewirkt, dass diese in den Geltungsbereich eines Quantors gerät, durch welchen diese selbst gebunden wird.
Dies kann man sich anhand des folgenden *Ausdrucks* veranschaulichen, der durch die Substitution $\varphi(x/y)$ vollkommen entfremdet würde.

$$\varphi : \quad \exists y \quad y + y = x$$

3 Logische Axiomenschemata und Schlussregeln

Bislang verfügen wir über keinerlei Anschauung, was unter einem logisch korrekten Beweis zu verstehen sei. Dazu bedürfen wir zunächst einer Menge von logischen Axiomen mit universeller Gültigkeit, wie sie zum Beispiel im Folgenden gegeben ist.

L_1: $\varphi \to (\psi \to \varphi)$,
L_2: $(\psi \to (\varphi_1 \to \varphi_2)) \to ((\psi \to \varphi_1) \to (\psi \to \varphi_2))$,
L_3: $(\varphi \wedge \psi) \to \varphi$,
L_4: $(\varphi \wedge \psi) \to \psi$,
L_5: $\varphi \to (\psi \to (\psi \wedge \varphi))$,
L_6: $\varphi \to (\varphi \vee \psi)$,
L_7: $\psi \to (\varphi \vee \psi)$,
L_8: $(\varphi_1 \to \varphi_3) \to ((\varphi_2 \to \varphi_3) \to ((\varphi_1 \vee \varphi_2) \to \varphi_3))$,
L_9: $(\varphi \to \psi) \to ((\varphi \to \neg\psi) \to \neg\varphi)$,
L_{10}: $\neg\varphi \to (\varphi \to \psi)$,
L_{11}: $\varphi \vee \neg\varphi$.

Des Weiteren gelte,

- wenn $\varphi(x/t)$ eine zulässige Substitution darstellt:

  L_{12}: $\forall x \varphi(x) \to \varphi(t)$,
  L_{13}: $\varphi(t) \to \exists x \varphi(x)$.

- wenn $x \notin frei(\psi)$:

  L_{14}: $\forall x(\psi \to \varphi(x)) \to (\psi \to \forall x \varphi(x))$,
  L_{15}: $\forall x(\varphi(x) \to \psi) \to (\exists x \varphi(x) \to \psi)$.

Abschliessend wollen wir uns noch den Axiomen widmen, die das Gleichheitszeichen betreffen. Metasprachlich interpretiert bleiben gleiche Dinge ununterscheidbar, unabhängig davon in Bezug auf welche Funktionen und Relationen man sie betrachtet.

L_{16}: $t = t$,

L_{17}: $(t_1 = t_1' \wedge \ldots \wedge t_n = t_n') \rightarrow (R(t_1, \ldots, t_n) \rightarrow R(t_1', \ldots, t_n'))$,

L_{18}: $(t_1 = t_1' \wedge \ldots \wedge t_n = t_n') \rightarrow (F(t_1, \ldots, t_n) = F(t_1', \ldots, t_n'))$.

Ergänzt werden diese sogenannten logischen Axiome durch nicht logische Axiome, um mathematische Teilgebiete zu begründen, wie zum Beispiel durch die Gruppenaxiome in der Algebra oder die Peano-Axiome in der Arithmetik. Ausgehend von einem derartigen Axiomenschema und den beiden folgenden Schlussregeln lässt sich der Begriff eines formalen Beweises einführen:

Modus Ponens: $\dfrac{\varphi \rightarrow \psi, \varphi}{\psi}$ **Generalisierung:** $\dfrac{\varphi}{\forall x \varphi}$

4 Formaler Beweis

Sei eine Menge T von nicht logischen Axiomen gegeben. Ein *Ausdruck* ψ ist beweisbar in T, wofür wir $T \vdash \psi$ notieren, wenn eine endliche Sequenz $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ existiert, sodass ψ und φ_n gleich sind und für $1 \leq i \leq n$ Folgendes gilt:

- φ_1 ist ein logisches Axiom, oder $\varphi_i \in T$, oder
- es existieren $j, k < i$, sodass φ_j gleich $\varphi_k \rightarrow \varphi_i$ ist, oder
- es gibt $j < i$, sodass φ_i gleich $\forall x \varphi_j$.

Um auszudrücken, dass kein derartiger Beweis existiert, gebrauchen wir die Schreibweise $T \nvdash \psi$.

4.1 Deduktionstheorem

Sei bekannt, dass $\{\varphi_1, \cdots, \varphi_n\} \cup \{\psi_1, \cdots, \psi_n\} \vdash \zeta$, wobei auf keine freie Variable von $\{\psi_1, \cdots, \psi_n\}$ Generalisierung angewandt wurde, dann gilt: $\{\varphi_1, \cdots, \varphi_n\} \vdash \{\psi_1, \cdots, \psi_n\} \rightarrow \zeta$

4.2 Tautologien und logische Äquivalenz

Abweichend vom üblichen Sprachgebrauch stellt in der Logik jeder beweisbare *Ausdruck* eine *Tautologie* dar. Aus naheliegenden Gründen werden genau dann zwei *Ausdrücke* als äquivalent betrachtet, wenn es sich bei der gegenseitigen Implikation um eine *Tautologie* handelt, oder in formaler Notation ausgedrückt: $\varphi \equiv \psi \iff \vdash \varphi \leftrightarrow \psi$

4.3 Logische Konsistenz

Für eine Menge T von nicht logischen Axiomen schreiben wir $\neg Con(T)$, wenn sich ein *Ausdruck* φ finden lässt, sodass $\vdash \varphi$ und zugleich $\vdash \neg\varphi$. Anderenfalls notieren wir $Con(T)$. Es lässt sich leicht einsehen, dass eine solche Unterscheidung zweckmässig ist, da ein einziger Widerspruch bereits genügt, um den ganzen Kalkül unbrauchbar zu machen (ex contradictione sequitur quodlibet).

5 Von der Syntax zur Semantik

Da formale Beweise zuweilen sehr umfangreich ausfallen können, werden wir uns nun *Interpretationen* und *Modellen* zuwenden. Genau genommen suchen wir für eine vorgegebene Menge von nicht logischen Axiomen ein *Modell*, in dem alle diese Axiome wahr werden. Man beachte, dass ein derartiges *Modell* weder existieren noch eindeutig sein muss. Hingegen wird durch Existenz bereits nachgewiesen, dass die Axiome konsistent sind. Im Folgenden wollen wir das Konzept der *Interpretation* ausführen. Dazu erklären wir eine Struktur $\mathfrak{A}$, die Folgendes leistet:

- Jede Konstante c wird abgebildet auf eine Konstante $c^{\mathfrak{A}}$ in einem *Universum* A
  (A wird auch als *Domäne* oder *Trägermenge* bezeichnet).

- Jeder n-stelligen Funktion F entspricht eine Funktion
  $F^{\mathfrak{A}} : A^n \to A$.

- Jeder n-stelligen Relation R ordnen wir eine Teilmenge $R^{\mathfrak{A}} \subseteq A^n$ zu.

Weiters führen wir eine Abbildung j ein, die auf Variablen wirkt und sie mit einem Wert in A belegt. Dann ist eine *Interpretation* **I** durch das Paar $(\mathfrak{A}, j)$ festgelegt.

Die *Interpretation* $\mathbf{I}$ definiert sich auf folgende Weise:

- $\mathbf{I}(x) := j(x)$ für Variablen
- $\mathbf{I}(c) := c^{\mathfrak{A}}$ für Konstanten
- $\mathbf{I}(F(t_1, \cdots, t_n)) := F^{\mathfrak{A}}(\mathbf{I}(t_1), \cdots, \mathbf{I}(t_n))$ für eine n-stellige Funktion

Wir notieren $\mathbf{I} \models \varphi$, um auszusagen, dass φ unter der *Interpretation* $\mathbf{I}$ „wahr" wird, wobei sich „Wahrheit" für *atomare Ausdrücke* folgendermassen versteht:

$$\mathbf{I} \models t_1 = t_2 \quad :\Longleftrightarrow \quad \mathbf{I}(t_1) \text{ ist gleich } \mathbf{I}(t_2)$$

$$\mathbf{I} \models R(t_1, \cdots, t_n) \quad :\Longleftrightarrow \quad (\mathbf{I}(t_1), \cdots, \mathbf{I}(t_n)) \in R^{\mathfrak{A}}$$

Den Wahrheitswert *zusammengesetzter Ausdrücke* ermittle man rekursiv gemäss den nachstehenden Definitionen:

$$\mathbf{I} \models \neg\zeta \quad :\Longleftrightarrow \quad \text{Es ist nicht der Fall, dass } \mathbf{I} \models \zeta$$

$$\mathbf{I} \models \exists x \zeta \quad :\Longleftrightarrow \quad \text{es gibt } a \in A \text{, sodass } \mathbf{I}\tfrac{a}{x} \models \zeta,$$

wobei $\mathbf{I}\frac{a}{x} := (\mathfrak{A}, j\frac{a}{x})$ und

$$j\tfrac{a}{x}(y) := \begin{cases} a & \text{für } x = y, \\ j(y) & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$\mathbf{I} \models \zeta \wedge \xi \quad :\Longleftrightarrow \quad \mathbf{I} \models \zeta \text{ und } \mathbf{I} \models \xi$$

Sei nun T eine Menge von nicht logischen Axiomen. Dann sagen wir, $\mathfrak{A}$ sei ein *Modell* für T, wenn für alle $\zeta \in T$ unabhängig von j gilt:
$(\mathfrak{A}, j) \models \zeta$
Wir notieren $\mathbf{M} \models T$, falls $\mathbf{M}$ *Modell* für T ist.

Um die Gleichwertigkeit formaler und semantischer Beweise darzulegen, verweisen wir auf zwei wichtige Theoreme.
Sei T eine Menge nicht logischer Axiome und ζ ein *Ausdruck.*

5.1 Korrektheitstheorem

Wenn $T \vdash \zeta$ und $\mathbf{M} \models T$, dann $\mathbf{M} \models \zeta$.

5.2 Gödel'scher Vollständigkeitssatz

$T \vdash \zeta$ oder es existiert ein *Modell* $\mathbf{M}$, sodass $\mathbf{M} \models T \cup \{\neg\zeta\}$.
Letzteres Resultat ist insofern nützlich, als man einen indirekten Nachweis für formale Beweisbarkeit erbringen kann. Wenn man zu zeigen vermag, dass aus $\mathbf{M} \models T$ zwingend $\mathbf{M} \models \zeta$ folgt, erhält man die Aussage $T \vdash \zeta$.
Mithilfe der beiden Sätze lässt sich folgendes Korollar herleiten:

5.3 Korollar

$$T \text{ ist } \textit{konsistent.} \iff \text{Es gibt ein } \textit{Modell} \text{ für } T.$$

Eine Menge T von *Sätzen* wird für gewöhnlich als *Theorie* bezeichnet. Wir sagen, sie sei *vollständig*, wenn jeder formulierbare *Satz* entweder selbst beweisbar ist oder dessen Negation.

5.4 Korollar

Jede *konsistente Theorie* ist in einer *vollständigen* enthalten.
Weiters definieren wir den Begriff der *relativen Konsistenz*. Sei T eine *Theorie* und φ ein nicht in T enthaltener *Satz*. φ ist *relativ zu* T *konsistent*, wenn $Con(T) \implies Con(T \cup \{\varphi\})$.
Ist zusätzlich auch $\neg\varphi$ *relativ zu* T *konsistent*, spricht man von *logischer Unabhängigkeit*.

6 Grenzen der Prädikatenlogik 1. Stufe

Abschliessend wollen wir anhand einiger Resultate die Grenzen der Prädikatenlogik aufzeigen. Dazu bedienen wir uns des Kompaktheitssatzes.

6.1 Kompaktheitssatz

Eine *Theorie* T ist genau dann *konsistent*, wenn jede endliche Teilmenge von T *konsistent* ist.

Dies ist insofern interessant, als man zeigen kann, dass unendliche Strukturen unter den Mitteln der Prädikatenlogik erster Stufe nicht eindeutig definiert werden können. Insbesondere gibt es neben den natürlichen Zahlen weitere *Modelle* in denen die Peano-Axiome wahr sind.
Die vermutlich grösste Ernüchterung erfuhren die Logiker des 20. Jahr-

hunderts allerdings durch die Arbeiten *Kurt Gödels*, was wir aber mit Verweis auf die nächste Sitzung nur kurz anschneiden wollen.

6.2 Erster Gödel'scher Unvollständigkeitssatz

Sei T eine hinreichend starke *konsistente Theorie*, sodass das Konzept natürlicher Zahlen eingeführt werden kann. Dann gibt es immer formulierbare *Sätze*, die von T *logisch unabhängig* sind, d. h. es gibt immer Aussagen φ, die von manchen *Modellen* von T gestützt werden, von anderen allerdings nicht.

6.3 Zweiter Gödel'scher Unvollständigkeitssatz

Sei T eine *Theorie*, die geeignet ist, natürliche Zahlen und zahlentheoretische Aussagen abzuhandeln. Dann lässt sich die *Konsistenz* von T als zahlentheoretische Aussage formulieren, die in T nicht bewiesen werden kann.