

## Modallogik

### Einführung

Modallogik (modal: die Art und Weise betreffend; von lat. modus „Mass, Art, Weise“ [1]) befasst sich mit den Modalbegriffen „möglich“ und „notwendig“ und ihren Folgeschlüssen.

Modallogische Ansätze finden sich schon bei Aristoteles in der Antike, weiter bei Duns Scotus im Mittelalter. Leibniz prägt dann den Begriff „mögliche Welten“ um 1700. Im 20. Jahrhundert sind zwei Strömungen auszumachen: die objektsprachlich-axiomatische und die metasprachlich-operative. Ein phänomenologischer Interpretationsansatz durch den Husserl-Schüler Becker blieb folgenlos. Die ersten modallogischen Axiome brachte Lewis und wurden von Langford weiter systematisiert. Gödel festigte die verschiedenen postulierten Systeme, die von Kripke dann ihre semantische Deutung erhielten. Dem von Carnap begründeten, metasprachlichen Ansatz hingegen erscheint der Operator „möglich“ überflüssig, da im Sprechen der Metasprache schon vorhanden. [2]

Im Folgenden werden wir uns auf Gödel und Löb's syntaktisches System und Kripke's Semantik der Modallogik beziehen. Gödel noch im österreich-ungarischem Reich geboren, war Mathematiker und bedeutender Logiker und trug ebenso zur Relativitätstheorie bei. Löb, ein deutscher Mathematiker, ist vor allem im Bereich der mathematischen Logik anzusiedeln, während Kripke, ein heute noch lebender, amerikanischer Philosoph und Logiker, auch Beiträge zur Sprachphilosophie lieferte. [3]

### Begriffe, allgemein

Um die zentralen, modallogischen Begriffe der Möglichkeit und Notwendigkeit in ihrem Verhältnis zur Wahrheit und Falschheit zu verstehen, können wir uns sogenannte „mögliche Welten“ vorstellen - darunter auch die „tatsächliche Welt“ oder „actual world“, in der wir leben. Wir unterscheiden dann Aussagen, die in jeder der möglichen Welten wahr sind, als notwendig, die in mindestens einer der möglichen Welten wahr ist, als möglich, die in keiner der möglichen Welten wahr ist, als unmöglich, die in mindestens einer der möglichen Welten wahr und in einer anderen falsch, als kontingent.  $\diamond p$  möglich;  $\Box p$  notwendig;  $\diamond p \wedge \diamond \neg p$  kontingent

Demzufolge sind alle Tautologien notwendig, Aussagen also die begriffliche, intrinsische Eigenschaften aussprechen: „Der Kreis ist rund“, „Die Kurve ist krumm“, „Licht ist hell“  
Die Negation notwendiger Aussagen sind wiederum unmöglich: „Der Kreis ist eckig“  
Möglichkeit kann aus der Intuition als alles Vorstellbare zusammengefasst werden: „Der Apfel ist salzig“, „Der Besen fliegt“, „Es wird regnen“  
Kontingenz umschreibt dann explizit Aussagen, die auch falsch sein können, e.g. zeitlich-punktuellen Aussagen: „Morgen regnet es“, „Um 16:00 schlägt ein Meteorit ein“

Modallogik ist insofern nicht wahrheitsfunktional, da sie sich auf alle mögliche Welten bezieht. Eine Aussage A mit modallogische Begriffen kann wahr oder falsch sein, während deren Teilaussage B falsch ist: So ist die Aussage „Es ist möglich, dass Einstein kein Physiker ist.“ wahr, wobei die Teilaussage „Einstein ist kein Physiker“ falsch ist; die Aussage „Es ist möglich, dass Licht dunkel

ist.“, falsch, wobei die Teilaussage „Licht ist dunkel“ falsch ist. Wahr ist sie die Aussage A, falls die Teilaussage B möglich und in der tatsächlichen Welt falsch ist, falsch, falls die Teilaussage B unmöglich und in der tatsächlichen Welt falsch ist. [4]

Mehr ins Theoretische reicht der Kripke'sche Begriff der Relativität. Es stellt sich hierbei die Frage, ob die Leibniz'schen möglichen Welten alle möglichen Welten beschreibt oder nur diejenigen relativ zur tatsächlichen Welt. Dies nötigt, die Akzessibilität der möglichen Welten zu bedenken, die sich in Relationen ausdrückt. Das im folgenden benutzte System von Gödel und Löb sieht im Gegensatz zu Leibniz nicht vor, dass eine Welt zu sich selbst akzessibel ist - die Relationen zwischen einer tatsächlichen Welt und den möglichen Welten kann nicht eindeutig zur ursprünglichen, tatsächlichen Welt zurückführen. Was diese Relativität bzw. Akzessibilität in concreto beinhaltet, steht jedoch im Dunkeln [5]

### Horizontenerweiterung

Die Operatorenzeichen der Möglichkeit  $\diamond$  und Notwendigkeit  $\square$  können auch anders interpretiert werden. Die modallogische Interpretation „möglich“ und „notwendig“ wird dabei als alethische bezeichnet (von gr. aletheia: „Wahrheit“ [6]). Die deontische Logik (von gr. déon: „das Nötige, das Angemessene“ [7]) versteht die beiden Operatoren ethische als „erlaubt“ und „geboten“, während sie in der temporalen Logik zeitlich interpretiert werden. Epistemische Logik (von episteme: „Wissenschaft, Wissen“ [8]) beschäftigt sich mit Glauben und Wissen bei Individuen und Gruppen und geht von Operatoren des Für-Wahr-Haltens aus. Tabellarisch im Vergleich sieht dies folgendermassen aus:

Formel	modallogisch	deontisch	temporal	epistemisch
$\diamond p$	Es ist möglich, dass p	Es ist erlaubt, dass p	p gilt irgendwann in der Zeit	Ich halte es für mich, dass p
$\square p$	Es ist notwendig, dass p	Es ist geboten, dass p	p gilt immer in der Zeit	Ich halte es für gewiss, dass p

Erstaunlicherweise bleiben bei den unterschiedlichen Deutungen die syntaktischen Begebenheiten gleich. [4]

### Literaturverzeichnis

- [1] <http://de.wiktionary.org/wiki/modal>
- [2] <http://de.wikipedia.org/wiki/Modallogik>
- [3] [http://de.wikipedia.org/wiki/Kurt\\_Gödel](http://de.wikipedia.org/wiki/Kurt_Gödel); [http://de.wikipedia.org/wiki/Martin\\_Löb](http://de.wikipedia.org/wiki/Martin_Löb); [http://de.wikipedia.org/wiki/Saul\\_Aaron\\_Kripke](http://de.wikipedia.org/wiki/Saul_Aaron_Kripke)
- [4] <http://de.wikipedia.org/wiki/Modallogik>
- [5] The Logic of Provability: G. Boolos, Cambridge (1993)
- [6] <http://en.wikipedia.org/wiki/Aletheia>
- [7] [http://de.wikipedia.org/wiki/Deontische\\_Logik](http://de.wikipedia.org/wiki/Deontische_Logik)
- [8] [http://de.wikipedia.org/wiki/Epistemische\\_Logik](http://de.wikipedia.org/wiki/Epistemische_Logik)