GOTTLOB FREGE

Nachgelassene Schriften

Unter Mitwirkung von
GOTTFRIED GABRIEL und WALBURGA RÖDDING
bearbeitet, eingeleitet und mit
Anmerkungen versehen von

HANS HERMES
FRIEDRICH KAMBARTEL
FRIEDRICH KAULBACH

Zweite, revidierte Auflage,
erweitert um einen Anhang

Nachschrift einer Vorlesung

und

Protokolle mathematischer Vorträge Freges

eingeleitet von LOTHAR KREISER
unter Mitwirkung von GÜNTER GROSCHE

1983

FELIX MEINER VERLAG HAMBURG

EINLEITUNG

Im Folgenden geben die Herausgeber in drei Abschnitten eine kurze Charakteristik der Gedankenwelt Freges. Dabei wird der Nachlaß besonders berücksichtigt. Der erste Abschnitt enthält eine gedrängte Darstellung der von Frege eingeführten Formelsprache auf der Basis der Fregeschen Ontologie. Ferner wird auf den Fregeschen Versuch eingegangen, die Arithmetik als Zweig der Logik zu begründen. – Der zweite Abschnitt beschäftigt sich vor allem mit den sprach- und definitionstheoretischen Überlegungen Freges. Besonderes Augenmerk wird hier weiter der Auseinandersetzung Freges mit Hilbert, sowie Freges Logikbegriff gewidmet. – Der dritte Abschnitt erörtert im wesentlichen die philosophischen Motive, die den späten Frege dazu führen, angesichts der bekannten Antinomie die Arithmetik nicht mehr aus der Logik, sondern aus der „geometrischen Erkenntnisquelle" entspringen zu lassen.

I. Zur Begriffsschrift und zur Begründung der Arithmetik

Die Wissenschaft verdankt Frege die erste formalisierte Sprache (Schrift), die sich – wie die meisten heute aufgebauten formalen Sprachen – verhältnismäßig eng an die in der Mathematik gebräuchliche „Umgangssprache" anschließt. In dieser Hinsicht unterscheidet sich die Fregesche Sprache von der *Boole*schen Algebra der Logik. In beiden Fällen handelt es sich um den Versuch, das *Leibniz*ische Projekt einer *characteristica universalis* zu realisieren.[1])

Diese Sprache sieht Frege auf dem Hintergrund einer Ontologie, welche er in einem präzisen System mit scharfen Unterscheidungen entwickelt. Im Zusammenhang mit Problemen der Symbolisierung, d.h. der Übertragung umgangssprachlicher Aussagen in die formale Sprache, hat er sich auch um die Aufklärung von logisch relevanten Sprachphänomenen verdient gemacht. Die Haupttriebfeder zur Entwicklung einer formalen Sprache war für Frege die Absicht, die Arithmetik in einwandfreier Weise aufzubauen. Diese Bemühungen gipfeln in seinem zweibändigen Hauptwerk *Grundgesetze der Arithmetik*. Leider hat es sich gleichzeitig mit dem Erscheinen des zweiten Bandes herausgestellt, daß die Grundlagen seiner Logik nicht widerspruchsfrei waren. Es ist Frege in den letzten zwanzig Jahren seines Lebens nicht gelungen, diesen Widerspruch in zufriedenstellender Weise zu beseitigen.

In den folgenden Zeilen soll zum leichteren Verständnis des Nachlasses das von Frege eingeführte formale System auf der Grundlage seiner Ontologie in

---

[1] Zum Unterschied zwischen der Begriffsschrift und der Algebra der Logik vgl. die Ausführungen pp. 13 ff.

den wesentlichen Zügen kurz dargestellt und auf die Fregesche Theorie der Arithmetik eingegangen werden. Dabei findet sich wiederholt Gelegenheit, auf relevante Stellen des Nachlasses zu verweisen.

1. Der Aufbau der Fregeschen Sprache. Frege hat in einem 1879 erschienenen Büchlein mit dem Titel *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens* eine formale Sprache entworfen und diese Sprache in vervollkommneter Form in Band 1 der *Grundgesetze der Arithmetik* 1893 dargelegt. Die Notwendigkeit zum Aufbau einer solchen formalen Sprache sieht Frege in der fehlenden Genauigkeit der Umgangssprache. In der Umgangssprache kann man vieles ausdrücken, was für das logische Schließen ohne Belang ist. Nur das, was hierfür relevant ist, der „begriffliche Inhalt", soll in der Formelsprache nachgebildet werden. So erklärt sich die Bezeichnung „Begriffsschrift". Nach Frege darf man sich bei dem Aufbau einer derartigen Schrift nicht zu sehr (wie es die traditionelle Logik tut) von der Umgangssprache und einer hierzu geschaffenen Grammatik beeinflussen lassen.

Die Begriffsschrift muß zu der Ontologie passen. Frege hat eine spezielle Ontologie ersonnen, die im folgenden skizziert werden soll. Alles, was es gibt, ist *Funktion* oder *Gegenstand*. Die Gegenstände sind gesättigt, die Funktionen ungesättigt, ergänzungsbedürftig. Eine Funktion hat eine Argumentstelle oder mehrere Argumentstellen. Eine einstellige Funktion wird durch ein Argument, eine mehrstellige Funktion durch entsprechend viele Argumente (welche den einzelnen Argumentstellen zugeordnet sind) ergänzt, gesättigt, und zwar zu ihrem Wert, der immer ein Gegenstand ist. Frege unterscheidet verschiedene Sorten von Funktionen im Hinblick auf die Zahl ihrer Argumente und mit Rücksicht darauf, welche Art von Gegenständen bzw. Funktionen für die einzelnen Argumente zugelassen ist. Im einfachsten Fall hat man *Funktionen erster Stufe mit einer Argumentstelle erster Art,* welche durch Gegenstände (und nur durch Gegenstände) ergänzt werden können. (Frege verlangt, daß *jeder* Gegenstand zur Ergänzung einer solchen Funktion dienen kann.) Dann hat man *Funktionen zweiter Stufe mit einer Argumentstelle zweiter Art,* welche durch Funktionen der soeben betrachteten Art ergänzt werden können. Eine kompliziertere Klasse bilden dann etwa zweistellige Funktionen, deren erste Argumentstelle durch Gegenstände und deren zweite Argumentstelle durch die vorhin betrachteten einfachsten Funktionen ergänzt werden können.

Spezielle Gegenstände sind die *Wahrheitswerte*. Es gibt deren zwei: *das Wahre* und *das Falsche*. Eine einstellige Funktion heißt ein *Begriff*, wenn sie nur Wahrheitswerte als Werte hat. Eine mehrstellige Funktion mit dieser Eigenschaft heißt eine *Beziehung*.

Jeder Funktion wird ein Gegenstand zugeordnet, welcher ihr *Wertverlauf* heißt. Der Wertverlauf eines Begriffs heißt *der Umfang des Begriffs*; der Wertverlauf einer Beziehung der Umfang dieser Beziehung. Zwei Funktionen haben genau dann denselben Wertverlauf, wenn sie für dieselben Argumente dieselben Werte haben.

Besonders wichtig sind insbesondere die folgenden Funktionen:

(a) die zweistellige *Identitätsbeziehung*, deren Wert genau dann das Wahre ist, wenn beide Argumente gleich sind.

(b) Der *Inhaltsbegriff*, dessen Wert genau dann das Wahre ist, wenn das Argument das Wahre ist.

(c) Der *Verneinungsbegriff*, dessen Wert genau dann das Wahre ist, wenn das Argument nicht das Wahre ist.

(d) Der zweistellige *Bedingungsbegriff*, dessen Wert immer das Wahre ist, abgesehen von dem Fall, daß das erste Argument das Falsche und das zweite Argument das Wahre ist.

(e) Die *Allgemeinheitsbegriffe*. Im einfachsten Fall handelt es sich um einen Begriff, dessen Argumente Funktionen erster Stufe mit einer Argumentstelle erster Art sind. Der Wert dieses Begriffs ist genau dann das Wahre, wenn das Argument ein Begriff ist, der für jedes Argument das Wahre als Wert hat.

(f) Die einstellige *Wertverlaufsfunktion*. Es handelt sich um eine Funktion zweiter Stufe mit einer Argumentstelle zweiter Art. Der Wert für ein beliebiges Argument, also für eine Funktion erster Stufe mit einer Argumentstelle erster Art, ist deren Wertverlauf.

(g) Die einstellige *Kennzeichnungsfunktion*. Dies ist eine Funktion erster Stufe mit einer Argumentstelle erster Art, deren Wert für ein vorgegebenes Argument wie folgt festgelegt ist: (1) Wenn es einen Gegenstand gibt, derart, daß das Argument der Kennzeichnungsfunktion der Wertverlauf der einstelligen Funktion ist, welche man aus der Identitätsbeziehung dadurch erhält, daß man das erste Argument durch diesen Gegenstand ergänzt, so ist der Wert der Kennzeichnungsfunktion für das betrachtete Argument dieser Gegenstand. (2) In jedem anderen Falle ist der Wert der Kennzeichnungsfunktion gleich ihrem Argument.

Frege verwendet folgende Zeichen:

$=$	für die Identitätsbeziehung,
—	für den Inhaltsbegriff,
ı	für den Verneinungsbegriff,
$\vert$	für den Bedingungsbegriff,
◡	für die Allgemeinheitsbegriffe,
ʾ	für die Wertverlaufsfunktion,
$\backslash$	für die Kennzeichnungsfunktion.[1])

Bei dem Symbol für den Bedingungsbegriff wird das erste Argument rechts oben, das zweite Argument rechts unten angegeben.

Frege wählt seine Sprache passend zu seiner Ontologie. Wir sind es heute gewohnt, die Ausdrucksbestimmungen für eine Sprache rein formal zu geben. Bei Frege ist dagegen der Sprachaufbau fortlaufend mit ontologischen Betrachtungen durchsetzt, so daß es nicht immer leicht ist, beides voneinander zu

[1] Nicht alle diese Bezeichnungen kommen wörtlich bei Frege vor.

trennen. Im folgenden soll, um das Wesentliche des Fregeschen Sprachaufbaus hervorzuheben und dem Leser das Verständnis der im Nachlaß vorkommenden Formeln zu erleichtern, ein Teilstück der Fregeschen Sprache (eigentlich *Schrift*) aufgebaut werden. Dabei sollen zunächst, wie es heute allgemein üblich ist, (unter Verwendung der Fregeschen Symbole gebildete) nur lineare Zeichenreihen betrachtet werden. Der Übergang zur zweidimensionalen Fregeschen Schreibweise wird später vollzogen. Auf die Angabe der Fregeschen Klammer-Ersparungsregeln wird verzichtet. Um die Darlegungen technisch so einfach wie möglich zu machen, werden die Verknüpfungssymbole autonym bezeichnet; ferner soll kein Unterschied gemacht werden zwischen Variablen und Variablen für Variablen. Beim Aufbau der hier sog. Quasiformeln können die sog. gebundenen Variablen noch frei auftreten. Bei den eigentlichen Formeln ist dies nicht mehr der Fall. Nicht eingegangen wird auf folgende Eigentümlichkeiten: Frege läßt nicht zu, daß eine gebundene Variable im Wirkungsbereich des sie bindenden Operators nicht auftritt; er verbietet ferner, daß im Wirkungsbereich eines mit einer gebundenen Variablen auftretenden Operators dieser Operator mit derselben gebundenen Variablen wieder vorkommt.

Frege verwendet die soeben angegebenen Funktionszeichen, Klammern, sowie verschiedene Sorten von Variablen, wobei er im einzelnen noch zwischen freien und gebundenen Variablen unterscheidet. Insbesondere verwendet er als

freie Gegenstandsvariablen: a, b, ...,
gebundene Gegenstandsvariablen im Zusammenhang mit der Darstellung des Allgemeinheitsbegriffes: $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, ...,
gebundene Gegenstandsvariablen im Zusammenhang mit der Darstellung der Wertverlaufsfunktion: α, ε, ...,
freie Variablen für Funktionen erster Stufe mit einem Argument erster Art: f, g, ...,
gebundene Variablen für derartige Funktionen: $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{g}$, ...

Die *Quasiformeln* werden induktiv durch folgende Festsetzungen erklärt:

(1) a ist eine Quasiformel. $\mathfrak{a}$ ist eine Quasiformel. α ist eine Quasiformel.
(2) Ist Φ eine Quasiformel, so auch $f(\Phi)$ und $\mathfrak{f}(\Phi)$.
(3) Ist Φ eine Quasiformel, so auch $-\Phi$, $\mid \Phi$, $\backslash\, \Phi$.
(4) Sind Φ_1 und Φ_2 Quasiformeln, so ist auch $(\Phi_1 = \Phi_2)$ und $(\Phi_1 \mid \Phi_2)$ eine Quasiformel.[1])
(5) Ist Φ eine Quasiformel, so auch $\smile \mathfrak{a}\, \Phi$, $\smile \mathfrak{f}\, \Phi$ und $'\alpha\, \Phi$.[2])

Als Variable für Quasiformeln verwenden wir „Φ". Das freie Vorkommen einer beliebigen Variablen v in einer Quasiformel Φ wird induktiv so definiert:

---

[1] Der Übergang zu der Fregeschen Schreibweise der Implikation wird gleich unten vollzogen.

[2] Der Übergang zur Fregeschen Schreibweise wird unmittelbar anschließend vollzogen.

(1′) In v kommt v frei vor.

(2′), (3′) Falls v in Φ frei vorkommt, so auch in $f(\Phi)$, $\mathfrak{f}(\Phi)$, $— \Phi$, $\mid \Phi$, $\setminus \Phi$; ferner kommt f in $f(\Phi)$ und $\mathfrak{f}$ in $\mathfrak{f}(\Phi)$ frei vor.

(4′) Falls v in Φ_1 oder in Φ_2 frei vorkommt, so auch in $(\Phi_1 = \Phi_2)$ und $(\Phi_1 \mid \Phi_2)$.

(5′) Falls v in Φ frei vorkommt, und verschieden ist von $\mathfrak{a}$, bzw. $\mathfrak{f}$ bzw. α, so kommt v auch in $\smile\mathfrak{a}\Phi$, bzw. in $\smile\mathfrak{f}\Phi$ bzw. in $'\alpha\Phi$ frei vor.

Quasiformeln, in denen keine Variable $\mathfrak{a}$, keine Variable α und keine Variable $\mathfrak{f}$ frei vorkommt, heißen *Formeln* oder *Ausdrücke*.

Übergang zur Fregeschen Bezeichnungsweise: Man schreibe

$\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\ \Phi$ an Stelle von $\smile\mathfrak{a}\Phi$

$\overset{\mathfrak{f}}{\smile}\ \Phi$ an Stelle von $\smile\mathfrak{f}\Phi$

$\grave{\alpha}\ \Phi$ an Stelle von $'\alpha\,\Phi$

$\Big|\begin{array}{l}\Phi_1\\ \Phi_2\end{array}$ an Stelle von $(\Phi_1 \mid \Phi_2)$

Die zuletzt eingeführte unhandliche zweidimensionale Schreibweise ist besonders charakteristisch für Frege und vermutlich dafür verantwortlich zu machen, daß sich seine Schrift nicht hat durchsetzen können.

Wir kommen vollends zu der eigentlichen Fregeschen Schreibweise, wenn wir eine graphische Verbindung verschiedener Funktionskonstanten einführen (vgl. hierzu *Grundgesetze der Arithmetik* I, §§6, 8, 12). Diese graphische Verbindung wird gerechtfertigt durch die Feststellung, daß die in der folgenden Tabelle jeweils links und rechts dargestellten Funktionen umfangsgleich sind:

$— —$ und $—$,

$—\!\mid\!—$ und $\mid$,

$—\!\mid\!\!\underline{\ \ }$ und $\big|$,

$—\!\smile\!—$ und $\smile$.

Frege schreibt daher insbesondere:

$\top$ für $\mid$,

$\sqsubset$ für $\big|$,

$—\!\smile\!—$ für $\smile$.

Als primitive aussagenlogische Verbindungen hat Frege also nur die Negation und die Implikation:

$\top\Phi$ besagt dasselbe, wie *nicht* Φ.

$\sqsubset\begin{array}{l}\Phi_1\\ \Phi_2\end{array}$ besagt dasselbe, wie Φ_1, wenn Φ_2.

Die Alternative und die Konjunktion werden bei Frege umschrieben:

$\sqsubset\begin{array}{l}\Phi_1\\ \top\Phi_2\end{array}$ besagt dasselbe, wie Φ_1 *oder* Φ_2 (nicht ausschließend).

$\top\!\sqsubset\begin{array}{l}\Phi_1\\ \top\Phi_2\end{array}$ besagt dasselbe, wie Φ_1 *und* Φ_2.

Als einzigen Quantor hat Frege die Generalisierung:

$-\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!-\Phi$ bzw. $-\!\overset{\mathfrak{f}}{\smile}\!-\Phi$ besagt dasselbe, wie *für alle* $\mathfrak{a}$ bzw. $\mathfrak{f}$: Φ.

Die Partikularisierung wird umschrieben:

$\top\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\top\Phi$ bzw. $\top\!\overset{\mathfrak{f}}{\smile}\!\top\Phi$ besagt dasselbe, wie *es gibt ein* $\mathfrak{a}$ bzw. $\mathfrak{f}$, *derart daß* Φ.

Eine in einer Formel Φ vorkommende Gegenstandsvariable a ist bei der Deutung generalisiert zu denken. Um auszudrücken, daß eine Formel behauptet wird (wie z.B. die Sätze seiner Begriffsschrift), verwendet Frege einen kleinen senkrechten Strich, der in der Mitte mit dem folgenden waagerechten Strich verbunden wird. Dies ist der *Behauptungsstrich*. Ein *Beispiel*:

$\vdash\!\!\begin{array}{l} \!-\, a \\ \!\llcorner\, a \end{array}$ besagt dasselbe, wie „a, wenn a" *wird behauptet*.

In verschiedenen Stücken des Nachlasses beschäftigt sich Frege mit seiner Begriffsschrift. In vielen Beispielen zeigt er, wie man umgangssprachliche und vor allem mathematische Aussagen begriffsschriftlich darstellen kann. Hier sind zu nennen insbesondere die Abhandlung *Booles rechnende Logik und die Begriffsschrift* (pp. 9ff.), ferner *Booles logische Formelsprache und meine Begriffsschrift* (pp. 53ff.), *Dialog mit Pünjer über Existenz* (Auffassung und Symbolisierung von Existenzaussagen pp. 60ff.), *Kurze Übersicht meiner logischen Lehren* (pp. 213ff.) und *Logische Allgemeinheit* (Symbolisierung von Allaussagen pp. 278ff.). In den beiden ersten zitierten Abhandlungen setzt sich Frege ausführlich mit den Vorzügen seiner Begriffsschrift vor der Formelsprache *Booles* auseinander. Er erkennt an, daß sich „die boolesche Logik durch systematische Durchbildung vor den abgerissenen Andeutungen Leibnizens" auszeichne (p. 11), findet jedoch, daß bei der Begriffsschrift die Forderung, „daß das Verhältnis der Zeichen mit dem der Sachen in möglichstem Einklange stehe", besser realisiert sei als in der Booleschen Formelsprache (p. 13). Nicht alles, was Frege ausdrücken kann, läßt sich in die Booleschen Zeichen übersetzen, während die umgekehrte Aussage zutrifft (p. 15). Auf pp. 16f. kritisiert Frege die von Boole zur Begründung seiner Formalisierung eingeführten Zeitmomente. Er zeigt ausführlich (pp. 45ff.), wie man eine bereits von Boole gestellte Aufgabe auch auf der Basis der Begriffsschrift systematisch lösen kann.

In *Begründung meiner strengeren Grundsätze des Definierens* (pp. 164ff.) befaßt sich Frege mit der Formelsprache von *Peano* und geht dabei vor allem ein auf den Unterschied zwischen einem generalisierten und einem nicht generalisierten Bedingungssatz. Dieser Unterschied kommt nach Ansicht Freges bei Peano nicht deutlich zum Ausdruck.

An mehreren Stellen beschäftigt sich Frege mit dem Begriff der Variablen. In diesem Zusammenhang unterscheidet er scharf zwischen Zeichen und Bezeichnetem und diskutiert seinen Funktionsbegriff (*Logische Mängel in der Mathematik* (pp. 171ff.), *Einleitung in die Logik* (pp. 201ff.)).

In den späten Nachlaßstücken finden sich Spuren der Auseinandersetzung Freges mit der in seinem System herleitbaren Antinomie, die seine Bemühungen, die Arithmetik auf die Logik zu gründen, zunichte gemacht hat. Er sieht, daß die Ursache für die Antinomie in der von ihm entworfenen Ontologie zu suchen ist, und beklagt, daß es schwer sei, sich nicht von der Sprache irreführen zu lassen (*Tagebucheintragungen über den Begriff der Zahl* (pp. 282f.), *Zahl* (pp. 284f.)). Er spricht aufgrund der selbstgemachten Erfahrung auch von einem „Kampfe", den der Philosoph „mit der Sprache" zu führen habe (*Erkenntnisquellen der Mathematik und der mathematischen Naturwissenschaften*, p. 289). Als besonders kritisch sieht er an dieser Stelle seine grundlegende frühere Annahme an, daß jedem Begriff ein Gegenstand als sein Umfang entsprechen soll. Den grundlegenden Unterschied zwischen (gesättigten) Gegenständen und (ungesättigten) Funktionen hält er jedoch bis zuletzt für wesentlich (so z.B. in *Über Schoenflies: Die logischen Paradoxien der Mengenlehre* (pp. 191 ff.), wo er eine von *Schoenflies* vorgeschlagene Auflösung der Russellschen Antinomie bespricht). –

2. *Die Fregesche Theorie der Arithmetik.* Schon im Vorwort seiner *Begriffsschrift* (1879) fragt Frege, ob man sich zur Begründung der arithmetischen Urteile auf Erfahrungstatsachen stützen müsse. Er stellt sich die Aufgabe, zu versuchen, wie weit man in der Arithmetik allein durch logische Schlüsse gelangen könne. Erneut greift er dieses Problem auf in dem Buch *Die Grundlagen der Arithmetik* (1884). Dort stellt er zunächst fest, daß eine Zahlangabe eine Aussage über einen Begriff sei. Sodann definiert er:

Einem Begriff (dessen Argumente Gegenstände sind) kommt die Zahl 0 zu, wenn kein Gegenstand unter diesen Begriff fällt, d.h., wenn jeder Gegenstand diesen Begriff zum Wahrheitswert des Falschen ergänzt.

Einem Begriff kommt die Zahl $(n+1)$ zu, wenn es einen Gegenstand a gibt, der unter diesen Begriff fällt, und wenn dem neuen Begriff, unter den ein Gegenstand genau dann fällt, wenn er bereits unter den ursprünglichen Begriff fällt aber verschieden ist von a, die Zahl n zukommt.

Durch die angegebenen Definitionen ist für jede konkret vorgegebene natürliche Zahl n erklärt, was es heißt, daß einem Begriff die Zahl n zukommt. Es ist damit aber noch keine Definition dafür gegeben, was unter einer natürlichen Zahl zu verstehen sei, und auch nicht dafür, was es heißt, Anzahl eines Begriffs zu sein. Um hierzu zu gelangen, analysiert Frege eine Methode, mit der man die Richtung in der Geometrie einführen kann, und geht analog dazu wie folgt vor. Er nennt zwei Begriffe gleichzahlig, wenn es eine umkehrbar eindeutige Abbildung gibt zwischen den Gegenständen, die unter den ersten, und den Gegenständen, die unter den zweiten Begriff fallen. Sodann bildet er, ausgehend von einem vorgegebenen Begriff F, einen abgeleiteten Begriff „gleichzahlig zu F". Diesem Begriff G kann eindeutig ein Gegenstand zugeordnet werden, nämlich sein Umfang. Dieser Gegenstand heißt die *Anzahl von F*. Ganz allgemein heißt ein Gegenstand n eine *Anzahl*, wenn er in der angegebenen Weise gewonnen werden kann, d.h., wenn es einen Begriff F gibt von der Art, daß n die Anzahl von F ist. Bei der angegebenen Definition sind die unendlichen Anzahlen nicht ausgeschlossen. Die natürlichen Zahlen sind die *endlichen* Anzahlen. Es bleibt die Aufgabe, diese unter den Anzahlen auszuzeichnen. Hierzu dienen die vier folgenden Definitionen:

(1) 0 wird eingeführt als die Anzahl, welche dem Begriff „sich selbst ungleich“ zukommt.

(2) *n folgt in der natürlichen Zahlenreihe unmittelbar auf m* soll besagen, daß es einen Begriff F und einen unter ihn fallenden Gegenstand x gibt, derart, daß F die Anzahl n hat und daß m die Anzahl des Begriffs „unter F fallend, aber ungleich x“ ist. (Die von Frege gewählte Bezeichnung der angegebenen zweistelligen Beziehung ist nicht sehr glücklich, da nach der Fregeschen Definition z.B. gilt: Die Anzahl des Begriffs, eine natürliche Zahl zu sein, folgt unmittelbar in der natürlichen Zahlenreihe auf sich selbst.)

(3) *n gehört der mit 0 beginnenden natürlichen Zahlenreihe an*, wenn n gleich 0 ist oder wenn n unter jeden Begriff F fällt, der die beiden folgenden Bedingungen erfüllt:

(a) Jeder Gegenstand, der in der natürlichen Zahlenreihe unmittelbar auf 0 folgt, fällt unter F (d.h. 1 fällt unter F).

(b) Wenn irgendein Gegenstand d unter den Begriff F fällt, so fällt auch jeder Gegenstand unter den Begriff F, welcher in der natürlichen Zahlenreihe unmittelbar auf d folgt (d.h. der Begriff F „vererbt sich“ von einem Gegenstand auf dessen unmittelbaren Nachfolger in der natürlichen Zahlenreihe).

(4) n heißt eine *endliche Anzahl* oder eine natürliche Zahl, wenn n der mit 0 beginnenden natürlichen Zahlenreihe angehört.

In den beiden Büchern *Grundgesetze der Arithmetik* I/II gelingt es Frege, auf der Basis eines begriffsschriftlich formulierten Logiksystems die grundlegenden Gesetze der Arithmetik an Hand der soeben gegebenen Definitionen zu deduzieren. So schien sein Vorhaben, die Arithmetik auf die Logik allein zu gründen, Erfolg gehabt zu haben. Allerdings hat es sich dann gezeigt, – worauf bereits oben hingewiesen wurde – daß das von Frege seinen Überlegungen zu Grunde gelegte Logiksystem widerspruchsvoll ist. Der Widerspruch läßt sich verhältnismäßig schnell gewinnen. Er beruht darauf, daß man mit den Fregeschen Annahmen die Russellsche Antinomie nachvollziehen kann. Im Nachlaß ist von dieser Antinomie verhältnismäßig wenig die Rede. Dagegen enthält der wissenschaftliche Briefwechsel Freges eine längere briefliche Diskussion mit *B. Russell* über den Widerspruch. Für eine Exposition der Russellschen Antinomie auf der Fregeschen Basis sei daher auf die Einleitung des Herausgebers zu Freges Briefwechsel mit Russell verwiesen (cf. ⟨104⟩, insbesondere pp. 201 f.).

Es findet sich, wie gerade bemerkt, nur weniges im Fregeschen Nachlaß über den Widerspruch in seinem System. Auf *Über Schoenflies: Die logischen Paradoxien der Mengenlehre* wurde bereits hingewiesen. In den etwa ein Jahr vor seinem Tod verfaßten *Tagebucheintragungen über den Begriff der Zahl* klagt Frege: „Meine Anstrengungen, über das ins Klare zu kommen, was man Zahl nennen will, haben zu einem Mißerfolge geführt“ (p. 282). Ähnlich drückt er sich aus in *Zahl* (p. 284). In den letzten Aufzeichnungen Freges *Erkenntnisquellen der Mathematik und der mathematischen Naturwissenschaften*, *Zahlen und Arithmetik* sowie *Neuer Versuch der Grundlegung der Arithmetik* finden sich Andeutungen über Bestrebungen, den

Zahlbegriff geometrisch zu begründen. Dabei beruft er sich auf eine von der Sinneswahrnehmung und der logischen Erkenntnisquelle unabhängige „geometrische Erkenntnisquelle". Frege will hier nicht, wie es meist in der Mathematik gemacht wird, zunächst die natürlichen Zahlen begründen, und von dieser Basis aus in mehreren Schritten bis zu den komplexen Zahlen aufsteigen. Es scheint, daß man seine Andeutungen so verstehen darf, daß er im Sinne der Gaußschen Zahlenebene die komplexen Zahlen mit den Punkten einer Ebene identifizieren will. Einwände gegen das Aktual-Unendliche hat Frege offenbar nicht gehabt, wie z.B. der *Entwurf zu einer Besprechung von Cantors Gesammelten Abhandlungen zur Lehre vom Transfiniten* (pp. 76 ff.) zeigt.

Seit seiner Einführung der Begriffsschrift hat sich Frege sehr intensiv auseinandergesetzt mit dem Versuch von Philosophen und Mathematikern, den Zahlbegriff zu verstehen. Viele seiner Publikationen sind diesem Thema gewidmet. Sie zeichnen sich aus durch ungewöhnliche polemische Schärfe. Verschiedene Proben dieser beißenden Kritik Freges finden sich auch im Nachlaß, wenn er auf die Zahlauffassungen anderer Mathematiker eingeht. In diesem Zusammenhang seien genannt seine Kritiken an *Biermann* (pp. 81 ff.), *Cantor* (pp. 77 ff.) und an *Weierstrass* (pp. 232 ff.).

H. Hermes

II. Zur Formalismuskritik und zum Logikbegriff Freges

Frege gilt als der erste, der ein hinreichend ausdrucksfähiges und präzises formalsprachliches System aufgeführt hat. Im Vergleich zu den Ansprüchen gegenüber der natürlichen Sprache, die inzwischen häufig mit dem Terminus „formale Sprache" verbunden sind, operiert Frege jedoch noch wesentlich vorsichtiger und teilweise genauer. Unter den nachgelassenen Schriften Freges macht dies insbesondere die Abhandlung *Logik in der Mathematik* (pp. 219 ff.) deutlich. Sie enthält u.a. eine Zusammenfassung der bisher nur zerstreut oder überhaupt nicht zugänglichen definitionstheoretischen Vorstellungen Freges. Die Abschnitte über Definitionen in den *Grundgesetzen der Arithmetik* (Einleitung, p. XIII; I, §§ 26 ff.; II, §§ 55 ff.), die hier zur Einwendung herangezogen werden könnten, setzen schon auf einer fortgeschrittenen Stufe ein und enthalten wenig zu den Grundlagen, insbesondere zum Problem des definitionstheoretischen Anfangs. Gerade dazu äußert sich Frege in *Logik in der Mathematik* sehr genau.

Wie auch sonst stellenweise[1]) unterscheidet er (p. 224) zwei Arten der Festlegung von Wortbedeutungen: *Erläuterungen* und *eigentliche Definitionen*[2]) (Er-

[1] *BuG*, p. 193. – *Unbekannte Briefe Frege's über die Grundlagen der Geometrie und Antwortbrief Hilbert's an Frege* ⟨42⟩, pp. 13 f. – *Über die Grundlagen der Geometrie* ⟨30⟩, pp. 301 f.
[2] Auf diese beschränkt sich die Erörterung in den *Grundgesetzen der Arithmetik*.