Russell

Provenzano Philipp, Ehre Maximilian und Lang Lukas

5. November 2014

1 Syntax

1.1 Notationen

Propositionen:	p, q	(1.1.1)
Behauptungssymbol:	$\vdash$	(1.1.2)
Gleichheit:	$=$	(1.1.3)
Funktionen:	ϕ, ψ	(1.1.4)
Äquivalenz:	$\equiv$	(1.1.5)
Grundfunktionen:	$\supset, \sim, \vee, \cdot$	(1.1.6)

1.2 Grundfunktionen, Äquivalenz, Definition

kontradiktorische Funktion ("non- p ") :	$\sim p$	(1.2.1)
logische Summe (inklusive "oder") :	$p \vee q$	(1.2.2)
logisches Produkt ("und") :	$p \cdot q \quad (\Leftrightarrow \sim (\sim p \vee \sim q))$	(1.2.3)
implikative Funktion ("wenn ..., so...") :	$p \supset q$	(1.2.4)
Definition ("Def. * als **") :	$* \cdot = \cdot * * \text{ Df.}$	(1.2.5)
Äquivalenz :	$p \equiv q. = \cdot p \supset q \cdot q \supset p \text{ Df.}$	(1.2.6)

1.3 Verwendung von Punkten

Punkte werden zur Trennung und Gruppierung von Propositionen (Gruppen (1) und (2)), sowie für das logische Produkt verwendet. Eine höhere Anzahl von Punkten kann dabei als äussere Klammer verstanden werden, während die niedrigere Punktzahl eine innere Klammer anzeigt.

Die 3 Gattungen (geordnet nach Priorität) sind:

- (1) In der Nachbarschaft der bisher vorgestellten Symbole (ausser dem logischen Produkt)
- (2) In der Nachbarschaft von Scheinvariablen
- (3) Als logisches Produkt

1.4 Propositionalfunktionen

Definition: 1.1 Der Ansatz ϕx enthält Veränderliche x so, dass eine Proposition entsteht, sollte x ein fest bestimmter Sinn gegeben werden.

Notation:

ϕx ist ein mehrdeutiger Wert der Propositionalfunktion $\phi \hat{x}$ und ϕa ein eindeutiger

$$(x).\phi x \text{ "}\phi x \text{ immer"}$$
 (1.4.1)

$$(\exists x).\phi x \text{ "es gibt ein } x, \text{ sodass } \phi x \text{ wahr ist"}$$
 (1.4.2)

1.5 Scheinvariablen

Scheinvariablen sind mit Klammern gekennzeichnet: (x) . Eine Proposition in der x als Scheinvariablen vorkommt, ist keine Funktion von x ; der Wahrheitswert der Proposition hängt nicht von der Wahl von x aus dem Bereich sinnstiftender Werte ab).

Beispiel: $(x).x = x$: Die Gleichheit zwischen jedem Ding und sich selbst ist unabhängig von der Wahl von x gewährleistet.

1.6 Propositionen mit echten und Scheinvariablen

- "Wenn eine Propositionalfunktion behauptet werden kann, dann kann es auch die Proposition, dass alle Werte der Funktion wahr sind." $\Rightarrow$ Was für ein beliebiges gilt, gilt für alle
- $\vdash (x).\phi(x) \supset .\phi y$
- $\vdash \phi y \supset .(\exists x).\phi x$
- $\vdash (x).\phi x : (x).\psi x \supset .(x).\phi x.\psi x$

1.7 Formalimplikation/-äquivalenz

Soll eine Implikation wie $\phi x \supset .\psi x$ allgemein gelten, schreibt Russell $(x) : \phi x \supset .\psi x$ (s.o.) und nennt sie Formalimplikation.

Formale Äquivalenz wird ausgedrückt durch $(x) : \phi x \equiv .\psi x$. Jeder Wert der ϕx genügt, genügt also auch ψx und die eine vermag die andere in einer Wahrheitsfunktion zu ersetzen. ("beide haben die gleiche Extension")

1.8 Identität

Für Identität wird kein eigenes Zeichen benötigt, = erfüllt alle nötigen Voraussetzungen um "x ist identisch mit y" auszudrücken:

$$\text{Identitätssatz :} \quad \vdash .x = x \quad (1.8.1)$$

$$\text{Symmetrie :} \quad \vdash : x = y. \equiv .y = x \quad (1.8.2)$$

$$\text{Transitivität :} \quad \vdash : x = y. y = z. \supset .x = z \quad (1.8.3)$$

2 Zirkelfehlerprinzip

- "Whatever involves **all** of a collection must not be one of the collection"
- **Beispiel:** Die Menge **aller** Mengen. Diese kann so nicht existieren, da sie selbst wieder Teil von 'allen Mengen' wäre.

3 Propositionalfunktionen

- Sie sind dadurch ausgezeichnet, dass sie selbst kein einzelnes Objekt darstellen, sondern sind lediglich durch die Gesamtheit ihrer möglichen Werte bestimmt
- Die Werte einer Funktion sind immer definiert, auch ohne diese:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Sokrates ist ein Mensch} \\ \text{Plato ist ein Mensch} \\ \vdots \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{x} \text{ ist ein Mensch} \quad (3.0.4)$$

Die Proposition 'Sokrates ist ein Mensch' macht also auch Sinn, wenn die Funktion ' $\hat{x}$ ist ein Mensch' noch gar nicht betrachtet wurde

- **Notation:** ϕx ist ein Wert von $\phi \hat{x}$
- Nach dem Zirkelfehlerprinzip darf eine Propositionalfunktion nichts von sich Abgeleitetes als Argument erhalten

4 Wahrheitshierarchie

- Es ergibt sich unter Anderem folgendes Problem:

$$\text{"}\hat{p} \text{ ist falsch" } \quad (4.0.5)$$

$$\rightarrow \text{"}(p).p \text{ ist falsch" } \quad (4.0.6)$$

$$\rightarrow \text{"}\{(p).p \text{ ist falsch}\} \text{ ist falsch" ist ungültig} \quad (4.0.7)$$

Die letzte Zeile ist dabei ungültig, da ' $(p).p$ ist falsch' von ' $\hat{p}$ ist falsch' abgeleitet ist und demnach nicht in diese eingesetzt werden kann. (Allerdings würde man natürlich gerne sagen, dass die zweite Proposition falsch ist)

- Die Lösung ist eine Wahrheitshierarchie: Will man sagen, dass etwas wahr oder falsch ist, muss man spezifizieren, welche Wahr- oder Falschheitsordnung die fragliche Proposition hat
- Also muss man beispielsweise sagen:

$$\{(p).p \text{ hat erste Falschheit}\} \text{ hat zweite Falschheit} \quad (4.0.8)$$

(was eine wahre Proposition ist)

5 Typen

- Es werden unter Anderem folgende Typen unterschieden: Propositionen, Funktionen, Individuen
- Diese Unterscheidung ist nötig, da eine Funktion $f\{\phi\hat{x}\}$, die eine Funktion als Argument nimmt, keine Individuen akzeptieren kann (da Funktionen mehrdeutig sind und diese von $f\{\phi\hat{x}\}$ durch Quantoren 'eliminiert' wird, diese sind allerdings nicht sinnvoll für Individuen). Umgekehrt sind Individuen eindeutig, an ihrer Stelle macht eine Funktion also keinen Sinn, da das Resultat dann ja keine eindeutige Proposition wäre. (Auch Propositionen sind keine einzelnen Objekte (aber eindeutig) und können deshalb nicht an die Stelle von Individuen oder Funktionen treten)

Beispiel:

$$f\{\phi\hat{x}\} := (x).\phi x \quad (5.0.9)$$

$$f\{y\} \equiv (x).yx \text{ ist sinnlos} \quad (5.0.10)$$

- **Notation:** Eine x -Funktion ist eine, die x als Argument nimmt (und dabei einen sinnvollen Ausdruck ergibt)

6 Funktionenhierarchie

- Da Funktionen nicht alle die gleichen Typen von Argumenten nehmen können, muss es also auch unterschiedliche Stufen von Funktionen geben
- Diese sind allerdings nicht so trivial wie man annehmen würde. Wir betrachten hierzu folgende x -Funktion:

$$(\phi).f(\phi\hat{z}, x) \quad (6.0.11)$$

Diese setzt die Totalität aller x -Funktionen voraus, sie ist aber selber eine

6.1 Matrixfunktionen

Definition: 6.1 *Eine Matrix-Funktion enthält keine Scheinvariablen*

- Jede Funktion lässt sich nun auf eine Matrixfunktion reduzieren, indem man alle Quantoren 'weglässt'

• **Beispiel:**

$$(x).\phi(x, y) \quad (6.1.1)$$

$$(y).\phi(x, y) \quad (6.1.2)$$

$$(x, y).\phi(x, y) \quad (6.1.3)$$

Die zugehörige Matrix-Funktion zu all diesen Funktionen ist $\phi(x, y)$

6.2 Erweiterte Funktionenhierarchie

Definitionen:

- Matrixfunktionen 1. Ordnung hängen nur von Individuen ab
- Matrixfunktionen $(n + 1)$ -ter Ordnung hängen von mindestens einer Funktion n -ter Ordnung ab und möglicherweise von solchen tieferer Ordnung
- Funktionen n -ter Ordnung lassen sich aus Matrixfunktionen n -ter Ordnung konstruieren

6.3 Prädikative Funktionen

Definition: 6.2 Prädikative Funktionen $(n + 1)$ -ter Ordnung hängen von mindestens einem Argument n -ter Ordnung ab

- **Notation:** $\phi! \hat{x}$
- Jede Funktion n -ter Ordnung lässt sich aus einer prädikativen Funktion n -ter Ordnung konstruieren (durch binden von Argumenten $(n - 1)$ -ter Ordnung durch Quantifizierung über diese)

7 Reduzibilitätsaxiom

- Zu jeder Funktion gibt es eine zu ihr äquivalente prädikative Funktion:

$$\vdash: (\exists \psi) : \phi x. \equiv_x .\psi! x \quad (7.0.1)$$

- **Beispiel:**

– Identität (nach Leibniz) ist nicht endlich formulierbar:

$$"(\phi) : \phi x. \supset .\phi y" \quad (7.0.2)$$

Dies bezeichnet unendlich viele Aussagen (eine für jede Funktionenordnung), was nicht praktikabel ist

– Mit dem Reduzibilitätsaxiom lässt sich nun aber definieren

$$x = y. =: (\phi) : \phi! x. \supset .\phi! y \text{ Df.} \quad (7.0.3)$$

8 Anwendungsbeispiel

Problem: Sei n die kleinste nicht mit maximal 11 Worten benennbare Zahl

Dann ist diese Zahl mit 11 Worten benennbar

Lösung: "die kleinste ... benennbare Zahl" ist eine Benennung, die auf die Totalität aller Benennungen verweist, und daher nicht Teil dieser Totalität sein kann (bzw. eine solche nicht existiert)

Es lässt sich nun eine Hierarchie von Benennungen definieren, womit sich obiges Problem nicht ergibt

9 Unvollständige Symbole

Definition: 9.1 *Symbole, die nicht auf ein Individuum verweisen (keine Eigennamen), sie haben ohne Kontext keinerlei Bedeutung*

Beispiel:

$$(\iota x)(\phi x) \tag{9.0.4}$$

$$f\{(\iota x)(\phi x)\}. =: (\exists c) : \phi x . \equiv_x . x = c : f c \text{ Df.} \tag{9.0.5}$$

Dies ist die Definition der Anwendung des "einen Objektes, dass ... erfüllt" (das Symbol selbst kann nicht definiert werden, da es ja alleine keine Bedeutung hat)

Für die "Identität" von diesen Objekten gilt also:

$$(\iota x)(\phi x) = (\iota x)(\phi x) :=: \underbrace{(\exists c) : \phi x . \equiv_x . x = c}_{\Leftrightarrow E!(\iota x)(\phi x)} \tag{9.0.6}$$

Die Gleichheit gilt also nur genau dann, wenn das beschriebene Objekt auch wirklich existiert (im Gegensatz zu Eigennamen, dort gilt die Identität immer)

Bemerkung: Ähnliches lässt sich auch für Klassen definieren (also alle Möglichen Anwendungen, nicht aber die Klassen selber) und zeigen, dass sie sich so wie erwartet verhalten, ohne aber ihre Existenz explizit zu fordern.

Literatur

- [1] Alfred North Whitehead and Bertrand Russell *Principia Mathematica Volume I*, Cambridge at the University Press, 2nd Edition, 1963
- [2] B.Russell und A.N.Whitehead (übers. H.Mokre) *Principia Mathematica: Vorwort & Kapitel 1 der Einleitung*, Suhrkamp, 1986
- [3] E.Picardi *Alfred North Whitehead / Bertrand Russell: Principia Mathematica (1910-13) aus Hauptwerke der Phil. 20.Jh.*, Reclam (1992)