4 Beweistheorie

„Man kann – unter Voraussetzung der Widerspruchsfreiheit der klassischen Mathematik – sogar Beispiele für Sätze (und zwar solche von der Art des Goldbach'schen oder Fermat'schen) angeben, die zwar inhaltlich richtig, aber im formalen System der klassischen Mathematik unbeweisbar sind."

Kurt Gödel [164]

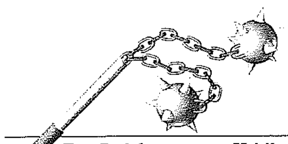
In diesem Kapitel werden wir uns ausführlich mit der Beweistheorie, einer der tragenden Säulen der mathematischen Logik, beschäftigen. In ihrem Kern steht der Gedanke, Beweise als mathematische Objekte zu interpretieren und auf diese Weise einer präzisen Analyse zugänglich zu machen. Zur vollen Blüte ist die Beweistheorie in der ersten Hälfte des zwanzigsten Jahrhundert gereift. Sie hat verblüffende Erkenntnisse hervorgebracht, die einen tiefen Einblick in das Wesen des mathematischen Schließens gewähren und uns zugleich die Grenzen der Mathematik in aller Klarheit vor Augen führen. Um welche Erkenntnisse es sich hierbei im Detail handelt, ist Gegenstand dieses Kapitels.

In den Abschnitten 4.1 bis 4.4 werden wir ausführlich die Gödel'schen Unvollständigkeitssätze diskutieren. Anschließend werden wir herausarbeiten, wie allgegenwärtig das Phänomen der Unvollständigkeit wirklich ist. Die in Abschnitt 4.5 vorgestellte Goodstein-Folge wird verdeutlichen, dass selbst harmlos wirkende Aussagen der gewöhnlichen Mathematik betroffen sind.

Im Zusammenhang mit Gödels Unvollständigkeitssätzen werden wir immer wieder von formalen Systemen reden, die *stark genug sind, um die Peano-Arithmetik zu formalisieren.* Was genau ist damit gemeint? In seiner Originalarbeit hat Gödel den Unvollständigkeitssatz für ein spezielles formales System bewiesen, das er kurzerhand als P bezeichnete. In seinen eigenen Worten ist P *„im wesentlichen das System, welches man erhält, wenn man die Peano'schen Axiome mit der Logik der PM [Principia Mathematica] überbaut"* [64]. Weiter hinten in seiner Arbeit führt er aus, dass sein Ergebnis keinesfalls auf P beschränkt ist, sondern alle formalen Systeme erfasst, die ausdrucksstark genug sind, um über die additiven und multiplikativen Eigenschaften der natürlichen Zahlen zu sprechen. Neben der Peano-Arithmetik fallen hierunter auch alle Theorien, in denen sich die natürlichen Zahlen in Form anderer Objekte repräsentieren lassen. Mit der Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre haben wir eine solche Theorie bereits kennen gelernt. Obwohl die natürlichen Zahlen in ZF und ZFC nicht als eigenständige Objekte existieren, lassen sie sich in Form spezieller Mengen repräsentieren und die Addition und Multiplikation auf entsprechende Mengenoperationen abbilden. Dies ist gemeint, wenn wir sagen, ein formales System sei stark genug, um die Peano-Arithmetik zu formalisieren.

4.1 Gödel'sche Unvollständigkeitssätze

Die Gödel'schen Unvollständigkeitssätze sind das Herzstück der modernen Beweistheorie. Ihre Inhalte sind düster, und dennoch werfen sie ein so helles Licht auf das Wesen der mathematischen Methode, dass sie seit ihrer Entdeckung im Jahr 1931 unzählige Mathematiker und Naturwissenschaftler in ihren Bann ziehen konnten. Ich selbst las von ihnen das erste Mal in Douglas Hofstadters Meisterwerk *Gödel, Escher,*



Zu Gödels ärgsten Kritikern gehörte kein geringerer als der berühmte Mengentheoretiker Ernst Zermelo, dessen Name uns schon mehrfach in diesem Buch begegnet ist. Im September 1931 trafen beide auf der Versammlung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung in Bad Elster zusammen. Erscheinungsbildlich hatte der zurückhaltende Gödel seinem damals 60-jährigen Antagonisten wenig entgegenzusetzen. Zermelo war bekannt für seine Wortgewandtheit und seine aufbrausende, manchmal auch jähzornige Art [44]. Er ließ in Bad Elster keinen Zweifel daran, was er von dem jungen Gödel und seinen absurden Ergebnissen hielt, und lehnte zunächst jede Konversation mit ihm ab. Dennoch kam ein persönliches Gespräch zustande, das unerwartet friedlich verlief. Bereits sechs Tage später teilte Zermelo dann aber schriftlich mit, einen Fehler im Beweis der Unvollständigkeitssätze gefunden zu haben. Es folgte ein Briefwechsel, in dem Gödel versuchte, die offensichtlichen Missverständnisse auszuräumen. Zermelo ließ sich von den gelieferten Argumenten nicht beirren und machte seine Kritik 1932 schließlich öffentlich [204]. Gödel war kein Mann der Konfrontation und unternahm danach keine weiteren Versuche mehr, dem alternden Zermelo seine Unvollständigkeitssätze zu erklären. Rudolf Carnap sagte später über den Briefwechsel, dass Zermelo die Erklärungsversuche Gödels *„völlig missverstanden“* habe. [44].

Bach [90], kurz vor Beginn meines Studiums. Auch wenn seitdem fast 20 Jahre vergangen sind, ist die Faszination, die ich für Gödels Werk empfinde, ungebrochen. Unzweifelhaft sind es die Unvollständigkeitssätze, die mich zum Verfassen dieses Buchs bewegt haben.

Zwei Leitmotive prägen die folgenden Abschnitte. Zunächst ist es mir ein Anliegen, die Unvollständigkeitssätze entlang Gödels ursprünglicher Argumentationslinie aus dem Jahr 1931 herzuleiten. Auf diese Weise will ich versuchen, nicht nur den Inhalt der Unvollständigkeitssätze zu beweisen, sondern so weit wie dies möglich ist, auch einen Einblick in Gödels Gedankenwelt zu gewähren. Vorschnelle Euphorie möchte ich an dieser Stelle gleichwohl bremsen, denn auch nach der Lektüre dieses Kapitels wird sein Werk eine schwer zu lesende Arbeit bleiben. Gödel hat sie mit zahllosen Formeln und Definitionen gespickt, die den Blick auf das Wesentliche zunächst verstellen. Dennoch ist die akribische Präzision, mit der er seine Ergebnisse bewiesen hat, alles andere als ein Makel; ohne sie hätten die Sätze bei seinen Kritikern niemals die notwendige Akzeptanz gefunden. Für fast alle seiner Zeitgenossen waren Gödels Unvollständigkeitssätze ein schwerer Schlag, und viele standen ihnen schon deshalb kritisch gegenüber, weil nicht sein kann, was nicht sein darf.

Es ist nicht mein Ziel, Gödels Ergebnisse mit diesem Buch gegen kritische Stimmen zu verteidigen. Stattdessen möchte ich versuchen, den Kern seiner faszinierenden Beweise offenzulegen und habe aus diesem Grund bewusst vermieden, die folgenden Abschnitte mit technischen Details zu überfrachten. Dies trifft insbesondere auf eine Reihe von Hilfssätzen zu, die inhaltlich wenig spektakulär sind, aber in vielen Fällen eine ausführliche technische Begründung erfordern. Die Beweise dieser Sätze sind nicht im Detail aufgeführt; dafür wird an den betreffenden Textstellen darauf hingewiesen, wo sie nachgeschlagen werden können.

4.2 Der erste Unvollständigkeitssatz

Der erste Gödel'sche Unvollständigkeitssatz ist der bekannteste und am häufigsten zitierte Satz der mathematischen Logik. Grob gesprochen besagt er, dass sich die Begriffe der Wahrheit und der Beweisbarkeit in hinreichend ausdrucksstarken formalen Systemen nicht in Einklang bringen lassen. Zwangsläufig müssen diese Systeme unvollständig sein, d. h., es existieren stets Aussagen, die zwar inhaltlich wahr sind, aber nicht innerhalb des Systems bewiesen werden können.

Satz V: Zu jeder rekursiven Relation $R(x_1 \ldots x_n)$ gibt es ein n-stelliges *Relationszeichen* r (mit den *freien Variablen*[89]) $u_1, u_2 \ldots u_n$), so daß für alle Zahlen-n-tupel $(x_1 \ldots x_n)$ gilt:

$$R(x_1 \ldots x_n) \rightarrow \mathrm{Bew}\left[Sb\left(r\,{u_1 \ldots u_n \atop Z(x_1) \ldots Z(x_n)}\right)\right] \quad (3)$$

$$\overline{R}(x_1 \ldots x_n) \rightarrow \mathrm{Bew}\left[\mathrm{Neg}\, Sb\left(r\,{u_1 \ldots u_n \atop Z(x_1) \ldots Z(x_n)}\right)\right] \quad (4)$$

Wir begnügen uns hier damit, den Beweis dieses Satzes, da er keine prinzipiellen Schwierigkeiten bietet und ziemlich umständlich

...

Das allgemeine Resultat über die Existenz unentscheidbarer Sätze lautet:

Satz VI: Zu jeder ω-widerspruchsfreien rekursiven Klasse $\varkappa$ von *Formeln* gibt es rekursive *Klassenzeichen* r, so daß weder v Gen r noch Neg (v Gen r) zu Flg ($\varkappa$) gehört (wobei v die *freie Variable* aus r ist).

Beweis: Sei $\varkappa$ eine beliebige rekursive ω-widerspruchsfreie Klasse

Abbildung 4.1: Zwei Sätze aus der Gödel'schen Originalarbeit [64]. Satz V ist ein wichtiger Meilenstein im Beweis des ersten Unvollständigkeitssatzes. Seine inhaltliche Entsprechung ist Satz 4.5, den wir in Abschnitt 4.2.3 diskutieren werden. Gödel selbst hat den Beweis dieses Satzes nur umrissen. Exakt ausgearbeitet ist er beispielsweise in [170].
Satz VI ist das Hauptresultat zur Unvollständigkeit formaler Systeme. Aus ihm erhält Gödel an späterer Stelle seiner Arbeit die inhaltliche Aussage unseres Satzes 4.2 als Korollar. Beide Sätze sind hier bewusst in der ursprünglichen Gestalt dargestellt. Sie machen deutlich, wie sehr sich die damals verwendete Terminologie von der heutigen unterscheidet. Selbst auf den zweiten Blick ist es nicht immer einfach, zu erkennen, welche inhaltliche Aussage sich tatsächlich hinter ihnen verbirgt.

Ein wichtiger Punkt vorweg: Nicht jedes formale System ist unvollständig. Betroffen sind nur jene, die ausdrucksstark genug sind, um die Peano-Arithmetik, also die natürlichen Zahlen zusammen mit der Addition und der Multiplikation, zu formalisieren. Unbestritten gehören die natürlichen Zahlen zum vitalen Kern der Mathematik; ohne sie würde diese Wissenschaft auf wenige Teilgebiete zusammenschrumpfen. Der Unvollständigkeitssatz attestiert damit nichts weniger als die Unmöglichkeit, ein formales System zu konstruieren, in dem alle wahren mathematischen Aussagen der gewöhnlichen Mathematik auch als solche bewiesen werden können.

Über den ersten Unvollständigkeitssatz wurde viel publiziert, und ein Vergleich der verschiedenen Darstellungen offenbart zwei wichtige Besonderheiten. Zum einen verstellt die uneinheitlich verwendete Terminologie häufig den Blick darauf, dass es sich inhaltlich um den gleichen Satz handelt (vgl. Abbildung 4.1). Zum anderen werden Beweise angeführt, die sich in ihrer Länge drastisch unterscheiden. So kommt der Autor in [161] bereits nach wenigen Absätzen zu dem gewünschten Ergebnis, während sich Gödels Originalbeweis aus dem Jahr 1931 über viele Seiten erstreckt. Wie kann das sein?

Zwei Gründe sind hierfür maßgebend. Zunächst einmal basieren viele der neueren Beweise auf dem Begriff der *Berechenbarkeit*. Mit der

Formalisierung dieses Begriffs ebnete Alan Turing 1936 einen Weg, auf dem sich Gödels Ergebnis vergleichsweise rasch erreichen lässt. Der Hauptgrund ist aber ein anderer: Es existieren mehrere Varianten des ersten Unvollständigkeitssatzes, die sich nicht nur in der gewählten Formulierung unterscheiden, sondern auch inhaltlich eine geringfügig andere Aussage treffen. In der Literatur wird darauf nur selten hingewiesen, und dennoch ist es wichtig, diese Unterschiede zu verstehen. Nur so lassen sich Missverständnisse vorab vermeiden. Eine häufig bemühte Variante ist diese:

Satz 4.1 (Erster Unvollständigkeitssatz, semantisch)

> Jedes korrekte formale System, das stark genug ist, um die Peano-Arithmetik zu formalisieren, ist unvollständig.

Dies ist die *semantische Variante* des ersten Gödel'schen Unvollständigkeitssatzes. Sie macht eine Aussage über korrekte formale Systeme, also über Systeme, in denen sich ausschließlich wahre Aussagen ableiten lassen (aus $\vdash \varphi$ folgt $\models \varphi$). Umfasst ein solches System die Peano-Arithmetik, ist es also ausdrucksstark genug, um über die additiven und multiplikativen Eigenschaften der natürlichen Zahlen zu sprechen, so ist es der Unvollständigkeit preisgegeben. In einem solchen System existiert stets eine wahre Aussage φ, die nicht innerhalb des Systems bewiesen werden kann. Für die semantische Variante des ersten Gödel'schen Unvollständigkeitssatzes gibt es in der Tat vergleichsweise kurze Beweise, auf die wir in Kapitel 5 zurückkommen werden.

Neben der semantischen Version existiert eine zweite Variante, die den Begriff der *Korrektheit* vollständig vermeidet. Sie lautet wie folgt:

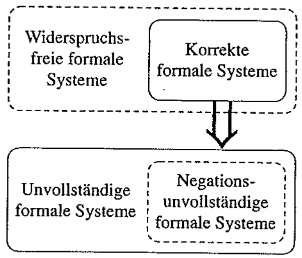
Satz 4.2 (Erster Unvollständigkeitssatz, syntaktisch)

> Jedes widerspruchsfreie formale System, das stark genug ist, um die Peano-Arithmetik zu formalisieren, ist negationsunvollständig.

Dies ist die *syntaktische Variante* des ersten Gödel'schen Unvollständigkeitssatzes. Sie macht eine Aussage über eine größere Klasse formaler Systeme, da als Voraussetzung nur noch die Widerspruchsfreiheit und nicht mehr die Korrektheit des Kalküls gefordert wird. Da jedes negationsunvollständige formale System, das die Peano-Arithmetik formalisiert, auch unvollständig ist und aus der Korrektheit eines formalen Systems stets dessen Widerspruchsfreiheit folgt, ist die semantische Formulierung eine direkte Folgerung aus der syntaktischen (Abbildung 4.2).

- Semantische Variante

„Jedes korrekte formale System, das stark genug ist, um die Peano-Arithmetik zu formalisieren, ist unvollständig."



- Syntaktische Variante

„Jedes widerspruchsfreie formale System, das stark genug ist, um die Peano-Arithmetik zu formalisieren, ist negationsunvollständig."

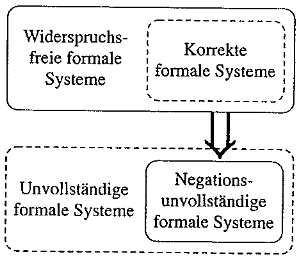


Abbildung 4.2: Die semantische Variante des ersten Gödel'schen Unvollständigkeitssatzes ist inhaltlich schwächer als die syntaktische Variante.

Die inhaltliche Aussage des ersten Gödel'schen Unvollständigkeitssatz ist zweifellos beeindruckend; noch verblüffender ist allerdings die Art und Weise, wie Gödel diese Sätze bewies. In groben Worten gesprochen, gelang es ihm, einen Satz mit der folgenden Bedeutung zu konstruieren:

„Ich bin innerhalb des Kalküls unbeweisbar." (4.1)

Die Selbstbezüglichkeit dieses Satzes erinnert an das Barbier-Paradoxon aus Abschnitt 1.2.5 und ist ein Schlüsselelement in Gödels Beweisführung. Für diesen Satz werden wir später zeigen, dass in einem formalen System, das die Voraussetzungen des ersten Unvollständigkeitssatzes erfüllt, weder der Satz selbst noch dessen Negation aus den Axiomen abgeleitet werden kann. Mit anderen Worten: Gödels Aussage ist innerhalb des Systems unentscheidbar. In Abschnitt 4.2.4 werden wir sehen, dass sich die Unentscheidbarkeit dieses Satzes in wenigen Zeilen beweisen lässt. Die eigentliche Schwierigkeit liegt woanders, nämlich in der Konstruktion des Satzes selbst.

Wie um alles in der Welt konnte es Gödel schaffen, einen Satz zu konstruieren, der seine eigene Unbeweisbarkeit postuliert? Dieser Satz ist anders als alle uns vertrauten Theoreme der Analysis, der Algebra oder eines anderen Gebiets der gewöhnlichen Mathematik. Es ist ein Satz der Meta-Ebene, schließlich stellt er eine Behauptung über das formale System auf, in dem er selbst formuliert wurde. Indem der Satz über sich selbst spricht, tritt er gewissermaßen aus seinem eigenen formalen System heraus. Aber wie kann so etwas gelingen?

Tatsächlich hatte Gödel eine Hintertür entdeckt, durch die Sätze ihr eigenes formales System in gewissem Sinne verlassen können. Die Kernidee seines Ansatzes besteht in der Konstruktion arithmetischer Aussagen, die zur gleichen Zeit zwei inhaltlich verschiedene Bedeutungen in sich tragen (Abbildung 4.3).

- Zuallererst besitzen diese Sätze eine arithmetische Bedeutung. Innerhalb des Kalküls betrachtet sind sie gewöhnliche Sätze der Peano-Arithmetik, und als solche machen sie Aussagen über die natürlichen Zahlen.
- Von außen betrachtet besitzen die Sätze eine zweite, metatheoretische Bedeutung. Sie kommt durch einen verdeckten Isomorphismus zu Stande, dessen Entdeckung zu den Sternstunden der mathematischen Logik zählt. Gödel konnte zeigen, dass die Regeln und Axiome eines formalen Systems arithmetisch repräsentiert werden können und sich die symbolischen Manipulationen von Zeichenketten,

> Welche Variante des ersten Unvollständigkeitssatzes hat Gödel im Jahr 1931 bewiesen? Ein Blick in seine Originalarbeit zeigt, dass sein Unvollständigkeitsresultat eine abgeschwächte Variante von Satz 4.2 ist. Gödel schaffte es damals noch nicht, sein Ergebnis unter der Annahme der Widerspruchsfreiheit zu beweisen, und musste stattdessen die sogenannte ω-Widerspruchsfreiheit voraussetzen. Erst im Jahr 1936 gelang Barkley Rosser der Nachweis, dass sich die ω-Widerspruchsfreiheit durch die gewöhnliche Widerspruchsfreiheit ersetzen lässt [40, 151]. Was sich hinter Gödels ursprünglicher Voraussetzung genau verbirgt, werden wir im Laufe dieses Kapitels herausarbeiten. Soviel vorweg: Jedes ω-widerspruchsfreie Kalkül ist auch widerspruchsfrei, nicht aber umgekehrt.
> Die Entscheidung Gödels, nicht die semantische, sondern die schwierigere syntaktische Variante zu beweisen, ist nur im historischen Kontext zu verstehen. Für Gödel war es wichtig, seinen Beweis nicht auf den semantischen Wahrheitsbegriff zu stützen, schließlich entstand seine Arbeit in einer Zeit, in der die Nachbeben der mengentheoretischen Paradoxien noch immer zu spüren waren und viele seiner Zeitgenossen dem Wahrheitsbegriff skeptisch oder gar feindselig gegenüberstanden. Es war eine Zeit, in der nach Gödels Worten *„ein Konzept der objektiven mathematischen Wahrheit [...] mit größtem Misstrauen betrachtet und in weiten Kreisen als bedeutungsleer zurückgewiesen wurde."* [44].

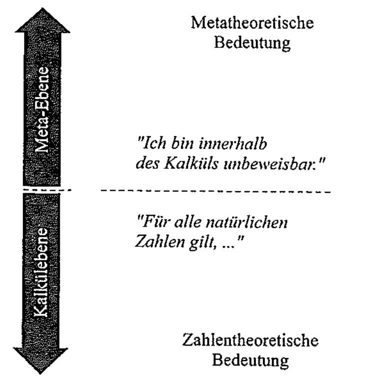


Abbildung 4.3: Gödel gelang es, eine arithmetische Aussage zu konstruieren, die neben ihrer zahlentheoretischen Bedeutung eine zweite, metatheoretische Bedeutung besitzt. Diese kommt durch einen unsichtbaren Isomorphismus zustande, der einen Zusammenhang zwischen den symbolischen Manipulationen von Zeichenketten und den arithmetischen Eigenschaft der natürlichen Zahlen herstellt. Auf diese Weise gelang es Gödel, eine arithmetische Aussage zu konstruieren, die ihr eigenes System verlassen und ihre eigene Unbeweisbarkeit postulieren kann.

wie sie bei der Durchführung formaler Beweise verwendet werden, auf die arithmetische Ebene übertragen lassen. Auf diese Weise gelang es ihm, metatheoretische Aussagen, wie z. B. die Frage nach der Existenz eines Beweises, in arithmetische Formeln hineinzucodieren.

Das einzige, was Gödel hierfür benötigte, waren die Mittel der Peano-Arithmetik, d. h. die natürlichen Zahlen zusammen mit der Addition und der Multiplikation. Damit hatte er ein erstaunliches Phänomen entdeckt: Jedes formale System, das die Peano-Arithmetik umfasst, ist stark genug, um metatheoretische Aussagen zu formulieren, und damit implizit in der Lage, über sich selbst zu sprechen.

4.2.1 Arithmetisierung der Syntax

Es ist Zeit, uns genauer mit der Frage zu beschäftigen, wie wir mithilfe arithmetischer Formeln über die Eigenschaften formaler Systeme sprechen können. Um unser Ziel zu erreichen, müssen wir eine Möglichkeit finden, Formeln und Beweise mit den natürlichen Zahlen in Beziehung zu setzen. Konkret werden wir diesen Bezug über eine Zuordnungsvorschrift herstellen, über die wir jede Formel und jeden Beweis eines formalen Systems systematisch in eine natürliche Zahl übersetzen können. Die berechnete Zahl wird uns später als Stellvertreter für die ursprüngliche Formel bzw. den ursprünglichen Beweis dienen. Das formale System, für das wir uns in diesem Kapitel interessieren, ist die Peano-Arithmetik aus Abschnitt 3.1, und deshalb werden wir uns auf die Betrachtung dieses Systems beschränken. Die aufgezeigte Methodik ist aber so allgemein, dass sie auf beliebige formale Systeme angewendet werden kann.

Die Syntax der Peano-Arithmetik lässt sich auf ganz unterschiedliche Weisen arithmetisieren. Eine einfache Möglichkeit besteht darin, die Formeln auf dem heimischen PC einzutippen und die intern abgelegte Bitfolge als natürliche Zahl zu interpretieren. Besonders einfach wird die Umwandlung, wenn wir auf den Unicode zurückgreifen (Abbildung 4.4). In dieser standardisierten Zeichentabelle sind sämtliche der von uns benötigten Logiksymbole vorhanden, so dass wir keine Änderung an der Formelsyntax vornehmen müssen. Um beispielsweise die Formel

$$\forall x\, x = x$$

unter dem Betriebssystem OS X in das Unicode-basierte UTF-16-Format zu übersetzen, genügt es, auf der Konsole die folgende Befehls-

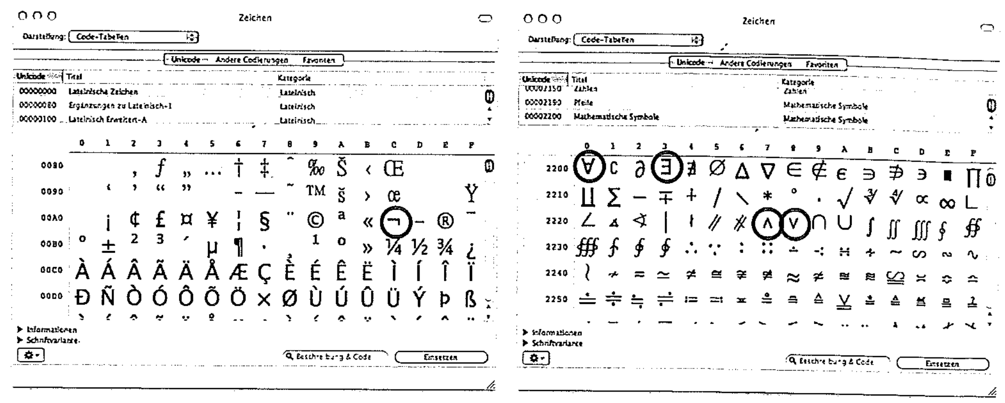


Abbildung 4.4: Der Unicode umfasst insgesamt 16 Bereiche (*planes*), die jeder für sich 65536 verschiedene Zeichen aufnehmen können [4]. Das Ergebnis ist eine universelle Symboltabelle, die jedem bekannten Zeichen einen eindeutigen binären Code zuordnet, der auf jeder Hardware, unter jedem Betriebssystem und in jeder Programmiersprache immer derselbe ist.

sequenz einzutippen:

```
echo -n "∀xx=x" | iconv -t UTF-16 | hexdump
```

Das Ergebnis ist eine 12-elementige Byte-Sequenz oder, gleichbedeutend, eine 24-stellige Hexadezimalzahl, die wir mit $\ulcorner\varphi\urcorner$ notieren:

$$\ulcorner\varphi\urcorner = \underbrace{\mathtt{FE\ FF}}_{\text{Header}}\ \underbrace{\mathtt{22\ 00}}_{\text{'}\forall\text{'}}\ \underbrace{\mathtt{00\ 78}}_{\text{'x'}}\ \underbrace{\mathtt{00\ 78}}_{\text{'x'}}\ \underbrace{\mathtt{00\ 3D}}_{\text{'='}}\ \underbrace{\mathtt{00\ 78}}_{\text{'x'}}$$

Die ersten zwei Bytes sind der UTF-16-Header. Danach folgen jeweils zwei Bytes, die den Unicode des jeweiligen Formelzeichens enthalten. Die Zahl $\ulcorner\varphi\urcorner$ bezeichnen wir als *Gödelnummer* der Formel φ und den Vorgang des Codierens als *Gödelisierung*.

Die vorgestellte Codierung ist nur eine von vielen möglichen, und tatsächlich spielt es eine untergeordnete Rolle, mit welchem konkreten Zahlenwert eine Formel beschrieben wird. Damit eine Codierung für unsere Zwecke dienlich ist, muss sie lediglich drei Mindestanforderungen erfüllen:

- Die Codierung muss die Menge der Formeln *injektiv* in die Menge der natürlichen Zahlen einbetten, d. h., sie muss verschiedene Formeln mit unterschiedlichen Gödelnummern belegen. Die UTF-16-Codierung erfüllt diese Forderung, da verschiedene Textfragmente immer auch eine unterschiedliche UTF-16-Darstellung besitzen.

Syntaktische Ebene		Arithmetische Ebene
$\vdash \underbrace{0+0=0}_{=\varphi_1}$	(S5) $\xrightarrow{\text{Gödelisierung}}$	$\ulcorner\varphi_1\urcorner$ = `FE FF 00 30 00 2B 00 30 00 3D 00 30`
$\vdash \underbrace{0+0=0 \rightarrow (0+0=0 \rightarrow 0=0)}_{=\varphi_2}$	(S1) $\xrightarrow{\text{Gödelisierung}}$	$\ulcorner\varphi_2\urcorner$ = `FE FF 00 30 00 2B 00 30 00 3D 00 30 21 92 00 28 00 30 00 2B 00 30 00 3D 00 30 21 92 00 30 00 3D 00 30 00 29`
$\vdash \underbrace{0+0=0 \rightarrow 0=0}_{=\varphi_3}$	(MP, 1,2) $\xrightarrow{\text{Gödelisierung}}$	$\ulcorner\varphi_3\urcorner$ = `FE FF 00 30 00 2B 00 30 00 3D 00 30 21 92 00 30 00 3D 00 30`
		$\ulcorner\varphi_2\urcorner = \ulcorner\varphi_1\urcorner \cdot 16^{48} + \underbrace{\texttt{21920028}}_{'\rightarrow('} \cdot 16^{40} + (\ulcorner\varphi_3\urcorner - \underbrace{\texttt{FEFF}}_{\text{Header}} \cdot 16^{36}) \cdot 16^3 + \underbrace{\texttt{29}}_{')'}$
$\vdash \underbrace{0=0}_{=\varphi_4}$	(MP, 1,3) $\xrightarrow{\text{Gödelisierung}}$	$\ulcorner\varphi_4\urcorner$ = `FE FF 00 30 00 3D 00 30`
		$\ulcorner\varphi_3\urcorner = \ulcorner\varphi_1\urcorner \cdot 16^{16} + \underbrace{\texttt{2192}}_{'\rightarrow'} \cdot 16^{12} + (\ulcorner\varphi_4\urcorner - \underbrace{\texttt{FEFF}}_{\text{Header}} \cdot 16^{12})$

Abbildung 4.5: Jede syntaktische Manipulation, die eine Beweiskette $\varphi_0, \ldots, \varphi_i$ z. B. durch die Anwendung einer Schlussregel verlängert, lässt sich als arithmetische Beziehung deuten, die zwischen den Gödelnummern $\ulcorner\varphi_0\urcorner, \ldots, \ulcorner\varphi_i\urcorner, \ulcorner\varphi_{i+1}\urcorner$ besteht.

- Die Gödelnummern müssen *berechenbar* sein, d. h., es muss ein Verfahren existieren, mit dem wir die Zahl $\ulcorner\varphi\urcorner$ für jede Formel φ systematisch ermitteln können. Die UTF-16-Codierung erfüllt diese Forderung auf triviale Weise, schließlich können wir sie auf jedem PC direkt erzeugen.

- Wir müssen für jede natürliche Zahl entscheiden können, ob sie eine Symbolkette codiert, die nach den Syntaxregeln unserer Kalkülsprache aufgebaut ist. Kurzum: Wir müssen für jede natürliche Zahl entscheiden können, ob sie eine Formel repräsentiert. Dies ist für UTF-16-codierte Zahlen ganz offensichtlich möglich.

Auch wenn die UTF-16-Codierung alle Anforderungen erfüllt, ist sie für unsere Zwecke nur bedingt geeignet. Um den Grund hierfür zu verstehen, nehmen wir an, $\varphi_0, \ldots, \varphi_{i+1}$ seien Formeln der Peano-Arithmetik und φ_{i+1} sei durch die Anwendung einer Schlussregel aus den vorangegangenen Formeln hervorgegangen. Auf der einen Seite besteht zwischen den Formeln $\varphi_0, \ldots, \varphi_{i+1}$ eine syntaktische Beziehung, da die Anwendung einer Schlussregel einer symbolischen Manipulation der Zeichenketten gleich kommt. Auf der anderen Seite besteht zwischen den Gödelnummern $\ulcorner\varphi_0\urcorner, \ldots, \ulcorner\varphi_{i+1}\urcorner$ eine arithmetische Beziehung. Abbildung 4.5 demonstriert das Gesagte am Beispiel eines Beweises, den wir in Abschnitt 3.1.3 geführt haben. Es ist der Beweis von Theorem PA1 mit der Instanziierung $\sigma = 0$. Verwenden wir zur Codierung das UTF-16-Format, so lassen sich die arithmetischen Beziehung zwischen den verschiedenen Gödelnummern nur umständlich beschreiben. Verwunderlich ist dies nicht, schließlich haben wir den Unicode für etwas verwendet, für das er nicht geschaffen wurde.

Aus diesem Grund werden wir jetzt einen Ansatz verfolgen, der sich an den Darlegungen in [170] orientiert und aufgrund seines mathematischen Charakters für unsere Zwecke besser geeignet ist. Die Codierung ist jener in Gödels Originalarbeit sehr ähnlich. Die Übersetzung in natürliche Zahlen erfolgt schrittweise:

- Wie bei der UTF-16-Codierung ordnen wir jedem Symbol der Kalkülsprache eine natürliche Zahl zu, verwenden anstelle der Unicodes aber die Zahlenwerte aus Tabelle 4.1. Die Werte sind so gewählt, dass sämtlichen Logiksymbolen jeweils eine ungerade Zahl zugeordnet wird. Die geraden Zahlen sind für die Codierung von Variablen vorgesehen.

- Um eine einzelne Formel φ der Kalkülsprache zu codieren, schreiben wir die Zahlenwerte, anders als bei der UTF-16-Codierung, nicht einfach hintereinander auf. Stattdessen verwenden wir den Zahlenwert des i-ten Formelzeichens als Exponent der i-ten Primzahl und fassen alle Ausdrücke, wie in Abbildung 4.6 gezeigt, zu einem gemeinsamen Produkt zusammen. Bezeichnen wir den Zahlenwert des i-ten Formelzeichens mit c_i und die i-te Primzahl mit π_i, so können wir die Gödelnummer $\ulcorner\varphi\urcorner$ wie folgt notieren:

$$\ulcorner\varphi\urcorner := \pi_1^{c_1} \cdot \pi_2^{c_2} \cdot \pi_3^{c_3} \cdot \ldots$$

Die Verwendung von Primzahlen ist an dieser Stelle essentiell. Da jede natürliche Zahl eindeutig durch ihre Primfaktoren beschrieben ist, werden zwei verschiedene Formeln immer auf verschiedene Gödelnummern abgebildet. Abbildung 4.7 fasst zusammen, wie sich

¬ ↕ 1	∧ ↕ 3	∨ ↕ 5	→ ↕ 7	↔ ↕ 9
∀ ↕ 11	∃ ↕ 13	= ↕ 15	(↕ 17	) ↕ 19
0 ↕ 21	s ↕ 23	+ ↕ 25	× ↕ 27	
x ↕ 2	y ↕ 4	z ↕ 6	… ↕ …	

Tabelle 4.1: Um die Syntax der Peano-Arithmetik zu arithmetisieren, wird zunächst jedes Grundsymbol der Kalkülsprache in eine natürliche Zahl übersetzt.

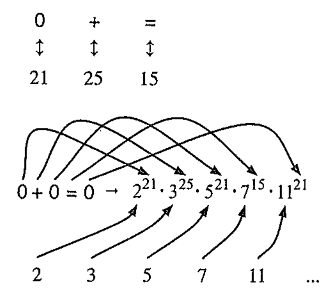


Abbildung 4.6: Um eine Formel zu gödelisieren, wird der Zahlenwert des i-ten Formelzeichens als Exponent der i-ten Primzahl verwendet. Anschließend werden alle Ausdrücke zu einem gemeinsamen Produkt zusammengefasst.

- Gödelisierung von φ_1

$$
\begin{aligned}
& \ulcorner 0+0=0 \urcorner \\
=\ & 2^{21}\cdot 3^{25}\cdot 5^{21}\cdot 7^{15}\cdot 11^{21} \\
=\ & 297679108605077788625414225870 5\ldots \\
& 473525961510803900000000000000000\ldots \\
& 000000 \\
\approx\ & 3\cdot 10^{67}
\end{aligned}
$$

- Gödelisierung von φ_2

$$
\begin{aligned}
& \ulcorner 0+0=0 \rightarrow (0+0=0 \rightarrow 0=0) \urcorner \\
=\ & 2^{21}\cdot 3^{25}\cdot 5^{21}\cdot 7^{15}\cdot 11^{21}\cdot 13^{7}\cdot 17^{17}\cdot \\
& 19^{21}\cdot 23^{25}\cdot 29^{21}\cdot 31^{15}\cdot 37^{21}\cdot 41^{7}\cdot \\
& 43^{21}\cdot 47^{15}\cdot 53^{21}\cdot 59^{19} \\
=\ & 425400985251787330016288509909 5\ldots \\
& 206291217715222572341298356107 6\ldots \\
& 420424178811595216672381868270 9\ldots \\
& 183834031453148286634998585963 9\ldots \\
& 626714608712650126537889993849 2\ldots \\
& 119821957883843910749945155852 0\ldots \\
& 683930116810765743966260200278 8\ldots \\
& 120038107526887882101562807466 7\ldots \\
& 912218757265982821135047448924 8\ldots \\
& 593428216789656082326618222940 2\ldots \\
& 758762640358916714824704577741 6\ldots \\
& 044296991266580306584300000000 0\ldots \\
& 000000000000 \\
& \approx 4{,}2\cdot 10^{383}
\end{aligned}
$$

- Gödelisierung von φ_3

$$
\begin{aligned}
& \ulcorner 0+0=0 \rightarrow 0=0 \urcorner \\
=\ & 2^{21}\cdot 3^{25}\cdot 5^{21}\cdot 7^{15}\cdot 11^{21}\cdot 13^{7}\cdot 17^{21}\cdot \\
& 19^{15}\cdot 23^{21} \\
=\ & 773335135565808033243899426029 1\ldots \\
& 604016720024892543473718832359 2\ldots \\
& 206183958027284330698837084703 6\ldots \\
& 442627327215416385589891673900 4\ldots \\
& 7767000000000000000000000000 \\
=\ & \approx 7{,}7\cdot 10^{148}
\end{aligned}
$$

- Gödelisierung von φ_4

$$
\begin{aligned}
& \ulcorner 0=0 \urcorner \\
=\ & 2^{21}\cdot 3^{15}\cdot 5^{21} \\
=\ & 1434890700000000000000000000 \\
\approx\ & 1{,}4\cdot 10^{28}
\end{aligned}
$$

Abbildung 4.7: Gödelisierung der Beweisschritte von Theorem PA1

die vier Formeln aus dem Beweis von Theorem PA1 auf diese Weise gödelisieren lassen.

- Ein formaler Beweis ist nach Definition 2.1 eine Folge von Formeln und lässt sich nach dem gleichen Schema in eine natürliche Zahl übersetzen. Um eine Folge der Form $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots$ zu codieren, verwenden wir die Gödelnummer der i-ten Formel als Exponent der i-ten Primzahl und fassen alle Ausdrücke erneut zu einem gemeinsamen Produkt zusammen:

$$\ulcorner \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots \urcorner := \pi_1^{\ulcorner \varphi_1 \urcorner} \cdot \pi_2^{\ulcorner \varphi_2 \urcorner} \cdot \pi_3^{\ulcorner \varphi_3 \urcorner} \cdot \ldots$$

Für unseren Beispielbeweis erhalten wir mit

$$
\begin{aligned}
& 2^{2^{21}3^{25}5^{21}7^{15}11^{21}} \cdot \\
& \quad 3^{2^{21}3^{25}5^{21}7^{15}11^{21}13^{7}17^{17}19^{21}23^{25}29^{21}31^{15}37^{21}41^{7}43^{21}47^{15}53^{21}59^{19}} \cdot \\
& \quad\quad 5^{2^{21}3^{25}5^{21}7^{15}11^{21}13^{7}17^{21}19^{15}23^{21}} \cdot \\
& \quad\quad\quad 7^{2^{21}3^{15}5^{21}}
\end{aligned}
$$

eine Zahl gigantischer Größe. Kein Buch der Welt hat genug Seiten, um ihrer Dezimalschreibweise auch nur annähernd Platz zu bieten. Wir sind deshalb gut beraten, die Zahl in ihrer faktorisierten Darstellung zu belassen.

Auch wenn sich die beiden vorgestellten Codierungen deutlich voneinander unterscheiden, teilen sie einen gemeinsamen Makel: Beide bilden die Menge der Formeln zwar *injektiv* in die natürlichen Zahlen ab, aber nicht *surjektiv*. Das bedeutet, dass natürliche Zahlen existieren, die keine Gödelnummern sind. Für manche Betrachtungen ist es aber durchaus bequem, von einer Eins-zu-eins-Beziehung zwischen der Menge der Formeln und der Menge der natürlichen Zahlen auszugehen, und so stellt sich fast zwangsläufig die Frage, ob auch *bijektive* Gödelisierungen existieren. Die Antwort ist ein klares Ja, schließlich können wir alle syntaktisch korrekt aufgebauten Symbolsequenzen der Reihe nach aufzählen und der i-ten Formel ganz einfach die Gödelnummer i zuweisen. Praktisch ist diese Art der Gödelisierung nicht. Genau wie die UTF-16-Codierung hat sie den Nachteil, dass sich die syntaktischen Beziehungen, die durch die Axiome und Schlussregeln eines formalen Systems definiert werden, auf der arithmetischen Ebene nur umständlich beschreiben lassen.

4.2.2 Primitiv-rekursive Funktionen

In diesem Abschnitt werden wir unser Augenmerk auf spezielle arithmetische Funktionen richten, die in Gödels Beweis eine zentrale Rolle spielen. In der Literatur werden sie treffend als *primitiv-rekursive Funktionen* bezeichnet, da sie rekursiv aus einer Reihe primitiver Elementarfunktionen gewonnen werden können. Was wir darunter genau zu verstehen haben, klärt die folgende Definition:

Definition 4.1 (Primitiv-rekursive Funktionen)

- Die folgenden Funktionen sind primitiv-rekursiv:
  - Die Nullfunktion $z(n) := 0$
  - Die Nachfolgerfunktion $s(n) := n+1$
  - Die Projektion $p_i^n(x_1,\ldots,x_n) := x_i$.
- Sind $g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ und $h_1,\ldots,h_k : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ primitiv-rekursiv, dann ist es auch $f(x_1,\ldots,x_n)$ mit

$$f(x_1,\ldots,x_n) = g(h_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,h_k(x_1,\ldots,x_n))$$

- Sind $g : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ und $h : \mathbb{N}^{n+2} \to \mathbb{N}$ primitiv-rekursiv, dann ist es auch $f(m,x_1,\ldots,x_n)$ mit

$$
\begin{aligned}
f(0,x_1,\ldots,x_n) &= g(x_1,\ldots,x_n), \\
f(m+1,x_1,\ldots,x_n) &= h(f(m,x_1,\ldots,x_n),m,x_1,\ldots,x_n)
\end{aligned}
$$

Die erste Regel legt die elementaren primitiven Funktionen fest; namentlich sind dies die Nullfunktion, die Nachfolgerfunktion und die Projektion. Die anderen Regeln geben an, wie sich aus bereits bekannten primitiv-rekursiven Funktionen weitere erschaffen lassen. Insgesamt haben wir es mit zwei verschiedenen Konstruktionsschemata zu tun:

- Komposition

  Die Kompositionsregel erlaubt uns, primitiv-rekursive Funktionen als Parameter in andere primitiv-rekursive Funktionen einzusetzen. Ist beispielsweise $g(x_1,x_2,x_3)$ primitiv-rekursiv, dann ist es auch die Funktion

$$f(x_1,x_2) := g(x_2,x_1,x_1) = g(p_2^2(x_1,x_2),p_1^2(x_1,x_2),p_1^2(x_1,x_2))$$

Die moderne Terminologie im Bereich der rekursiven Funktionen wurde erst nach dem Jahr 1931 geboren, und so findet sich der Begriff der *primitiv-rekursiven Funktion* an keiner Stelle in Gödels Originalarbeit wieder. Was wir heute als *primitiv-rekursiv* bezeichnen, nannte Gödel *rekursiv*.
Die älteste bekannte Arbeit, die den Begriff der *primitiven Rekursion* verwendet, wurde von der ungarischen Mathematikerin Rózsa Péter (Abbildung 4.8) im Jahr 1934 publiziert [137], und der Begriff der *primitiv-rekursiven Funktion* taucht zum ersten Mal in einer Arbeit von Stephen Cole Kleene aus dem Jahr 1936 auf [102]. Trotzdem wird der Begriff der *rekursiven Funktionen* auch heute noch verwendet, allerdings meist als Abkürzung für die größere Klasse der sogenannten *μ-rekursiven Funktionen*, die alle berechenbaren Funktionen umfasst.

Rózsa Péter
(1905 – 1977)

Abbildung 4.8: Die ungarische Mathematikerin Rózsa Péter war eine der führenden Persönlichkeiten auf dem Gebiet der Rekursionstheorie. Zudem gelang es ihr als Verfasserin mehrerer populärwissenschaftlicher Bücher, ein Publikum weit über die Wissenschaftsgemeinde hinaus für sich zu begeistern [139, 140].

Primitiv-rekursive Funktionen gibt es in Hülle und Fülle! In der Tat ist es gar nicht so einfach, eine Funktion zu konstruieren, die sich systematisch berechnen lässt, aber nicht nach dem Schema der primitiven Rekursion aufgebaut ist. Im Jahr 1926 äußerte David Hilbert sogar die Vermutung, dass alle berechenbaren Funktionen primitiv-rekursiv seien [81]. Widerlegt wurde Hilberts Annahme noch im selben Jahr durch Wilhelm Ackermann. Ihm gelang es, eine Funktion zu konstruieren, die nicht primitiv-rekursiv ist, aber mithilfe verschachtelter Rekursionsaufrufe berechnet werden kann. Veröffentlicht hat Ackermann seine Funktion im Jahr 1928 [2]. 1935 wurde sie von Rózsa Péter vereinfacht und in die folgende bekannte Form gebracht [138]:

$$\begin{aligned}\mathfrak{A}(0,n) &:= 2\cdot n+1\\ \mathfrak{A}(m+1,0) &:= \mathfrak{A}(m,1)\\ \mathfrak{A}(m+1,n+1) &:= \mathfrak{A}(m,\mathfrak{A}(m+1,n))\end{aligned}$$

Auf den ersten Blick kommt die Funktion harmlos daher. Ihr geschickt gewähltes Rekursionsschema hat aber zur Folge, dass sie stärker wächst als jede primitiv-rekursive Funktion. Bereits $\mathfrak{A}(4,2)$ entspricht einer Zahl mit ca. 20.000 Dezimalstellen, und für noch größere Werte von m und n können wir $\mathfrak{A}(m,n)$ faktisch kaum noch ausrechnen.
Zu Ehren Ackermanns wird diese Funktion als *Ackermann-Funktion* bezeichnet. Manche Autoren sind präziser und bezeichnen sie ihrer Herkunft entsprechend als *Ackermann-Péter-Funktion*.

Im Vorbeigehen demonstriert das Beispiel eine wertvolle Eigenschaft der Projektionsfunktion. Sie lässt sich gezielt einsetzen, um gewisse Variablen auszuwählen oder zu vertauschen.

■ Primitive rekursion

Hinter diesem Konstruktionsschema verbirgt sich der wahre Kern primitiv-rekursiver Funktionen. Ein gezielter Blick auf das Rekursionsschema zeigt, dass der Funktionswert f in einer Schleife berechnet wird, in der m die Rolle der Schleifenvariablen spielt. Ist $m = 0$, so wird der Funktionswert über die Funktion g bestimmt. Ist $m > 0$, so wird der Funktionswert ermittelt, indem die Funktion h auf den berechneten Funktionswert $f(m-1,x_1,\ldots,x_n)$ sowie auf die Parameter $m-1$ und $x_1,\ldots,x_n$ angewendet wird.

Das Schema der primitiven Rekursion ist stark genug, um alle üblichen Arithmetikoperationen auszudrücken. Um z. B. die Addition, die Multiplikation und die Potenzierung von natürlichen Zahlen primitiv-rekursiv zu formulieren, gehen wir von der folgenden Darstellung aus:

$$\operatorname{add}(m,n) = \begin{cases} n & \text{falls } m=0\\ s(\operatorname{add}(m-1,n)) & \text{falls } m>0\end{cases} \tag{4.2}$$

$$\operatorname{mult}(m,n) = \begin{cases} 0 & \text{falls } m=0\\ \operatorname{add}(\operatorname{mult}(m-1,n),n) & \text{falls } m>0\end{cases} \tag{4.3}$$

$$\operatorname{pow}(m,n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } m=0\\ \operatorname{mult}(\operatorname{pow}(m-1,n),n) & \text{falls } m>0\end{cases} \tag{4.4}$$

Durch den geschickten Einsatz der Projektionsfunktion können wir (4.2) bis (4.4) in die gesuchte Form bringen:

$$\begin{aligned}\operatorname{add}(0,n) &= p_1^1(n),\\ \operatorname{add}(m+1,n) &= s(p_1^3(\operatorname{add}(m,n),m,n))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{mult}(0,n) &= 0,\\ \operatorname{mult}(m+1,n) &= \operatorname{add}(p_1^3(\operatorname{mult}(m,n),m,n),p_3^3(\operatorname{mult}(m,n),m,n))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{pow}(0,n) &= s(0),\\ \operatorname{pow}(m+1,n) &= \operatorname{mult}(p_1^3(\operatorname{pow}(m,n),m,n),p_3^3(\operatorname{pow}(m,n),m,n))\end{aligned}$$

Ohne Mühe können wir den Begriff der primitiv-rekursiven Funktion auch auf Relationen übertragen. Hierzu koppeln wir das Bestehen oder Nichtbestehen einer Relation ganz einfach an die Existenz einer entsprechenden *charakteristischen Funktion*:

Definition 4.2 (Primitiv-rekursive Relationen)

Eine Relation R zwischen den natürlichen Zahlen $x_1,\ldots,x_n$ heißt *primitiv-rekursiv*, wenn eine primitiv-rekursive Funktion f mit der folgenden Eigenschaft existiert:

$$R(x_1,\ldots,x_n) \Leftrightarrow f(x_1,\ldots,x_n) = 0$$

f nennen wir die *charakteristische Funktion* von R.

4.2.3 Arithmetische Repräsentierbarkeit

In diesem Abschnitt wollen wir die Peano-Arithmetik (PA) dazu verwenden, um über primitiv-rekursive Funktionen zu sprechen. Dass wir diverse Eigenschaften von Zahlen und Funktionen innerhalb von PA formalisieren können, wurde bereits mehrfach erwähnt. Aber wie war das genau gemeint? Wie können wir beispielsweise formal ausdrücken, dass eine natürliche Zahl x eine gerade Zahl ist? Die Peano-Arithmetik kennt neben der Nachfolgerfunktion, der Addition und der Multiplikation keine anderen Operationen; wie kann sie über etwas reden, das gar nicht in ihrem Sprachreservoir vorhanden ist?

Die Lösung kommt erneut in Form des *Extensionalitätsprinzips*, das wir im Zusammenhang mit der Mengenlehre bereits kennen gelernt haben. Diesem Prinzip folgend, wird die Bedeutung eines Ausdrucks durch seinen Umfang – seine Extension – beschrieben, d. h. durch die Objekte, die er benennt oder beschreibt. In unserem Fall sind dies Mengen von natürlichen Zahlen. Damit ist klar, wie wir die Aussage

„x ist eine gerade natürliche Zahl“

extensional erfassen können; sie wird eindeutig durch die Menge der geraden Zahlen beschrieben.

Innerhalb der Peano-Arithmetik ist es ein Leichtes, die Menge der geraden Zahlen durch eine Formel $\varphi(\xi)$ mit einer freien Variablen ξ zu charakterisieren. Hierzu wählen wir $\varphi(\xi)$ derart, dass die Formeln

$$\varphi(0), \varphi(\overline{2}), \varphi(\overline{4}), \varphi(\overline{6}), \varphi(\overline{8}), \varphi(\overline{10}), \ldots$$

allesamt wahr und die Formeln

$$\varphi(\overline{1}), \varphi(\overline{3}), \varphi(\overline{5}), \varphi(\overline{7}), \varphi(\overline{9}), \varphi(\overline{11}), \ldots$$

Arithmetisch repräsentierbare Relationen

- *„x ist eine gerade natürliche Zahl."*

  $\varphi(x) := (\exists z\, x = z \times \overline{2})$

- *„x ist eine Quadratzahl."*

  $\varphi(x) := (\exists z\, x = z \times z)$

- *„x teilt y."*

  $\varphi(x,y) := (\exists z\, x \times z = y)$

- *„x ist größer oder gleich y."*

  $\varphi(x,y) := (\exists z\, x = y + z)$

- *„x ist größer als y."*

  $\varphi(x,y) := (\exists z\, x = y + z + \overline{1})$

- *„x ist eine Primzahl."*

  $\varphi(x) :=$
  $(\neg(x = \overline{1}) \wedge$
  $\forall z\, (z \mid x \to (z = \overline{1} \vee z = x)))$

- *„x und y sind Primzahlzwillinge."*

  $\varphi(x,y) :=$
  $(\neg(x = \overline{1}) \wedge \neg(y = \overline{1}) \wedge$
  $\forall z\, (z \mid x \to (z = \overline{1} \vee z = x)) \wedge$
  $\forall z\, (z \mid y \to (z = \overline{1} \vee z = y)) \wedge$
  $y = x + \overline{2})$

Abbildung 4.9: Eine kleine Auswahl arithmetisch repräsentierbarer Relationen

allesamt falsch sind. Eine Formel mit dieser Eigenschaft ist z. B.

$$\varphi(x) = (\exists z\, x = z \times \overline{2})$$

Die Grundidee ist damit vorgezeichnet, und bei genauerem Hinsehen wird klar, dass wir auf diese Weise nicht nur Eigenschaften von natürlichen Zahlen, d. h. einstellige Relationen, arithmetisch repräsentieren können, sondern auch beliebige Beziehungen, die zwischen zwei oder mehreren natürlichen Zahlen bestehen (Abbildung 4.9). Hierzu müssen wir unsere Vorgehensweise lediglich auf mehrstellige Relationen erweitern. Die folgende Definition bringt Klarheit:

Definition 4.3 (Semantisch repräsentierbare Relationen)

> Sei $R \subseteq \mathbb{N}^n$ eine Relation und φ eine Formel mit n freien Variablen. R wird durch φ *semantisch repräsentiert*, wenn gilt:
>
> $$(x_1,\ldots,x_n) \in R \;\Rightarrow\; \models \varphi(\overline{x_1},\ldots,\overline{x_n})$$
> $$(x_1,\ldots,x_n) \notin R \;\Rightarrow\; \models \neg\varphi(\overline{x_1},\ldots,\overline{x_n})$$

Auch Funktionen lassen sich arithmetisch repräsentieren. Hierzu nutzen wir aus, dass sich jede n-stellige Funktion als Relation mit der Stelligkeit $n+1$ auffassen lässt.

Definition 4.4 (Semantisch repräsentierbare Funktionen)

> Sei $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ eine Funktion und φ eine Formel mit $n+1$ freien Variablen. f wird durch φ *semantisch repräsentiert*, wenn gilt:
>
> $$f(x_1,\ldots,x_n) = y \;\Rightarrow\; \models \varphi(\overline{x_1},\ldots,\overline{x_n},\overline{y})$$
> $$f(x_1,\ldots,x_n) \neq y \;\Rightarrow\; \models \neg\varphi(\overline{x_1},\ldots,\overline{x_n},\overline{y})$$

Um die Definition mit Leben zu füllen, wollen wir erarbeiten, wie sich die Funktion pow(x,y) aus Abschnitt 4.2.2 arithmetisch repräsentieren lässt. Als erstes probieren wir, eine Formel mit einer freien Variablen z zu konstruieren, die nach dem folgenden Schema aufgebaut ist:

$$\exists u_0 \ldots \exists u_y\, (\psi_0(x,u_0) \wedge \ldots \wedge \psi_y(x,u_y) \wedge z = u_y) \tag{4.5}$$

Für jede natürliche Zahl i mit $0 \leq i \leq y$ enthält diese Formel eine gebundene Variable u_i und eine Teilformel ψ_i. Wählen wir ψ_i so, dass $\psi_i(x,u_i)$ genau für $u_i = x^i$ wahr ist, so entspricht der gesuchte Funktionswert z

dem Inhalt der Variablen u_y. Die Konstruktion der Teilformeln ψ_i bereitet uns dabei keinerlei Schwierigkeit; wir können ihren Wortlaut direkt aus dem primitiven Rekursionsschema der Exponentialfunktion extrahieren:

$$\psi_0(x,u_0) := (u_0 = \overline{1})$$
$$\psi_{i+1}(x,u_{i+1}) := (\forall w\, (\psi_i(x,w) \to u_{i+1} = w \times x))$$

Ein schwerwiegendes Problem bleibt allerdings bestehen: Da wir eine variable Anzahl an Quantoren verwendet haben und die freie Variable y zusätzlich im Index der Variablen u_y auftaucht, ist (4.5) keine Formel der Peano-Arithmetik. Gelöst ist unser Problem erst dann, wenn wir es schaffen, sie in eine echte arithmetische Formel zu übersetzen.

Um dieses Ziel zu erreichen, verfolgen wir die gleiche Grundidee, mit der wir die Mengen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{N}^n$ in Kapitel 1 als gleichmächtig identifiziert haben. Dort haben wir gezeigt, dass sich endliche Folgen natürlicher Zahlen eineindeutig in eine natürliche Zahl hineincodieren lassen, und genau das werden wir auch mit unserer Zahlenfolge $x^0,\ldots,x^y$ versuchen.

Hierzu nehmen wir an, uns stehe eine Funktion $\alpha : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ zur Verfügung, so dass für jede endliche Sequenz $a_0,\ldots,a_y$ eine Zahl b mit

$$\alpha(b,0) = a_0, \alpha(b,1) = a_1, \ldots, \alpha(b,y) = a_y$$

existiert. Wenn es uns jetzt noch gelänge, die Funktion α mit einer Formel φ_α arithmetisch zu repräsentieren, dann ließe sich Formel (4.5) folgendermaßen umschreiben:

$$\begin{aligned}&\exists u\, (\varphi_\alpha(u,0,\overline{1}) \wedge \\ &\quad \forall v\, \forall w\, (v < y \wedge \varphi_\alpha(u,v,w) \to \varphi_\alpha(u,v+\overline{1},w \times x)) \wedge \\ &\quad \varphi_\alpha(u,y,z))\end{aligned} \tag{4.6}$$

Abbildung 4.10 veranschaulicht die Bedeutung der einzelnen Formelbestandteile.

Der Lösung unseres Problems sind wir schon sehr nahe. Die Anzahl der in (4.6) verwendeten Quantoren ist nun konstant, und die Variable y kommt nicht mehr als Index einer anderen Variablen vor. Am Ziel sind wir aber erst, wenn wir eine reale Funktion mit der Eigenschaft von α finden.

Es ist Gödel zu verdanken, dass wir eine solche Funktion heute unser Eigen nennen dürfen. Im Gegensatz zu unserer fiktiven Funktion α mit zwei Variablen führte er eine Funktion β mit drei Variablen ein:

$$\beta(x,y,z) := x \bmod (1 + y \cdot (z+1))$$

- $\varphi_\alpha(u,0,\overline{1})$

  „An Position 0 von u steht der Wert 1."

  u = 1 …

- $\forall v\, \forall w\, (v < y \wedge \varphi_\alpha(u,v,w) \to \varphi_\alpha(u,v+\overline{1},w \times x))$

  „Steht an Position v der Wert w, so steht an Position v + 1 der Wert w · x."

  u = 1 × x^2 … x^y

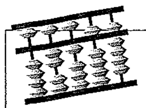
- $\varphi_\alpha(u,y,z)$

  „z ist der Wert an Position y."

  u = 1 × x^2 … $\boxed{z}$

  y

Abbildung 4.10: Gäbe es eine Funktion mit den Eigenschaften von φ_α, so wären wir in der Lage, die Exponentialfunktion $z = x^y$ arithmetisch zu repräsentieren.



Das *Sun Zi suanjing* zählt zu den wichtigsten chinesischen Frühwerken der Mathematik. Niedergeschrieben wurde es von dem Rechenmeister Sun Zi in der ersten Hälfte des ersten Jahrhunderts, wahrscheinlich in den Jahren zwischen 280 und 473 n. Chr. [186]. Die bekannteste Stelle des Sun Zi suanjing befindet sich im dritten und letzten Kapitel [199]. Dort, in Aufgabe 26, fordert der Meister zur Lösung des folgenden Rätsels auf:

„Es sei nun eine unbekannte Anzahl von Dingen gegeben. Wenn wir sie zu je drei zählen, bleibt der Rest zwei übrig. Wenn wir sie zu je fünf zählen, bleibt der Rest drei übrig. Wenn wir sie zu je sieben zählen, bleibt der Rest zwei übrig. Finde die Anzahl der Dinge heraus."

In moderner Sprechweise ist dies die Aufforderung, das folgende System *linearer Kongruenzen* zu lösen:

$$x \equiv 2 \mod 3$$
$$x \equiv 3 \mod 5$$
$$x \equiv 2 \mod 7$$

Wir nennen ein solches System auch eine *simultane Kongruenz*. Heute kennen wir eine Reihe von Sätzen, die Aussagen darüber treffen, wann solche Kongruenzen lösbar sind. Ihrer Herkunft entsprechend werden diese Sätze als *Chinesische Restsätze* bezeichnet. Die Variante, die im Beweis von Satz 4.3 verwendet wird, besagt das Folgende:
Sind $m_0, \ldots, m_n$ natürliche, paarweise teilerfremde Zahlen und $a_0, \ldots, a_n$ beliebige ganze Zahlen, so besitzt die simultane Kongruenz

$$x \equiv a_0 \mod m_0$$
$$\ldots$$
$$x \equiv a_n \mod m_n$$

genau eine Lösung modulo $m_0 \cdot \ldots \cdot m_n$.

Der folgende Satz zeigt, dass diese Funktion unseren Zweck erfüllt:

Satz 4.3

Für jede endliche Zahlenfolge $a_0, \ldots, a_n$ existieren b und c mit

$$a_i = \beta(b,c,i) = b \bmod (1 + c \cdot (i+1))$$

Beweis: Wir beweisen den Satz in zwei Schritten:

- Zunächst zeigen wir, dass die Ausdrücke

$$(1 + c \cdot (i+1))$$

für $c = n!$ paarweise teilerfremd sind. Der Beweis lässt sich mit elementaren zahlentheoretischen Argumenten führen. Gäbe es eine Primzahl p, die sowohl

$$(1 + c \cdot (i+1)) \text{ als auch } (1 + c \cdot (i+k+1)) \quad (1 \leq k \leq n)$$

teilt, so wäre p auch ein Teiler der Differenz

$$(1 + c \cdot (i+k+1)) - (1 + c \cdot (i+1)) =$$
$$1 + c \cdot i + c \cdot k + c - 1 - c \cdot i - c =$$
$$c \cdot k$$

Das würde bedeuten, dass p mindestens eine der Zahlen c oder k teilt. Beide Annahmen werden wir jetzt zu einem Widerspruch führen:

  - Angenommen, es gelte $p|c$. Dann ist p auch ein Teiler von $c \cdot (i+1)$, im Widerspruch zu unserer Annahme, dass p den Wert $1 + c \cdot (i+1)$ teilt.
  - Angenommen, es gelte $p|k$. Wegen $k \leq n$ und $c = n!$ ist k ein Teiler von c, und damit gilt auch $p|c$. Wir haben aber gerade gezeigt, dass dies nicht sein kann.

- Da die Ausdrücke $(1 + c \cdot (i+1))$ paarweise teilerfremd sind, können wir den *Chinesischen Restsatz* anwenden. Dieser garantiert uns, dass die simultane Kongruenz

$$x \equiv a_0 \quad \mod (1 + c \cdot 1)$$
$$x \equiv a_1 \quad \mod (1 + c \cdot 2)$$
$$\ldots$$
$$x \equiv a_n \quad \mod (1 + c \cdot (n+1))$$

eine Lösung besitzt. Bezeichnen wir diese Lösung mit b, so gilt für alle a_i die Beziehung

$$a_i = b \bmod (1 + c \cdot (i+1))$$

was zu beweisen war. □

Abbildung 4.11 demonstriert, wie sich mithilfe der Gödel'schen β-Funktion die Anfangsstücke der Folge aller Zweierpotenzen repräsentieren lassen.

Natürlich existiert eine ganze Schar von Funktionen, um Sequenzen von natürlichen Zahlen in eine einzige Zahl hineinzucodieren. Wir dürfen in diesem Zusammenhang aber nicht vergessen, dass wir die Funktion arithmetisch repräsentieren müssen, und genau dies ist bei Gödels β-Funktion problemlos möglich:

$$\varphi_\beta(\mathsf{x},\mathsf{y},\mathsf{z},\mathsf{w}) := \exists \mathsf{d}\, \mathsf{x} = \mathsf{s}(\mathsf{y} \times \mathsf{s}(\mathsf{z})) \times \mathsf{d} + \mathsf{w} \wedge \mathsf{w} < \mathsf{s}(\mathsf{y} \times \mathsf{s}(\mathsf{z})) \quad (4.7)$$

Damit sind wir am Ziel und können die Exponentialfunktion folgendermaßen repräsentieren:

$$\exists \mathsf{b}\, \exists \mathsf{c}\, (\varphi_\beta(\mathsf{b},\mathsf{c},0,\bar{1}) \wedge$$
$$\forall \mathsf{v}\, \forall \mathsf{w}\, (\mathsf{v} < \mathsf{y} \wedge \varphi_\beta(\mathsf{b},\mathsf{c},\mathsf{v},\mathsf{w}) \to \varphi_\beta(\mathsf{b},\mathsf{c},\mathsf{v}+\bar{1},\mathsf{w} \times \mathsf{x})) \wedge$$
$$\varphi_\beta(\mathsf{b},\mathsf{c},\mathsf{y},\mathsf{z}))$$

Ersetzen wir die Funktion φ_β jetzt noch durch ihre Definition, so erhalten wir

$$\exists \mathsf{b}\, \exists \mathsf{c}\, (\exists \mathsf{d}\, \mathsf{b} = \mathsf{s}(\mathsf{c} \times \mathsf{s}(0)) \times \mathsf{d} + \bar{1} \wedge \bar{1} < \mathsf{s}(\mathsf{c} \times \mathsf{s}(0)) \wedge$$
$$\forall \mathsf{v}\, \forall \mathsf{w}\, (\mathsf{v} < \mathsf{y} \wedge \exists \mathsf{d}\, \mathsf{b} = \mathsf{s}(\mathsf{c} \times \mathsf{s}(\mathsf{v})) \times \mathsf{d} + \mathsf{w} \wedge \mathsf{w} < \mathsf{s}(\mathsf{c} \times \mathsf{s}(\mathsf{v})) \to$$
$$\exists \mathsf{d}\, \mathsf{b} = \mathsf{s}(\mathsf{c} \times \mathsf{s}(\mathsf{v}+\bar{1})) \times \mathsf{d} + (\mathsf{w} \times \mathsf{x}) \wedge (\mathsf{w} \times \mathsf{x}) < \mathsf{s}(\mathsf{c} \times \mathsf{s}(\mathsf{v}+\bar{1}))) \wedge$$
$$\exists \mathsf{d}\, \mathsf{b} = \mathsf{s}(\mathsf{c} \times \mathsf{s}(\mathsf{y})) \times \mathsf{d} + \mathsf{z} \wedge \mathsf{z} < \mathsf{s}(\mathsf{c} \times \mathsf{s}(\mathsf{y})))$$

Auch wenn diese Formel von außen betrachtet wie eine wahllose Ansammlung arithmetischer Ausdrücke wirkt, lässt sie ihr streng konstruktiver Aufbau in einem hellen Licht erstrahlen. In ihrem Inneren verbirgt sie mit der Gödel'schen β-Funktion ein mathematisches Juwel.

Können wir auf die gleiche Weise auch andere Funktionen arithmetisch repräsentieren? Die Antwort lautet Ja! Die Gödel'sche β-Funktion ist von so allgemeiner Natur, dass wir nach dem gleichen Schema beliebige primitiv-rekursive Funktionen oder Relationen arithmetisch repräsentieren können. Tatsächlich lässt sich durch eine Verallgemeinerung der oben gezeigten Formelkonstruktion der folgende Satz beweisen:

- $a_0 = 1, a_1 = 2$

Für $b = 7$ und $c = 2$ gilt:
$7 \bmod (1 + 2 \cdot 1) = 1$
$7 \bmod (1 + 2 \cdot 2) = 2$
$7 \bmod (1 + 2 \cdot 3) = 0$
$7 \bmod (1 + 2 \cdot 4) = 7$
$7 \bmod (1 + 2 \cdot 5) = 7$

$\beta(b,c,0)$	$\beta(b,c,1)$	$\beta(b,c,2)$	$\beta(b,c,3)$	$\beta(b,c,4)$	
1	2	0	7	7	...

- $a_0 = 1, a_1 = 2, a_2 = 4$

Für $b = 3079$ und $c = 8$ gilt:
$3079 \bmod (1 + 8 \cdot 1) = 1$
$3079 \bmod (1 + 8 \cdot 2) = 2$
$3079 \bmod (1 + 8 \cdot 3) = 4$
$3079 \bmod (1 + 8 \cdot 4) = 10$
$3079 \bmod (1 + 8 \cdot 5) = 4$

$\beta(b,c,0)$	$\beta(b,c,1)$	$\beta(b,c,2)$	$\beta(b,c,3)$	$\beta(b,c,4)$	
1	2	4	10	4	...

- $a_0 = 1, a_1 = 2, a_2 = 4, a_3 = 8$

Für $b = 115771826$ und $c = 64$ gilt:
$115771826 \bmod (1 + 64 \cdot 1) = 1$
$115771826 \bmod (1 + 64 \cdot 2) = 2$
$115771826 \bmod (1 + 64 \cdot 3) = 4$
$115771826 \bmod (1 + 64 \cdot 4) = 8$
$115771826 \bmod (1 + 64 \cdot 5) = 287$

$\beta(b,c,0)$	$\beta(b,c,1)$	$\beta(b,c,2)$	$\beta(b,c,3)$	$\beta(b,c,4)$	
1	2	4	8	287	...

Abbildung 4.11: Codierung von Zahlenfolgen mit der Gödel'schen β-Funktion

Satz 4.4

Jede primitiv-rekursive Relation $R(x_1,\ldots,x_n)$ ist innerhalb der Peano-Arithmetik semantisch repräsentierbar.

Bisher wurde durchgängig von einer *semantischen* Repräsentation gesprochen. Dies ist gerechtfertigt, da wir zwischen wahren und falschen Formeln unterschieden haben. Wir wollen unser Begriffsgerüst jetzt um eine zweite Art der arithmetischen Repräsentierbarkeit ergänzen, die den Begriff der Wahrheit durch den Begriff der Beweisbarkeit ersetzt. Da Beweise in formalen Systemen vollständig auf der syntaktischen Ebene geführt werden, reden wir in diesem Zusammenhang von einer *syntaktischen Repräsentation.*

Definition 4.5 (Syntaktisch repräsentierbare Relationen)

Sei $R \subseteq \mathbb{N}^n$ eine Relation und φ eine Formel mit n freien Variablen. R wird durch φ *syntaktisch repräsentiert*, wenn gilt:

$$(x_1,\ldots,x_n) \in R \;\Rightarrow\; \vdash \varphi(\overline{x_1},\ldots,\overline{x_n})$$
$$(x_1,\ldots,x_n) \notin R \;\Rightarrow\; \vdash \neg\varphi(\overline{x_1},\ldots,\overline{x_n})$$

Auch der Begriff der arithmetischen Repräsentierbarkeit ist von der babylonischen Sprachverwirrung betroffen, mit der wir im Bereich der mathematischen Logik an vielen Stellen leben müssen. Insbesondere in der angelsächsischen Literatur werden hierfür eine Vielzahl unterschiedlicher Begriffe verwendet. Beispielsweise werden syntaktisch repräsentierbare Relationen in Elliott Mendelsons Standardwerk als *expressable* und syntaktisch repräsentierbare Funktionen als *representable* bezeichnet [117]. Peter Smith verwendet den Begriff *expressable* in seinem Buch über die Gödel'schen Unvollständigkeitssätze dagegen als Synonym für die semantische Repräsentierbarkeit, unabhängig davon, ob damit Funktionen oder Relationen gemeint sind [170]. Syntaktisch repräsentierbare Funktionen und Relationen bezeichnet Smith als *capturable*.

Alle Relationen und Funktionen aus Abbildung 4.9 werden durch die angegebenen Formeln nicht nur semantisch, sondern auch syntaktisch repräsentiert. Den Beweis hierfür wollen wir nicht führen, da er mit erheblichem Aufwand verbunden ist. Für alle natürlichen Zahlen müssten wir zeigen, dass die entsprechenden Formelinstanzen von φ im formalen System der Peano-Arithmetik ableitbar bzw. nicht ableitbar sind.

Gödel zeigte, dass die Aussage von Satz 4.4 auch auf der syntaktischen Ebene gilt. Genau dies ist die Aussage seines berühmten Satzes V, den wir in Abbildung 4.1 im Originalwortlaut zitiert hatten. In modernerer Formulierung liest er sich wie folgt:

Satz 4.5 (Gödel, 1931)

Jede primitiv-rekursive Relation $R(x_1,\ldots,x_n)$ ist innerhalb der Peano-Arithmetik syntaktisch repräsentierbar.

Dieser Satz ist ein wichtiges Etappenziel auf dem Weg zu den Unvollständigkeitsresultaten. Sein Beweis ist sehr technisch, und selbst Gödel hat ihn in seiner Arbeit nur skizzenhaft angedeutet. Ausführlich ausgearbeitet ist er beispielsweise in [170].

4.2.4 Gödels Diagonalargument

Bevor wir die Bühne zum großen Finale des Gödel'schen Beweises freigeben, wollen wir die bis jetzt erarbeiteten Ergebnisse kurz zusammenfassen:

- In Abschnitt 4.2.1 haben wir gezeigt, wie sich die Syntax einer formalen Sprache arithmetisieren lässt. Indem wir jeder Formel φ eine Gödelnummer $\ulcorner\varphi\urcorner$ zugeordnet haben, konnten wir die Manipulation von Zeichenketten auf der arithmetischen Ebene deuten.
- In Abschnitt 4.2.2 haben wir den Begriff der primitiv-rekursiven Funktion eingeführt und anschließend auf numerische Relationen übertragen. Ohne uns in Details zu verlieren, haben wir angedeutet, dass sich viele im mathematischen Alltag angetroffene Funktionen primitiv-rekursiv formulieren lassen.
- In Abschnitt 4.2.3 haben wir den Begriff der arithmetischen Repräsentierbarkeit eingeführt. Am Ende stand die Erkenntnis, dass wir die Gödel'sche β-Funktion dazu verwenden können, um jede primitiv-rekursive Relation innerhalb der Peano-Arithmetik syntaktisch zu repräsentieren.

Betrachten wir die gewonnenen Ergebnisse isoliert voneinander, so wirken sie wie gewöhnliche mathematische Aussagen. Jede Einzelne beleuchtet einen interessanten Aspekt der mathematischen Logik, aber keine von ihnen scheint das Potenzial zu besitzen, die Mathematik in ihren Grundfesten zu gefährden. Eine wahrhaft zerstörerische Wirkung entfalten sie jedoch dann, wenn wir sie in geeigneter Weise miteinander kombinieren. Wie die einzelnen Puzzle-Stücke zusammenpassen, hat Gödel in akribischer Präzision ausgearbeitet, und so liest sich seine Arbeit aus dem Jahr 1931 stellenweise wie der Bauplan eines mathematischen Sprengsatzes. Die explosive Wirkung seiner Arbeit ist bekannt. Mit dem Beweis der Unvollständigkeitssätze hat Gödel die lange gehegte Hoffnung auf die vollständige Formalisierung der Mathematik mit einem Handstreich in Schutt und Asche gelegt.

Auf den folgenden Seiten werden wir die Gödel'sche Konstruktion in ihren Grundzügen nachvollziehen. Eine wesentliche Rolle spielen dabei diejenigen arithmetischen Formeln, die in Gödels Originalarbeit *Klassenzeichen* heißen. Mit diesem Begriff sind die Formeln der Form $\varphi(\xi)$ gemeint, also diejenigen Formeln, die genau eine freie Variable besitzen.

Tabelle 4.2: Abgebildet ist ein Ausschnitt einer unendlich großen Tabelle, die alle arithmetischen Formeln mit einer einzigen freien Variablen enthält. Die Tabelle ist so aufgebaut, dass die Formel mit der Gödelnummer i in der i-ten Zeile steht und alle Zeilen leer gelassen sind, deren Zeilennummer nicht die Gödelnummer eine Formel mit einer freien Variablen ist. Die Tabelle enthält unendlich viele Spalten, von denen jede einzelne mit einer natürlichen Zahl n markiert ist. Ist die Formel $\varphi_i(\overline{n})$ innerhalb der Peano-Arithmetik beweisbar, so enthält die i-te Zeile in der n-ten Spalte den Eintrag $\vdash$. Ist sie es nicht, so ist das entsprechende Feld mit $\nvdash$ markiert. In seiner Arbeit aus dem Jahr 1931 hat Gödel dargelegt, dass sich auf der Hauptdiagonalen ein unentscheidbarer Satz befinden muss. Hierzu konstruierte er eine natürliche Zahl g, für die er anschließend zeigte, dass weder $\varphi_g(\overline{g})$ noch $\neg\varphi_g(\overline{g})$ innerhalb der Peano-Arithmetik beweisbar sein kann.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8		g	
										…		…
$\varphi_1(\xi)$	$\nvdash$	$\vdash$	$\nvdash$	$\vdash$	$\nvdash$	$\vdash$	$\nvdash$	$\vdash$	$\nvdash$	…	$\vdash$	…
										…		…
										…		…
$\varphi_4(\xi)$	$\nvdash$	$\nvdash$	$\vdash$	$\vdash$	$\nvdash$	$\vdash$	$\nvdash$	$\vdash$	$\nvdash$	…	$\nvdash$	…
$\varphi_5(\xi)$	$\vdash$	$\nvdash$	$\vdash$	$\nvdash$	$\vdash$	$\nvdash$	$\vdash$	$\nvdash$	$\vdash$	…	$\nvdash$	…
$\varphi_6(\xi)$	$\nvdash$	$\nvdash$	$\nvdash$	$\vdash$	$\vdash$	$\vdash$	$\vdash$	$\nvdash$	$\vdash$	…	$\vdash$	…
										…		…
$\varphi_8(\xi)$	$\vdash$	$\nvdash$	$\vdash$	$\vdash$	$\nvdash$	$\nvdash$	$\vdash$	$\vdash$	$\nvdash$	…	$\vdash$	…
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	
$\varphi_g(\xi)$	$\nvdash$	$\vdash$	$\vdash$	$\nvdash$	$\nvdash$	$\vdash$	$\nvdash$	$\vdash$	$\vdash$	…	$\boxed{\nvdash}$	…
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\ddots$
$\neg\varphi_g(\xi)$	$\vdash$	$\nvdash$	$\nvdash$	$\vdash$	$\vdash$	$\nvdash$	$\vdash$	$\nvdash$	$\nvdash$	…	$\boxed{\nvdash}$	…

Für das Verständnis der folgenden Überlegungen ist es hilfreich, sich diese Formeln als Zeileneinträge einer unendlich großen Tabelle vorzustellen (vgl. Tabelle 4.2). Innerhalb der Tabelle sind die Formeln so angeordnet, dass in der i-ten Zeile die Formel mit der Gödelnummer i erscheint. Die Formel in Zeile i bezeichnen wir im Folgenden mit $\varphi_i(\xi)$. Beachten Sie, dass nicht jede natürliche Zahl eine Gödelnummer ist und auch nicht jede Gödelnummer eine Formel beschreibt, die, wie hier gefordert, genau eine freie Variable besitzt. Deswegen sind in der Tabelle mehrere Zeilen vorhanden, die keine Einträge besitzen.

Nun sind wir nicht an offenen, sondern an geschlossenen Formeln interessiert. Diese können wir erhalten, indem wir in der Formel $\varphi_i(\xi)$ die freie Variable durch einen arithmetischen Term der Form $\overline{n}$ ersetzen. Auf diese Weise entsteht für jede Zahl $n \in \mathbb{N}$ eine geschlossene Formel $\varphi_i(\overline{n})$. Einige dieser Formeln sind innerhalb der Peano-Arithmetik beweisbar ($\vdash \varphi(\overline{n})$), andere sind es nicht ($\nvdash \varphi(\overline{n})$). Um die Beweisbarkeitseigenschaft in unserer Tabelle sichtbar zu machen, existiert für jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ eine separate Spalte. Steht in der i-ten Zeile und n-ten Spalte unserer Tabelle das Zeichen $\vdash$, so ist die Formel $\varphi_i(\overline{n})$ beweisbar. Andernfalls ist das Feld mit dem Symbol $\nvdash$ markiert.

In seinem Beweis machte sich Gödel eine trickreiche Argumentation zu eigen, die dem Cantor'schen Diagonalargument aus Abschnitt 1.2.2 sehr ähnlich ist. Es gelang ihm zu zeigen, dass sich auf der Hauptdiagonalen unserer Tabelle mindestens eine Formel befinden muss, die innerhalb der Peano-Arithmetik unentscheidbar ist. Konkret bedeutet dieses Ergebnis, dass eine natürliche Zahl $g \in \mathbb{N}$ existiert, für die weder $\varphi_g(\overline{g})$ noch $\neg\varphi_g(\overline{g})$ beweisbar ist.

Wir werden nun herausarbeiten, wie sich der Wert von g berechnen lässt. Hierzu betrachten wir zunächst die Relation $\mathrm{Gdl}(x,y)$, die eine Beziehung zwischen zwei natürlichen Zahlen x und y herstellt:

$$\mathrm{Gdl}(x,y) \;:\Leftrightarrow\; x \text{ ist die Gödelnummer eines Beweises von } \varphi_y(\overline{y})$$

Was sagt diese Relation genau aus? Zunächst halten wir fest, dass x und y natürliche Zahlen sind und wir x als die Gödelnummer eines Beweises und y als die Gödelnummer einer arithmetischen Formel interpretieren. Die Formel $\varphi_y(\overline{y})$ ist das y-te Diagonalelement in unserer Tabelle. Per Definition stehen x und y genau dann in Relation zueinander, wenn x einen Beweis für die Formel $\varphi_y(\overline{y})$ codiert. Anders gesagt: x codiert eine Sequenz von Formeln, die das Diagonalelement $\varphi_y(\overline{y})$ in endlich vielen Schritten aus den Axiomen der Peano-Arithmetik ableitet.

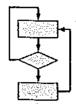
In seiner Originalarbeit hat Gödel bewiesen, dass $\mathrm{Gdl}(x,y)$ eine primitiv-rekursive Relation ist. Das bedeutet, dass eine primitiv-rekursive Funktion $f_{\mathrm{Gdl}}(x,y)$ existiert, die genau dann den Wert 0 berechnet, wenn x die Gödelnummer eines Beweises für die Diagonalaussage $\varphi_y(\overline{y})$ ist. Nach Satz 4.5 ist die Relation $\mathrm{Gdl}(x,y)$ innerhalb der Peano-Arithmetik syntaktisch repräsentierbar; somit existiert eine Formel $\psi_{\mathrm{Gdl}}(\xi,\zeta)$ mit der folgenden Eigenschaft:

$$\vdash \psi_{\mathrm{Gdl}}(\overline{x},\overline{y}) \;\Leftrightarrow\; x \text{ codiert einen Beweis für die Formel } \varphi_y(\overline{y})$$
$$\vdash \neg\psi_{\mathrm{Gdl}}(\overline{x},\overline{y}) \;\Leftrightarrow\; x \text{ codiert keinen Beweis für die Formel } \varphi_y(\overline{y})$$

Aus $\psi_{\mathrm{Gdl}}(\xi,\zeta)$ konstruieren wir nun die Formel

$$\varphi_g(\mathsf{y}) \;:=\; \forall \mathsf{x}\,\neg\psi_{\mathrm{Gdl}}(\mathsf{x},\mathsf{y}) \qquad (4.8)$$

Das Ergebnis ist eine arithmetische Formel mit genau einer freien Variablen. Sie kommt in der g-ten Zeile unserer Tabelle vor und ist jene Formel, nach der wir gesucht haben. Sie besitzt die faszinierende Eigenschaft, dass ihre diagonalisierte Aussage $\varphi_g(\overline{g})$ innerhalb von PA unentscheidbar ist, d. h., weder $\varphi_g(\overline{g})$ noch $\neg\varphi_g(\overline{g})$ lassen sich aus den Axiomen der Peano-Arithmetik herleiten. Warum dies so ist, werden wir jetzt begründen:



Dass wir mit $\mathrm{Gdl}(x,y)$ eine primitiv-rekursive Relation vor uns haben, ist keinesfalls selbstverständlich. Tatsächlich erstreckt sich der Beweis in Gödels Arbeit über sechs eng beschriebene Seiten. Gödel erzielte sein Resultat, indem er insgesamt 46 primitiv-rekursive Funktionen und Relationen definierte, die aufeinander aufbauen und immer komplexer werdende Sachverhalte ausdrücken. Aus heutiger Sicht wirken diese Funktionen und Relationen wie die Hilfsroutinen eines Programms, das für zwei Eingabewerte x und y entscheidet, ob x einen Beweis für das Diagonalelement $\varphi_y(\overline{y})$ codiert. Der Vergleich ist durchaus angebracht. Heute wissen wir, dass jede Funktion, die von einem Programm ohne die Verwendung von While-Schleifen berechnet werden kann, primitiv-rekursiv ist und sich jede primitiv-rekursive Funktion in ein ebensolches Programm übersetzten lässt [89]. Auch wenn die Notation den Blick darauf versperrt, verbirgt sich im Beweis des ersten Unvollständigkeitssatzes eines der ersten Computerprogramme des zwanzigsten Jahrhunderts. Gödel konnte dies damals freilich noch nicht wissen. Im Jahr 1931 waren programmierbare Computer, wie wir sie heute kennen, noch in weiter Ferne.

Weiter oben haben wir herausgestellt, dass Gödels Beweis im Kern auf der Konstruktion einer Aussage beruht, die ihre eigene Unbeweisbarkeit postuliert. Ohne explizit darauf hinzuweisen, haben wir diese Formel mit $\varphi_g(\overline{g})$ bereits konstruiert. Warum dies so ist, lässt sich leicht einsehen. Zunächst ist $\varphi_g(\overline{g})$ das Diagonalelement von

$$\varphi_g(y) = \forall x \neg \psi_{\mathrm{Gdl}}(x,y)$$

Jede konkrete Instanz $\varphi_g(\overline{y})$ besagt, dass kein x die Gödelnummer eines Beweises für das Diagonalelement $\varphi_y(\overline{y})$ ist:

$$\varphi_g(\overline{y}) \mathrel{\hat{=}} \text{„}\varphi_y(\overline{y}) \textit{ ist nicht beweisbar.}\text{“}$$

Dann trägt die Formel $\varphi_g(\overline{g})$ aber die folgende inhaltliche Aussage in sich:

$$\varphi_g(\overline{g}) \mathrel{\hat{=}} \text{„}\varphi_g(\overline{g}) \textit{ ist nicht beweisbar.}\text{“}$$

Oder, was gleichbedeutend ist:

$$\varphi_g(\overline{g}) \mathrel{\hat{=}} \text{„}\textit{Ich bin nicht beweisbar.}\text{“}$$

Nicht selten wird Gödels Beweis dahingehend missverstanden, dass er auf der semantischen Bedeutung von $\varphi_g(\overline{g})$ beruht. Einige Kritiker sehen in der Konstruktion von $\varphi_g(\overline{g})$ sogar einen irregulären Selbstbezug, der Parallelen zur Russell'schen Antinomie aufweist und die Legitimität des Beweises in Frage stellt. Wenn Sie die Ausführungen auf diesen Seiten nochmals durchgehen, werden Sie jedoch schnell bemerken, dass wir die Formel $\varphi_g(\overline{g})$ gar nicht inhaltlich gedeutet haben. Dass weder $\varphi_g(\overline{g})$ noch $\neg\varphi_g(\overline{g})$ beweisbar sein kann, sofern die Peano-Arithmetik frei von Widersprüchen ist, haben wir rein auf der syntaktischen Ebene gezeigt. Dennoch hilft die semantische Interpretation von $\varphi_g(\overline{g})$ dabei, den Gödel'schen Beweis zu verstehen. Sie gibt einen Hinweis darauf, warum in jedem hinreichend ausdrucksstarken formalen System unentscheidbare Sätze existieren müssen.

- Angenommen, es gelte $\vdash \varphi_g(\overline{g})$.

  Wäre $\varphi_g(\overline{g})$ beweisbar, so müsste eine Gödelnummer m existieren, die den Beweis dieser Formel codiert. $\varphi_g(\overline{g})$ ist das Diagonalelement der Formel $\varphi_g(\xi)$, und somit gilt $\mathrm{Gdl}(m,g)$. Da ψ_{Gdl} die Relation Gdl syntaktisch repräsentiert, folgt daraus

  $$\vdash \psi_{\mathrm{Gdl}}(\overline{m},\overline{g}) \tag{4.9}$$

  Die Annahme $\vdash \varphi_g(\overline{g})$ lautet ausgeschrieben $\vdash \forall x \neg\psi_{\mathrm{Gdl}}(x,\overline{g})$. Instanziieren wir die Variable x mit $\overline{m}$, so erhalten wir mit

  $$\vdash \neg\psi_{\mathrm{Gdl}}(\overline{m},\overline{g})$$

  einen unmittelbaren Widerspruch zu (4.9). Die Formel $\varphi_g(\overline{g})$ kann nur dann beweisbar sein, wenn die Peano-Arithmetik widersprüchlich ist. In diesem Fall könnten wir jede beliebige arithmetische Formel aus den Axiomen ableiten.

- Angenommen, es gelte $\vdash \neg\varphi_g(\overline{g})$.

  Die Annahme lautet ausgeschrieben $\vdash \neg\forall x \neg\psi_{\mathrm{Gdl}}(x,\overline{g})$, und daraus folgt

  $$\vdash \exists x\, \psi_{\mathrm{Gdl}}(x,\overline{g}) \tag{4.10}$$

Ist die Peano-Arithmetik widerspruchsfrei, so ist nicht gleichzeitig die Formel $\varphi_g(\overline{g})$ beweisbar. Das bedeutet, dass keine natürliche Zahl die Gödelnummer eines Beweises für $\varphi_g(\overline{g})$ sein kann. Es gilt also

$$(0,g) \notin \mathrm{Gdl}, (1,g) \notin \mathrm{Gdl}, (2,g) \notin \mathrm{Gdl}, (3,g) \notin \mathrm{Gdl}, \ldots$$

Da ψ_{Gdl} die Relation Gdl syntaktisch repräsentiert, können wir die folgenden Schlüsse ziehen:

$$\vdash \neg\psi_{\mathrm{Gdl}}(0,\overline{g}) \tag{4.11}$$
$$\vdash \neg\psi_{\mathrm{Gdl}}(\overline{1},\overline{g}) \tag{4.12}$$
$$\vdash \neg\psi_{\mathrm{Gdl}}(\overline{2},\overline{g}) \tag{4.13}$$
$$\ldots$$

Damit haben wir uns in eine prekäre Situation manövriert. Wäre $\neg\varphi_g(\overline{g})$ innerhalb der Peano-Arithmetik beweisbar, so wäre es auch die Formel (4.10). Diese besagt, dass innerhalb der Menge der natürlichen Zahlen eine Zahl x existieren muss, für die $\psi_{\mathrm{Gdl}}(\overline{x},\overline{g})$ wahr ist. Auf der anderen Seite scheinen die Formeln (4.11), (4.12), (4.13) usw. genau dies zu widerlegen. Für jede beliebige natürliche Zahl x können wir die Formel $\vdash \neg\psi_{\mathrm{Gdl}}(\overline{x},\overline{g})$ beweisen. Offensichtlich ist es uns gelungen, einen Widerspruch zu erzeugen. Oder etwa nicht?

Über den augenscheinlich entstandenen Widerspruch dürfen wir nicht allzu schnell hinweggehen. Wir haben ihn erhalten, weil wir die bewiesenen Formeln *semantisch* interpretiert haben. Hätten wir die *Korrektheit* der Peano-Arithmetik vorausgesetzt, hätten wir also angenommen, dass sich nur wahre arithmetische Aussagen aus den Axiomen ableiten lassen, so wären wir tatsächlich am Ziel. Ganz offensichtlich können die Formeln (4.10), (4.11), (4.12), (4.13), ... nicht gleichzeitig wahr sein.

In der syntaktischen Variante des ersten Gödel'schen Unvollständigkeitssatzes ist aber lediglich die *Widerspruchsfreiheit* der Peano-Arithmetik gefordert. Um hiergegen einen Einwand zu erheben, müssen wir für eine gewisse Formel φ zeigen, dass sowohl φ als auch $\neg\varphi$ beweisbar sind. Dies ist uns mit den Formeln (4.10), (4.11), (4.12), (4.13), ... aber nicht gelungen. Auch wenn sie nicht gleichzeitig wahr sein können, erzeugen sie auf der syntaktischen Ebene keinen Widerspruch. Gödel sah sich mit genau diesem Problem konfrontiert und konnte es nur lösen, indem er nicht die Widerspruchsfreiheit, sondern die ω-Widerspruchsfreiheit zur Voraussetzung des ersten Unvollständigkeitssatzes erhob. Was wir unter diesem Begriff genau zu verstehen haben, klärt die folgende Definition:

Definition 4.6 (ω-Widerspruchsfreiheit)

Ein formales System (Kalkül) heißt *ω-widerspruchsfrei*, wenn

- es widerspruchsfrei ist und die folgende Eigenschaft erfüllt:
- Gilt $\vdash \neg\varphi(\overline{n})$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so folgt daraus $\nvdash \exists x\, \varphi(x)$.

Die ω-Widerspruchsfreiheit ist eine stärkere Eigenschaft als die Widerspruchsfreiheit. Ganz offensichtlich ist jedes ω-widerspruchsfreie formale System auch widerspruchsfrei, nicht aber umgekehrt.

Mit dem neuen Begriff sind wir in der Lage, jene Variante des ersten Unvollständigkeitssatzes zu formulieren, die Gödel in seiner Originalarbeit bewiesen hat. In moderner Sprechweise lautet sie wie folgt:

Satz 4.6 (Gödel, 1931)

Jedes ω-widerspruchsfreie formale System, das stark genug ist, um die Peano-Arithmetik zu formalisieren, ist negationsunvollständig.

Mit diesem Ergebnis hat unsere Reise auf Gödels historischem Pfad ein erfolgreiches Ende gefunden. Zumindest für den Moment.

Um die Konstruktion der Rosser'schen Formel φ_r zu verstehen, wollen wir zunächst die inhaltliche Bedeutung der Gödel'schen Formel φ_g rekapitulieren. Weiter oben haben wir herausgearbeitet, dass jede konkrete Instanz $\varphi_g(\overline{y})$ für die Aussage

„$\varphi_y(\overline{y})$ ist nicht beweisbar"

steht und das Diagonalelement $\varphi_g(\overline{g})$ damit der folgenden Aussage entspricht:

„Ich bin nicht beweisbar."

Die Rosser'sche Formel lässt sich auf die gleiche Weise analysieren. Übersetzen wir die einzelnen Formelbestandteile in die natürliche Sprache, so lässt sich die inhaltliche Bedeutung von $\varphi_r(\overline{y})$ folgendermaßen ausdrücken:

„Ist $\varphi_y(\overline{y})$ beweisbar, so existiert ein kürzerer Beweis für $\neg\varphi_y(\overline{y})$."

Damit entspricht das Diagonalelement $\varphi_r(\overline{r})$ der Aussage

„Ist $\varphi_r(\overline{r})$ beweisbar, so existiert ein kürzerer Beweis für $\neg\varphi_r(\overline{r})$"

oder, was gleichbedeutend ist:

„Wenn ich beweisbar bin, so existiert ein kürzerer Beweis für meine Negation."

Unter der Annahme der Widerspruchsfreiheit ist diese Aussage aber äquivalent zu

„Ich bin nicht beweisbar."

Unsere Betrachtung zeigt, dass zwischen dem Gödel'schen und dem Rosser'schen Diagonalelement kein semantischer Unterschied besteht; beide postulieren ihre eigene Unbeweisbarkeit. Die Art und Weise, wie beide Formeln ihre inhaltliche Aussage codieren, ist dagegen eine völlig andere, und genau hierin liegt das Geheimnis des Rosser'schen Beweises.

4.2.5 Rossers Beitrag

In seiner ursprünglichen Formulierung macht der erste Gödel'sche Unvollständigkeitssatz eine Aussage über ω-widerspruchsfreie formale Systeme. Dass sich die Annahme der ω-Widerspruchsfreiheit durch die schwächere Annahme der Widerspruchsfreiheit ersetzen lässt, wurde erst 1936 von dem US-amerikanischen Mathematiker John Barkley Rosser bewiesen, rund fünf Jahre nach der Publikation der Unvollständigkeitssätze [151, 171].

Es ist ein bemerkenswerter Aspekt seiner Arbeit, dass Rosser die Gödel'sche Argumentationslinie fast vollständig beibehalten konnte. Um den Unvollständigkeitssatz in seiner vollen Allgemeinheit zu beweisen, reicht es, die Gödel'sche Formel $\varphi_g(y)$ durch die Rosser'sche Formel

$$\varphi_r(y) := \forall x\,(\psi_{\mathrm{Gdl}}(x,y) \to \exists(z \leq x)\ \psi_{\mathrm{Gdl'}}(z,y)) \tag{4.14}$$

zu ersetzen. Der Austausch von $\varphi_g(\overline{g})$ durch $\varphi_r(\overline{r})$ wird in der Literatur häufig als *Rossers Trick* bezeichnet.

Die in (4.14) verwendete Teilformel $\psi_{\mathrm{Gdl'}}(z,y)$ kommt an dieser Stelle das erste Mal vor. Sie ist die syntaktische Repräsentation der folgenden primitiv-rekursiven Relation:

$$\mathrm{Gdl}'(x,y) \ :\Leftrightarrow\ x \text{ ist die Gödelnummer eines Beweises von } \neg\varphi_y(\overline{y})$$

Wir werden nun zeigen, dass die Formel $\varphi_r(\overline{r})$ innerhalb der Peano-Arithmetik unentscheidbar ist.

■ Angenommen, es gelte $\vdash \varphi_r(\overline{r})$.

Wäre $\varphi_r(\overline{r})$ beweisbar, so müsste eine Gödelnummer m existieren, die den Beweis dieser Formel codiert. $\varphi_r(\overline{r})$ ist das Diagonalelement der Formel $\varphi_r(\xi)$, und somit gilt $\mathrm{Gdl}(m,r)$. Da ψ_{Gdl} die Relation Gdl syntaktisch repräsentiert, folgt daraus

$$\vdash \psi_{\mathrm{Gdl}}(\overline{m},\overline{r}) \tag{4.15}$$

Die Annahme $\vdash \varphi_r(\overline{r})$ lautet ausgeschrieben

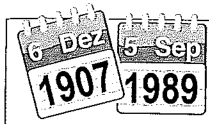
$$\vdash \forall x\,(\psi_{\mathrm{Gdl}}(x,\overline{r}) \to \exists(z \leq x)\ \psi_{\mathrm{Gdl'}}(z,\overline{r}))$$

Instanziieren wir die Variable x mit $\overline{m}$, so erhalten wir

$$\vdash \psi_{\mathrm{Gdl}}(\overline{m},\overline{r}) \to \exists(z \leq \overline{m})\ \psi_{\mathrm{Gdl'}}(z,\overline{r}) \tag{4.16}$$

Mit der Modus-ponens-Schlussregel folgt aus (4.15) und (4.16)

$$\vdash \exists(z \leq \overline{m})\ \psi_{\mathrm{Gdl'}}(z,\overline{r}) \tag{4.17}$$



John Barkley Rosser wurde am 6. Dezember 1907 in Jacksonville geboren. An der University of Florida studierte er Physik und wechselte nach seinem Master-Abschluss an die renommierte Princeton University, wo er 1935 unter Alonzo Church in mathematischer Logik promovierte [150]. Nach kürzeren Aufenthalten in Princeton und Harvard erhielt er 1936 den Ruf an die Cornell University, die für die nächsten 30 Jahre zu seiner wissenschaftlichen Heimat werden sollte.

Rosser ist neben der Verbesserung des Gödel'schen Beweises (*Rossers Trick*) vor allem für seine Arbeiten auf dem Gebiet der Rekursionstheorie bekannt. Im Jahr 1935 sorgte er für Aufsehen, als er zusammen mit Stephen Cole Kleene einen Widerspruch in der ursprünglichen Formulierung des λ-Kalküls von Alonzo Church fand (*Kleene-Rosser-Paradoxon*). Heute wird sein Name vor allem mit dem *Church-Rosser-Theorem* verbunden, das die Konfluenzeigenschaft gewisser Termersetzungssysteme garantiert (Theorem 2 in [31]). Einen hohen Bekanntheitsgrad erzielte Rosser nicht zuletzt durch mehrere Bücher, die heute zur Standardliteratur der mathematischen Logik zählen [152–154].

Rosser war nicht nur Theoretiker. Während des zweiten Weltkriegs beschäftigte er sich mit der Konstruktion ballistischer Raketen und übernahm später wichtige Beraterpositionen in der Weltraum- und Militärforschung. Im Jahr 1963 wurde er zum Direktor des *Army Mathematics Research Centers* (AMRC) ernannt, einer Einrichtung des US-Militärs zur strategischen Unterstützung der US-Invasion in Vietnam. In dieser Rolle war er nicht unumstritten; öffentlich dementierte er jegliche Beteiligung des AMRC an militärischen Projekten. Im Jahr 1973 ging Rosser in den Ruhestand und starb am 5. September 1989 mit 81 Jahren.

Ist die Peano-Arithmetik widerspruchsfrei, so ist nicht gleichzeitig die Formel $\neg\varphi_r(\overline{r})$ beweisbar. Das bedeutet, das keine natürliche Zahl die Gödelnummer eines Beweises für $\neg\varphi_r(\overline{r})$ sein kann. Es gilt also:

$$\vdash \neg\psi_{\mathrm{Gdl'}}(0,\overline{r}) \tag{4.18}$$

$$\vdash \neg\psi_{\mathrm{Gdl'}}(\overline{1},\overline{r}) \tag{4.19}$$

$$\vdash \neg\psi_{\mathrm{Gdl'}}(\overline{2},\overline{r}) \tag{4.20}$$

$$\ldots$$

Aus (4.18) und (4.19) folgt

$$\vdash \neg\exists(z \leq \overline{1})\ \psi_{\mathrm{Gdl'}}(z,\overline{r})$$

Nehmen wir Formel (4.20) hinzu, so können wir

$$\vdash \neg\exists(z \leq \overline{2})\ \psi_{\mathrm{Gdl'}}(z,\overline{r})$$

herleiten. Fahren wir in dieser Weise fort, so erhalten wir irgendwann

$$\vdash \neg\exists(z \leq \overline{m})\ \psi_{\mathrm{Gdl'}}(z,\overline{r}),$$

im Widerspruch zu (4.17). Das Diagonalelement $\varphi_r(\overline{r})$ kann also nur dann beweisbar sein, wenn die Peano-Arithmetik widersprüchlich ist.

- Angenommen, es gelte $\vdash \neg\varphi_r(\bar{r})$

  Die Annahme lautet ausgeschrieben

$$\vdash \neg\forall x\,(\psi_{\text{Gdl}}(x,\bar{r}) \to \exists(z \leq x)\;\psi_{\text{Gdl}'}(z,\bar{r})) \qquad (4.21)$$

  Sei m die Gödelnummer eines Beweises für $\neg\varphi_r(\bar{r})$. Dann gilt:

$$\vdash \psi_{\text{Gdl}'}(\overline{m},\bar{r})$$

  Die Peano-Arithmetik ist ausdrucksstark genug, um hieraus die folgende, inhaltlich abgeschwächte Aussage abzuleiten:

$$\vdash \forall x\,((\overline{m} \leq x) \to \exists(z \leq x)\;\psi_{\text{Gdl}'}(z,\bar{r})) \qquad (4.22)$$

  Ist die Peano-Arithmetik widerspruchsfrei, so ist nicht gleichzeitig die Formel $\varphi_r(\bar{r})$ beweisbar. Das bedeutet, dass keine natürliche Zahl die Gödelnummer eines Beweises für $\varphi_r(\bar{r})$ sein kann. Es gilt also:

$$\vdash \neg\psi_{\text{Gdl}}(0,\bar{r})$$
$$\vdash \neg\psi_{\text{Gdl}}(\bar{1},\bar{r})$$
$$\vdash \neg\psi_{\text{Gdl}}(\bar{2},\bar{r})$$
$$\ldots$$

  Genau wie im ersten Fall lassen sich hieraus nacheinander die folgenden Theoreme herleiten:

$$\vdash \neg\exists(z \leq \bar{1})\;\psi_{\text{Gdl}}(z,\bar{r})$$
$$\vdash \neg\exists(z \leq \bar{2})\;\psi_{\text{Gdl}}(z,\bar{r})$$
$$\ldots$$
$$\vdash \neg\exists(z \leq \overline{m})\;\psi_{\text{Gdl}}(z,\bar{r})$$

  Aus diesen Ergebnissen können wir innerhalb der Peano-Arithmetik den folgenden Schluss ziehen:

$$\vdash \forall x\,(\psi_{\text{Gdl}}(x,\bar{r}) \to (\overline{m} \leq x)) \qquad (4.23)$$

  Kombinieren wir die Ergebnisse (4.23) und (4.22) transitiv miteinander, so erhalten wir das folgende Theorem:

$$\vdash \forall x\,(\psi_{\text{Gdl}}(x,\bar{r}) \to \exists(\,z \leq x)\psi_{\text{Gdl}'}(z,\bar{r})) \qquad (4.24)$$

  Damit haben wir es geschafft, mit (4.21) und (4.24) ein komplementäres Formelpaar abzuleiten. Wäre $\neg\varphi_r(\bar{r})$ also tatsächlich beweisbar, so hätten wir die Peano-Arithmetik als widersprüchlich identifiziert.

Wir sind so weit, die Früchte unserer Arbeit zu ernten. Dank Rossers Trick können wir die Forderung der ω-Widerspruchsfreiheit fallen lassen und durch die schwächere Widerspruchsfreiheit ersetzen:

Satz 4.7 (Rosser, 1936)

> Jedes widerspruchsfreie formale System, das stark genug ist, um die Peano-Arithmetik zu formalisieren, ist negationsunvollständig.

Dieser Satz wird in der Literatur häufig als das *Gödel-Rosser-Theorem* bezeichnet und ist im Wortlaut mit Satz 4.2 identisch. Es ist jenes Theorem, das wir als die syntaktische Variante des ersten Gödel'schen Unvollständigkeitssatzes bezeichnet haben.

4.3 Der zweite Unvollständigkeitssatz

In seiner Arbeit aus dem Jahr 1931 hat Gödel mehr bewiesen als die Unvollständigkeit der Arithmetik. Im zweiten Teil beschäftigte er sich ausführlich mit den Konsequenzen des ersten Unvollständigkeitssatzes und machte dabei ein weitreichende Entdeckung. Sie ist Inhalt dessen, was wir heute als den *zweiten Gödel'schen Unvollständigkeitssatz* bezeichnen. Dieser Satz besagt, dass kein formales System, das stark genug ist, um über die additiven und die multiplikativen Eigenschaften der natürlichen Zahlen zu sprechen, seine eigene Widerspruchsfreiheit beweisen kann. In diesem Abschnitt werden wir klären, wie diese Aussage im Detail gemeint ist und welche Konsequenzen sich hieraus für die Mathematik ergeben.

Wenn wir sagen, ein formales System kann seine eigene Widerspruchsfreiheit beweisen, dann meinen wir das Folgende:

- Es existiert eine Formel Con, die genau dann wahr ist, wenn das formale System widerspruchsfrei ist.
- Die Formel Con ist innerhalb des Systems beweisbar ($\vdash$ Con).

Per Definition ist ein formales System widerspruchsfrei, wenn für keine Formel φ sowohl φ als auch dessen Negation $\neg\varphi$ aus den Axiomen abgeleitet werden kann. Um diese Eigenschaft zu formalisieren, benötigen wir das sogenannte *Beweisprädikat*. Hinter diesem Begriff verbirgt

Was wir heute als den zw ten Gödel'schen Unvollst digkeitssatz bezeichnen, heißt in der C ginalarbeit schlicht Satz XI. Den Bew zu diesem Satz hat Gödel nur grob um sen, und seine Arbeit endet mit den f genden Worten [64]:

> *„In voller Allgemeinheit werden die Resultate in einer demnächst erscheinenden Fortsetzung ausgesprochen und bewiesen werden. dieser Arbeit wird auch der nur skizzenhaft geführte Beweis von Satz X ausführlich dargestellt werden. (Eingelangt: 17. XI. 1930)"*

Die angekündigte Fortsetzung seiner A beit hat es nie gegeben; bereits die Skiz seines Beweises war für die meisten M thematiker so überzeugend, dass kaum mand an ihrer Richtigkeit zweifelte. G nauso wenig stand außer Frage, dass d vollständige Ausarbeitung des Beweis ein langwieriges und technisch komp ziertes Unterfangen sein würde.
Die ersten, die sich dieser Aufgabe anna men, waren David Hilbert und Paul Be nays. Im Jahr 1939 führten sie den Bewe für die Systeme Z und Z_μ, zwei spezie le Varianten der Peano-Arithmetik [80 Als Nebenprodukt ihres Beweises kon ten sie präzise Kriterien aufstellen, d 1955 von Martin Löb weiter vereinfac wurden [110] und im Englischen als *d rivability conditions* bezeichnet werde Werden sie von einem formalen Syste erfüllt, so lässt sich der Beweis des *erste* Unvollständigkeitssatzes *innerhalb* diese Systems formalisieren. Am Ende diese Abschnitts wird die Erkenntnis stehen dass es genau diese Eigenschaft ist, di ein formales System zum Opfer des zwe ten Unvollständigkeitssatzes werden läss Ein formales System, das stark genug is um den Beweis des ersten Unvollständig keitssatzes nachzuvollziehen, kann nie mals seine eigene Widerspruchsfreihe beweisen.

> Gödel wählte einen geringfügig anderen Weg, um die Widerspruchsfreiheit eines formalen Systems zu beschreiben. Er nutzte aus, dass in jeder widersprüchlichen Theorie, die den gewöhnlichen aussagenlogischen Schlussapparat enthält, ausnahmslos jede Formel aus den Axiomen abgeleitet werden kann. Warum dies so ist, haben wir in der Randnotiz auf Seite 96 erörtert.
> Folgerichtig ist ein formales System bereits dann widerspruchsfrei, wenn eine einzige Formel existiert, die nicht beweisbar ist. Diese Charakterisierung können wir eins zu eins in jene Formel übersetzen, die Gödel in seiner Originalarbeit als Wid bezeichnet [64]:
>
> $$\mathsf{Wid} := \exists \mathsf{x}\,(\mathsf{Form}(\mathsf{x}) \wedge \neg \mathsf{Bew}(\mathsf{x}))$$
>
> Hierin ist Form(x) eine Formel, die genau dann beweisbar ist, wenn x die Gödelnummer eines syntaktisch korrekt geformten arithmetischen Ausdrucks ist. In seiner Arbeit hat Gödel ausführlich dargelegt, wie sich diese Formel konstruieren lässt.
> Es gibt noch eine dritte Möglichkeit, die Widerspruchsfreiheit zu beschreiben. Es genügt, ein beweisbares Theorem zu wählen (z. B. die Formel $0 \neq \overline{1}$) und die Unbeweisbarkeit ihrer Negation zu fordern:
>
> $$\mathsf{Con}' := \neg \mathsf{Bew}(\ulcorner \overline{0 = \overline{1}} \urcorner)$$
>
> Es ist irrelevant, für welche Variante wir uns am Ende entscheiden. Alle drei Charakterisierungen sind äquivalent.

sich eine zweistellige Relation $B(x,y)$ mit der folgenden Eigenschaft:

$$B(x, \ulcorner \varphi \urcorner) :\Leftrightarrow x \text{ codiert einen Beweis für die Formel } \varphi$$

$B(x,y)$ ist also genau dann wahr, wenn x die Gödelnummer eines Beweises für die Formel mit der Gödelnummer y ist. Analog hierzu definieren wir die Relation $B'(x,y)$ wie folgt:

$$B'(x, \ulcorner \varphi \urcorner) :\Leftrightarrow x \text{ codiert einen Beweis für die Formel } \neg\varphi$$

Die Beweisprädikate $B(x,y)$ und $B'(x,y)$ sind vereinfachte Varianten der weiter oben eingeführten Relationen $\mathrm{Gdl}(x,y)$ und $\mathrm{Gdl}'(x,y)$ und genau wie diese primitiv-rekursiv. Damit sind $B(x,y)$ und $B'(x,y)$ nach Satz 4.5 innerhalb der Peano-Arithmetik syntaktisch repräsentierbar. Das bedeutet, dass Formeln $\psi_B(\xi,\zeta)$ und $\psi_{B'}(\xi,\zeta)$ mit den folgenden Eigenschaften existieren:

$$\vdash \psi_B(\overline{x}, \overline{\ulcorner \varphi \urcorner}) \Leftrightarrow x \text{ codiert einen Beweis für die Formel } \varphi$$
$$\vdash \neg\psi_B(\overline{x}, \overline{\ulcorner \varphi \urcorner}) \Leftrightarrow x \text{ codiert keinen Beweis für die Formel } \varphi$$

$$\vdash \psi_{B'}(\overline{x}, \overline{\ulcorner \varphi \urcorner}) \Leftrightarrow x \text{ codiert einen Beweis für die Formel } \neg\varphi$$
$$\vdash \neg\psi_{B'}(\overline{x}, \overline{\ulcorner \varphi \urcorner}) \Leftrightarrow x \text{ codiert keinen Beweis für die Formel } \neg\varphi$$

Vereinbaren wir jetzt noch die vereinfachende Schreibweise

$$\mathsf{Bew}(\sigma) := \exists \mathsf{y}\ \psi_B(\mathsf{y},\sigma) \qquad (4.25)$$
$$\mathsf{Bew}(\neg\sigma) := \exists \mathsf{y}\ \psi_{B'}(\mathsf{y},\sigma) \qquad (4.26)$$

so können wir die Widerspruchsfreiheit der Peano-Arithmetik folgendermaßen formalisieren:

$$\mathsf{Con} := \neg\exists \mathsf{x}\,(\mathsf{Bew}(\mathsf{x}) \wedge \mathsf{Bew}(\neg\mathsf{x}))$$

Inhaltlich besagt die Formel genau das, wonach wir suchen: Es gibt keine Formel, für die sowohl die Formel selbst als auch deren Negation innerhalb der Peano-Arithmetik bewiesen werden kann. Kurzum:

$$\models \mathsf{Con} \Leftrightarrow \text{„}\textit{Die Peano-Arithmetik ist widerspruchsfrei}\text{“}$$

Bevor wir die Konsequenzen untersuchen, die sich aus der Beweisbarkeit von Con ergeben, müssen wir noch einen wichtigen Zusammenhang zwischen dem Beweisprädikat B und der Relation Gdl herstellen.

Während $B(x,y)$ ausdrückt, dass x ein Beweis für die Formel mit der Gödelnummer y ist, besagt $\mathrm{Gdl}(x,y)$, dass x ein Beweis für das y-te Diagonalelement $\varphi_y(\overline{y})$ ist. Es gilt also

$$B(x, \ulcorner \varphi_y(\overline{y}) \urcorner) \Leftrightarrow \mathrm{Gdl}(x,y)$$

Für y können wir natürlich auch die Zahl g wählen. g war die Gödelnummer der Diagonalaussage $\varphi_g(\overline{g})$, die wir in Abschnitt 4.2.4 als unentscheidbar identifiziert haben:

$$B(x, \ulcorner \varphi_g(\overline{g}) \urcorner) \Leftrightarrow \mathrm{Gdl}(x,g)$$

Für die weitere Argumentation ist es wichtig, dass wir den Zusammenhang zwischen Gdl und B *innerhalb* der Peano-Arithmetik ausdrücken:

$$\vdash \forall \mathsf{x}\,(\psi_B(\mathsf{x}, \overline{\ulcorner \varphi_g(\overline{g}) \urcorner}) \leftrightarrow \psi_{\mathrm{Gdl}}(\mathsf{x},\overline{g})) \qquad (4.27)$$

Wie sich dieses Theorem innerhalb von PA ableiten lässt, ist detailliert in [170] beschrieben.

Aus (4.27) können wir

$$\vdash \exists \mathsf{x}\ \psi_B(\mathsf{x}, \overline{\ulcorner \varphi_g(\overline{g}) \urcorner}) \leftrightarrow \exists \mathsf{x}\ \psi_{\mathrm{Gdl}}(\mathsf{x},\overline{g})$$

ableiten. Diese Formel ist äquivalent zu

$$\vdash \neg\exists \mathsf{x}\ \psi_B(\mathsf{x}, \overline{\ulcorner \varphi_g(\overline{g}) \urcorner}) \leftrightarrow \forall \mathsf{x}\ \neg\psi_{\mathrm{Gdl}}(\mathsf{x},\overline{g})$$

und lässt sich mit (4.25) und (4.8) zu

$$\vdash \neg\mathsf{Bew}(\overline{\ulcorner \varphi_g(\overline{g}) \urcorner}) \leftrightarrow \varphi_g(\overline{g})$$

umformen. Weiter unten werden wir von diesem Theorem nur die Richtung von links nach rechts benötigen:

$$\vdash \neg\mathsf{Bew}(\overline{\ulcorner \varphi_g(\overline{g}) \urcorner}) \to \varphi_g(\overline{g}) \qquad (4.28)$$

Jetzt kommt der erste Unvollständigkeitssatz ins Spiel. In Worten besagt er, dass jedes widerspruchsfreie formale System, das stark genug ist, um die Peano-Arithmetik zu formalisieren, negationsunvollständig ist. Für den Beweis des zweiten Unvollständigkeitssatzes sind die folgenden beiden Tatsachen entscheidend:

- Der erste Unvollständigkeitssatz lässt sich innerhalb der Peano-Arithmetik formulieren. Für unsere Zwecke benötigen wir gar nicht den vollständigen Satz, sondern lediglich die Aussage, dass aus der Widerspruchsfreiheit von PA die Unbeweisbarkeit des Gödel'schen Diagonalelements $\varphi_g(\overline{g})$ folgt. Dies war der einfachere Fall im Beweis aus Abschnitt 4.2.4. Innerhalb der Peano-Arithmetik können wir die Aussage durch die folgende Formel beschreiben:

$$\mathsf{Con} \to \neg\mathsf{Bew}(\overline{\ulcorner \varphi_g(\overline{g}) \urcorner}) \qquad (4.29)$$

Dass sich der Beweis des ersten Gödel'schen Unvollständigkeitssatzes innerhalb der Peano-Arithmetik nachvollziehen lässt, ist alles andere als selbstverständlich. Der Beweis von Hilbert und Bernays aus dem Jahr 1939 zeigt nachdrücklich, wie kompliziert er sich im Detail gestaltet [86]. Und dennoch wurde Gödels Behauptung 1931 niemals ernsthaft angezweifelt. Die Akzeptanz seiner informellen Beweisskizze war so groß, dass Gödel davon absah, sie in der angekündigten zweiten Veröffentlichung detailliert auszuarbeiten. Wie kann das sein? Die undurchsichtige Situation klärt sich auf, wenn wir uns daran erinnern, dass Gödel sein Ergebnis gar nicht für die Peano-Arithmetik, sondern für das System P bewiesen hat, das auf dem logischen Unterbau der Principia Mathematica beruht. Dass sich ein umgangssprachlicher Beweis innerhalb der Typentheorie der Principia nachvollziehen lässt, war 1931 keine spektakuläre Nachricht. In ihrem dreibändigen Werk hatten Russell und Whitehead eindrucksvoll unter Beweis gestellt, dass in ihrem System alle Schlussweisen der gewöhnlichen Mathematik reproduziert werden können.
Die Arbeit von Hilbert und Bernays ist somit weit mehr als die Komplettierung der Gödel'schen Beweisskizze. In ihr wurde zum ersten Mal formal gezeigt, dass der Beweis des ersten Gödel'schen Unvollständigkeitssatzes innerhalb von Theorien nachvollzogen werden kann, die deutlich primitiver sind als die Typentheorie der Principia Mathematica.

■ Nicht nur der Unvollständigkeitssatz selbst, sondern auch sein Beweis lässt sich in die Peano-Arithmetik übertragen. Wie so etwas prinzipiell gelingen kann, haben wir in Abschnitt 3.2.1.3 dargelegt. Dort haben wir am Beispiel des Satzes über die Komponentengleichheit geordneter Paare gezeigt, wie sich ein umgangssprachlich formulierter Beweis innerhalb der Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre formal nachvollziehen lässt. Bezogen auf den ersten Unvollständigkeitssatz bedeutet dieses Ergebnis, dass wir eine Formelsequenz konstruieren können, die mit den Axiomen von PA beginnt und folgendermaßen endet:

$$\vdash \mathsf{Con} \to \neg\mathsf{Bew}(\ulcorner \overline{\varphi_g(\overline{g})} \urcorner) \tag{4.30}$$

Jetzt kommt der entscheidende Schritt: Wäre die Formel Con innerhalb der Peano-Arithmetik ableitbar, so könnten wir, wie in Abbildung 4.12 gezeigt, auch die Formel

$$\neg\mathsf{Bew}(\ulcorner \overline{\varphi_g(\overline{g})} \urcorner)$$

ableiten. Nehmen wir jetzt das in (4.28) formulierte Ergebnis hinzu, so erhalten wir einen Beweis für $\varphi_g(\overline{g})$. Aus dem ersten Unvollständigkeitssatz wissen wir aber bereits, dass die Formel $\varphi_g(\overline{g})$ unbeweisbar ist. Damit sind wir am Ziel und können den zweiten Gödel'schen Unvollständigkeitssatz mit stolzer Brust verkünden:

Satz 4.8 (Gödel, 1931)

In jedem widerspruchsfreien formalen System, das stark genug ist, um die Peano-Arithmetik zu formalisieren, gilt $\nvdash \mathsf{Con}$.

Es ist wichtig, aus dem zweiten Unvollständigkeitssatz nicht die falschen Schlüsse zu ziehen. Häufig wird Gödels zweiter Satz dahingehend falsch verstanden, dass aus der Beweisbarkeit von Con tatsächlich die Widerspruchsfreiheit des zugrunde liegenden formalen Systems folge. Dies ist aber keineswegs der Fall. Ist ein formales System, das den aussagenlogischen Schlussapparat beinhaltet, widersprüchlich, so lassen sich ausnahmslos alle Formeln aus den Axiomen ableiten und somit auch die Formel Con. Der gegenteilige Schluss ist korrekt: Gelingt es uns, in einem formalen System, das die Voraussetzungen des zweiten Unvollständigkeitssatzes erfüllt, tatsächlich die eigene Widerspruchsfreiheit zu beweisen, so muss es zwangsläufig widersprüchlich sein. Das bedeutet, dass wir den zweiten Unvollständigkeitssatz lediglich dazu benutzen können, um die Widersprüchlichkeit, nicht aber die Widerspruchsfreiheit eines formalen Systems zu beweisen.

	$\vdash \ldots$	(...)
Wäre die Widerspruchsfreiheit von PA innerhalb von PA beweisbar,	$\vdash \mathsf{Con}$	(Annahme)
	$\vdash \ldots$	(...)
	$\vdash \ldots$	(...)
... so würde aus der Formalisierung des ersten Unvollständigkeitssatzes	$\vdash \mathsf{Con} \to \neg\mathsf{Bew}(\ulcorner \overline{\varphi_g(\overline{g})} \urcorner)$	(4.30)
	$\vdash \neg\mathsf{Bew}(\ulcorner \overline{\varphi_g(\overline{g})} \urcorner)$	(MP)
... die Beweisbarkeit der Gödel'schen Diagonalaussage folgen. Diese ist in PA aber unbeweisbar!	$\vdash \neg\mathsf{Bew}(\ulcorner \overline{\varphi_g(\overline{g})} \urcorner) \to \varphi_g(\overline{g})$	(4.28)
	$\vdash \varphi_g(\overline{g})$	(MP)
	Aus dem ersten Unvollständigkeitssatz wissen wir: $\nvdash \varphi_g(\overline{g})$	

Abbildung 4.12: Der finale Schritt im Beweis des zweiten Gödel'schen Unvollständigkeitssatzes. Wäre Con innerhalb der Peano-Arithmetik beweisbar, so ergäbe sich hieraus ein Beweis von $\varphi_g(\overline{g})$, im Widerspruch zum ersten Unvollständigkeitssatz.

Die wahre Bedeutung des zweiten Unvollständigkeitssatzes ist eine andere: Wenn ein formales System seine eigene Widerspruchsfreiheit nicht beweisen kann, so kann der Beweis auch in keinem ausdrucksschwächeren System gelingen. Hieraus folgt unmittelbar, dass sich die Widerspruchsfreiheit der Mathematik nicht mit den Mitteln der gewöhnlichen Mathematik selbst beweisen lässt.

Bedeutet dieses Ergebnis, dass wir z. B. der Peano-Arithmetik misstrauen müssen? Auch wenn der zweite Unvollständigkeitssatz die Hoffnung zunichte macht, dass wir PA mit Schlussweisen absichern können, die primitiver und damit glaubhafter sind als die Peano-Arithmetik selbst, so gibt es für ein solches Misstrauen keinen Grund. Kaum jemand stellt die Widerspruchsfreiheit von PA ernsthaft in Frage. Hierzu sind die Axiome zu einfach und die natürlichen Zahlen eine zu vertraute Struktur.

Und wie sieht es mit der Mengenlehre aus? Reicht das Fundierungsaxiom wirklich aus, um sämtliche Antinomien aus der Mengenlehre zu verdrängen? Auch hier herrscht die Meinung vor, dass sich die Mathematik widerspruchsfrei auf ZF oder ZFC errichten lässt, einen formalen Beweis dafür halten wir aber nicht in Händen. Der zweite Unvollständigkeitssatz macht unmissverständlich klar, dass ein solcher Beweis nur in formalen Systemen möglich ist, die komplexer sind als ZF oder ZFC. Wir würden die Frage also lediglich auf ein anderes System verschieben. In der Tat zerstört der zweite Unvollständigkeitssatz jede Hoffnung, auf die Frage der Widerspruchsfreiheit von ZF oder ZFC jemals eine präzise Antwort zu erhalten.

4.4 Gödels Sätze richtig verstehen

Nur wenige mathematische Erkenntnisse wurden in der Vergangenheit so kontrovers diskutiert wie die Gödel'schen Unvollständigkeitssätze – und nur wenige wurden so oft missverstanden. Die Gründe hierfür sind vielfältig. Manche studieren die Sätze nur ungenau, andere ignorieren die Voraussetzungen oder überinterpretieren ihre inhaltlichen Aussagen; wiederum andere reißen die Unvollständigkeitssätze, bewusst oder unbewusst, aus ihrem mathematischen Kontext und preisen sie als Legitimation für die verschiedensten Dinge dieser Welt.

In diesem Abschnitt wollen wir einige besonders häufig wiederkehrende Missverständnisse grob skizzieren und versuchen, sie durch eine saubere Erklärung auszuräumen. Nicht alles in diesem Abschnitt ist neu. Wenn Sie den bisherigen Text sorgsam gelesen haben, sollten Sie einige der geschilderten Missverständnisse schon nicht mehr als solche empfinden. In diesem Fall haben Sie bereits ein gutes Verständnis für das entwickelt, was die Gödel'schen Sätze besagen – und viel wichtiger noch: für das, was sie nicht besagen.

Missverständnis 1:

„Gödel hat gezeigt, dass in der Mathematik wahre Sätze existieren, die nicht beweisbar sind."

Aus dem ersten Gödel'schen Unvollständigkeitssatz wird des öfteren der falsche Schluss gezogen, dass in der Mathematik Sätze existieren, die in einem absoluten Sinn unbeweisbar sind. Das Missverständnis klärt sich auf, wenn wir uns daran erinnern, was es heißt, etwas zu beweisen. Im formalen Sinne ist eine Formel φ beweisbar, wenn sie aus den Axiomen eines Kalküls durch die Anwendung von Schlussregeln hergeleitet werden kann. Das bedeutet, dass der Beweisbarkeitsbegriff immer an einen bestimmten Kalkül gekoppelt ist. Es ist leicht einzusehen, dass für jede Formel φ ein Kalkül existiert, in dem φ bewiesen werden kann. Folgerichtig ist die Beweisbarkeit immer eine relative Eigenschaft und niemals eine absolute.

Als Beispiel soll die Formel φ für die Goldbach'sche Vermutung stehen, von der wir heute nicht wissen, ob sie in der Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre bewiesen werden kann oder nicht. Sollte sich herausstellen, dass φ in ZF unbeweisbar ist, so könnten wir φ zu den Axiomen von ZF hinzufügen und erhielten mit $\mathrm{ZF} \cup \{\varphi\}$ ein formales System, in dem die Goldbach'sche Vermutung beweisbar ist. Ob es sinnvoll ist, das Gebäude der Mathematik auf diesem Kalkül zu errichten, ist eine andere Frage.

Auch in der gewöhnlichen Mathematik ist der Begriff der Beweisbarkeit an einen Kalkül gekoppelt, allerdings wird er dort weder explizit

genannt, noch werden Beweise für gewöhnlich auf der formalen Ebene aufgeschrieben. Hier meinen wir mit *„beweisbar"*, dass eine Aussage im *„gewöhnlichen Schlussapparat der Mathematik"* abgleitet werden kann. Das formale Pendant zu diesem Schlussapparat ist die Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre, repräsentiert durch die Systeme ZF und ZFC.

Missverständnis

„Gödel hat gezeigt, dass in jedem f… malen System unentscheidbare Aus… gen existieren."

Behalten Sie stets im Gedächtnis, dass nicht alle formalen Systeme von der Gödel'schen Unvollständigkeit betroffen sind, sondern nur solche, die in der Lage sind, über die additiven und die multiplikativen Eigenschaften der natürlichen Zahlen zu sprechen. Hierunter fällt die Peano-Arithmetik, genauso wie die Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre, in der sich die natürlichen Zahlen durch Mengen und die Addition sowie die Multiplikation durch Mengenoperationen darstellen lassen.

Dass nicht jedes formale System unvollständig ist, hat auch schon die in Abschnitt 2.1 geführte Diskussion gezeigt. Dort haben wir einen korrekten und vollständigen Kalkül definiert, in dem eine Reihe primitiver Aussagen über die natürlichen Zahlen abgeleitet werden kann. Natürlich ist dieser Kalkül viel zu ausdrucksschwach, als dass wir ihm eine sinnvolle Anwendung innerhalb der Mathematik zuordnen könnten.

Wir halten fest: Nicht jedes formale System ist unvollständig. Damit drängt sich unweigerlich die Frage auf, ab wann das Phänomen der Unvollständigkeit tatsächlich einsetzt. Wie ausdrucksstark muss ein formales System sein, damit es in den Sog des ersten Gödel'schen Unvollständigkeitssatzes gerät? Um der Antwort näher zu kommen, betrachten wir die beiden formalen Systeme in Tabelle 4.3.

Links sind die Axiome der *Presburger-Arithmetik* aufgelistet, die bis auf die fehlenden Axiome für die Multiplikation mit der Peano-Arithmetik übereinstimmen. Im Jahr 1929 hat der polnische Mathematiker Mojżesz Presburger gezeigt, dass die Presburger-Arithmetik korrekt und vollständig ist. Das bedeutet, dass alle arithmetischen Formeln, die das Multiplikationszeichen nicht enthalten, aus den Axiomen abgleitet werden können. Um dem Phänomen der Unvollständigkeit zu erliegen, reicht es also nicht aus, über die additiven Fähigkeiten der natürlichen Zahlen sprechen zu können. Wir müssen zusätzlich in der Lage sein, auch über die Multiplikation zu reden.

Das bedeutet mitnichten, dass ein formales System über die volle Ausdrucksstärke der Peano-Arithmetik verfügen muss, um dem Unvollständigkeitssatz zum Opfer zu fallen. Eine genaue Analyse des Gödel'schen Beweises hat gezeigt, dass die vollständige Induktion in diesem Zusammenhang so gut wie keine Rolle spielt. Ersetzen wir in PA

Presburger-Arithmetik		Robinson-Arithmetik	
$\sigma = \tau \to (\sigma = \rho \to \tau = \rho)$	(P1)	$\sigma = \tau \to (\sigma = \rho \to \tau = \rho)$	(R1)
$\sigma = \tau \to s(\sigma) = s(\tau)$	(P2)	$\sigma = \tau \to s(\sigma) = s(\tau)$	(R2)
$\neg(0 = s(\sigma))$	(P3)	$\neg(0 = s(\sigma))$	(R3)
$s(\sigma) = s(\tau) \to \sigma = \tau$	(P4)	$s(\sigma) = s(\tau) \to \sigma = \tau$	(R4)
$\sigma + 0 = \sigma$	(P5)	$\sigma + 0 = \sigma$	(R5)
$\sigma + s(\tau) = s(\sigma + \tau)$	(P6)	$\sigma + s(\tau) = s(\sigma + \tau)$	(R6)
$\varphi(0) \to (\forall x\,(\varphi(x) \to \varphi(s(x))) \to \forall x\,\varphi(x))$	(P7)	$\sigma \times 0 = 0$	(R7)
		$\sigma \times s(\tau) = (\sigma \times \tau) + \sigma$	(R8)
		$\sigma = 0 \vee \exists \xi\ \sigma = s(\xi)$	(R9)

Tabelle 4.3: Theorieaxiome der Presburger-Arithmetik (links) und der Robinson-Arithmetik (rechts)

das Induktionsaxiom durch das viel schwächere Axiom (R9) aus Tabelle 4.3, so gelangen wir auf direktem Weg zur *Robinson-Arithmetik*. Sie ist ausdrucksschwächer als die Peano-Arithmetik, aber ausdrucksstärker als die Presburger-Arithmetik. Wir wissen heute, dass all das, was zur Durchführung des Gödel'schen Beweises benötigt wird, in der Robinson-Arithmetik bereits vorhanden ist. Das bedeutet, dass wir die Voraussetzungen der Gödel'schen Unvollständigkeitssätze noch weiter abschwächen können. Die Sätze greifen für alle formalen Systeme, die stark genug sind, um die Robinson-Arithmetik zu formalisieren.

Missverständnis 3:

„Der erste Gödel'sche Unvollständigkeitssatz steht im Widerspruch zu Gödels Vollständigkeitssatz."

Wird der erste Unvollständigkeitssatz im Widerspruch zu Gödels erstem Unvollständigkeitssatz gesehen, so geht dies fast immer auf die nachlässige Verwendung der beteiligten Begriffe zurück. Auf die Schnelle betrachtet garantiert der Gödel'sche Vollständigkeitssatz den Zusammenhang $\vdash \varphi \Leftrightarrow \models \varphi$, während uns der erste Unvollständigkeitssatz attestiert, dass die Relationen ‚$\vdash$' und ‚$\models$' niemals in Einklang gebracht werden können.

Der Widerspruch löst sich auf, wenn wir uns daran erinnern, wie das Symbol ‚$\models$' jeweils zu lesen ist. Im Kontext des Vollständigkeitssatzes besagt $\models \varphi$, dass φ *allgemeingültig* ist, d. h., die Formel ist unter allen möglichen Interpretationen wahr. Im Kontext des Unvollständigkeitssatzes drückt $\models \varphi$ dagegen aus, dass φ unter einer ganz bestimmten Interpretation wahr ist. Im Fall der Peano-Arithmetik ist dies jene, die als Grundmenge die natürlichen Zahlen umfasst und die Symbole ‚+', ‚×' und ‚s' als die Addition, die Multiplikation und die Nachfolgerfunktion interpretiert. Ferner gilt es zu beachten, dass der Gödel'sche Vollständigkeitssatz ausschließlich eine Aussage über die Prädikatenlogik erster Stufe tätigt und in der Prädikatenlogik zweiter Stufe seine Gültigkeit verliert. Der erste Gödel'sche Unvollständigkeitssatz gilt dagegen in allen formalen Systemen, die stark genug sind, um die Peano-Arithmetik zu formalisieren, und damit z. B. auch in der Prädikatenlogik zweiter Stufe. Spätestens jetzt wird klar, dass die inhaltlichen Aussagen der beiden Sätze völlig andere sind und neben den ähnlich klingenden Namen keine tiefer gehenden Gemeinsamkeiten bestehen.

Missverständnis 4:

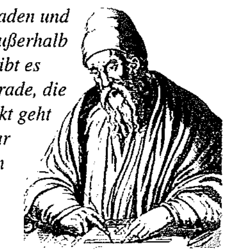
„Die Existenz unentscheidbarer Sätze beruht auf der Unzulänglichkeit der Axiome, die Eigenschaften der beschriebenen Objekte eindeutig zu charakterisieren. Unentscheidbare Sätze entstehen nur deshalb, weil die Axiome mehr als eine konsistente Interpretation zulassen."

Es ist ein bekanntes Ergebnis der euklidischen Geometrie, dass sich das *Parallelenpostulat* (Abbildung 4.13) nicht aus den anderen Axiomen ableiten lässt, genauso wenig wie seine Negation. Tatsächlich ist das Parallelenpostulat unentscheidbar, weil die anderen euklidischen Axiome mehrere konsistente Interpretationen besitzen. Eine davon ist die Geometrie der Ebene; sie ist gewissermaßen die Standardinterpretation der euklidischen Geometrie, und hier ist das Parallelenpostulat ein wahrer Satz. Daneben existieren andere Interpretationen, wie die *elliptische* oder die *hyperbolische Geometrie*, die ebenfalls im Einklang mit den anderen euklidischen Axiomen stehen. In diesen *nichteuklidischen Geometrien* ist das Parallelenpostulat eine falsche Aussage.

Existieren für die Axiome eines korrekten formalen Systems mehrere konsistente, nichtisomorphe Interpretationen, so müssen zwangsläufig unentscheidbare Sätze existieren. Es ist wichtig, das von Gödel entdeckte Unvollständigkeitsphänomen nicht mit dieser Art der Unvollständigkeit zu verwechseln oder gar gleichzusetzen. Die Unentscheidbarkeit des Parallelenpostulats rührt daher, dass die anderen Axiome zu schwach sind, um die geometrischen Objekte, die wir im Sinn haben, eindeutig zu charakterisieren. Der entstehende Interpretationsspielraum sorgt dann für die Existenz unentscheidbarer Sätze.

Die Gödel'sche Unvollständigkeit ist viel tiefer gehend. Wir treffen sie auch in formalen Systemen an, die nur eine einzige konsistente Interpretation zulassen. Ein Beispiel eines solches Systems ist die Peano-Arithmetik, formuliert in der Prädikatenlogik zweiter Stufe. Hier besagt der Isomorphiesatz von Dedekind, dass alle Modelle isomorph zum Standardmodell sind, und auch in diesem System existieren unentscheidbare Sätze.

„Zu einer Geraden und einem Punkt außerhalb der Geraden gibt es genau eine Gerade, die durch den Punkt geht und parallel zur ersten Geraden ist."



Euklid von Alexandria (ca. 365 v. Chr. – ca. 300 v. Chr.)

Abbildung 4.13: Das Parallelenpostulat

Missverständnis 5:

„Unvollständige formale Systeme lassen sich vervollständigen, indem für jede unentscheidbare Formel entweder die Formel selbst oder deren Negation als Axiom hinzugefügt wird."

Gödel hat gezeigt, dass für jeden Kalkül, der die Voraussetzungen des ersten Unvollständigkeitssatzes erfüllt, eine Formel $\varphi_g(\overline{g})$ konstruiert werden kann, die unentscheidbar ist. Für diese Formel gilt, dass weder sie selbst noch ihre Negation aus den Axiomen abgeleitet werden kann, und somit können wir eine davon widerspruchsfrei zu den Axiomen hinzufügen. Auf diese Weise, so scheint es, lässt sich das Gödel'sche Leck schließen und der Kalkül systematisch vervollständigen.

Der zweite Blick macht deutlich, dass dieser Ansatz ins Leere laufen muss. Sobald wir die Axiomenmenge erweitert haben, können wir die Gödel'sche Konstruktion abermals anwenden und erhalten als Ergebnis eine Formel $\varphi_{g'}(\overline{g'})$, die von $\varphi_g(\overline{g})$ verschieden ist und innerhalb des neuen Systems unentscheidbar ist. Aber wie kann es sein, dass wir beim zweiten Mal eine andere Formel erhalten? Der Grund ist dieser: Da wir dem Kalkül ein neues Axiom hinzugefügt haben, ändern sich die Gödelnummern aller Formeln, die in der Konstruktion des Gödel'schen Diagonalelements eine Rolle spielen, und damit auch das Diagonalelement selbst. Es gibt an dieser Stelle kein Entrinnen: Formale Systeme, die ausdrucksstark genug sind, um die Peano-Arithmetik zu formalisieren, lassen sich nicht vervollständigen.

Missverständnis 6:

„Es ist eine Konsequenz des zweiten Unvollständigkeitssatzes, dass die Widerspruchsfreiheit der Peano-Arithmetik unbeweisbar ist."

Der zweite Unvollständigkeitssatz besagt, dass ein formales System, das stark genug ist, um die Peano-Arithmetik zu formalisieren, seine *eigene* Widerspruchsfreiheit nicht beweisen kann. Daraus folgt, dass ein solches System erst recht nicht in der Lage ist, die Widerspruchsfreiheit eines ausdrucksstärkeren Systems zu beweisen. Kurzum: Innerhalb von PA ist die Widerspruchsfreiheit von PA genauso wenig beweisbar, wie die Widerspruchsfreiheit von ZF oder ZFC.

Es ist falsch, die geschilderte Schlussrichtung umzukehren. Der zweite Unvollständigkeitssatz schließt keinesfalls aus, dass die Widerspruchsfreiheit eines formalen Systems in einem ausdrucksstärkeren System bewiesen werden kann. Es könnte also tatsächlich möglich sein, die Widerspruchsfreiheit von PA innerhalb von ZF oder ZFC zu zeigen. Dass dies tatsächlich gelingt, hat der deutsche Mathematiker Gerhard Gentzen im Jahr 1936 demonstriert [61]. Er codierte die Beweise der Peano-Arithmetik so geschickt als Ordinalzahlen, dass sich mit dem Prinzip der transfiniten Induktion die Widerspruchsfreiheit beweisen lässt. Gentzens Ergebnis widerspricht dem zweiten Unvollständigkeitssatz in keinem Wort. Mit der transfiniten Induktion hat er auf ein mengentheoretisches Mittel zurückgegriffen, das in PA nicht zur Verfügung steht. Das bedeutet, dass sich Gentzens Beweis innerhalb von ZF oder ZFC, nicht aber in PA formalisieren lässt.

4.5 Der Satz von Goodstein

Im Jahr 1944 bewies der englische Mathematiker Reuben Louis Goodstein einen Satz, der die volle Tragweite des Gödel'schen Unvollständigkeitsphänomens zum Vorschein bringt. Auf den ersten Blick wirkt der *Satz von Goodstein* wie ein gewöhnliches Theorem der Zahlentheorie; er macht eine Aussage über den Werteverlauf spezieller Zahlenfolgen, die wir heute als *Goodstein-Folgen* bezeichnen, und lässt sich mit den Mitteln der Ordinalzahltheorie aus Abschnitt 3.2.2 vergleichsweise einfach beweisen.

Was den Satz von Goodstein so außergewöhnlich macht, ist die Tatsache, dass er genau wie die Gödel'sche Formel $\varphi_g(\overline{g})$ oder die Rosser'sche Formel $\varphi_r(\overline{r})$ innerhalb der Peano-Arithmetik unentscheidbar ist. Das bedeutet, dass weder der Satz selbst noch seine Negation aus den Axiomen hergeleitet werden kann, wenn die Peano-Arithmetik frei von Widersprüchen ist. Dies ist das erstaunliche Ergebnis einer Arbeit von Laurie Kirby und Jeff Paris aus dem Jahr 1982 [101]. Im Gegensatz zu den künstlich konstruierten Formeln von Gödel und Rosser ist der Satz von Goodstein aber alles andere als ein Kunstprodukt: Er ist ein gewöhnlicher Satz der Zahlentheorie und im Gegensatz zu $\varphi_g(\overline{g})$ und $\varphi_r(\overline{r})$ gänzlich frei von inhaltlichen Selbstbezügen.

Um den Satz von Goodstein zu verstehen, benötigen wir ein wenig Grundwissen über die Darstellung natürlicher Zahlen. Zunächst halten wir fest, dass sich jede natürliche Zahl x in der Form

$$x = a_n \cdot b^n + a_{n-1} \cdot b^{n-1} + a_{n-2} \cdot b^{n-2} + \ldots + a_1 b + a_0 \qquad (4.31)$$

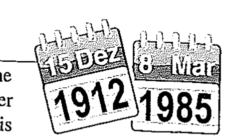
schreiben lässt mit $a_0, \ldots, a_n \geq 0$. b wird als *Basis* bezeichnet und ist eine beliebige natürliche Zahl größer 1. Fordern wir zusätzlich für alle i die Beziehung $a_i < b$, so sind die Ziffern $a_0, \ldots, a_n$ eindeutig bestimmt, und wir nennen (4.31) die *b-adische Darstellung* von x.

Für $b = 2$ und $x = 36$ erhalten wir z. B. das Ergebnis

$$36 = 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^2$$

Was wir für die Konstruktion der Goodstein-Folge benötigen, ist eine Repräsentation von x, die wir als *expandierte b-adische Darstellung* bezeichnen. Sie entsteht, indem die Exponenten in (4.31) rekursiv durch ihre eigene b-adische Darstellung ersetzt werden. Für die Zahl 36 liest sich die expandierte Darstellung zur Basis 2 wie folgt:

$$36 = 1 \cdot 2^{2^2+1} + 1 \cdot 2^2$$



Der englische Mathematiker Reuben Louis Goodstein wurde am 15. Dezembe 1912 in London geboren. Von der do ansässigen St. Paul's School wechselte e 1931 an die renommierte University o Cambridge. Das Studium der Mathemati absolvierte Goodstein mit Bravour. Sein nächste Station war eine Lecturer-Posi tion an der University of Reading. Dor setzte er auch seine eigenen Forschungs vorhaben fort, für die er 1947 von de University of London mit der Doktorwür de ausgezeichnet wurde. 1948 folgte e einem Ruf an die University of Leicester wo er bis zu seiner Pensionierung im Jah 1977 als Professor lehrte und forschte.
Goodstein engagierte sich zeitlebens ir der Lehre und galt als hervorragender Didaktiker. Heute wird sein Name vor allem mit dem *Satz von Goodstein* verbunden, dem bekanntesten Beispiel dessen, was wir in der mathematischen Logik als *natürliches Unabhängigkeitsphänomen* bezeichnen (*natural independence phenomenon*). Grob gesprochen zählen hierzu alle gewöhnlichen Sätze der Mathematik, die sich genau wie die künstlich konstruierten Formeln von Gödel und Rosser der Beweisbarkeit in PA entziehen.
Weniger bekannt ist, dass Goodstein der Schöpfer eines bekannten Begriffsschemas ist, das häufig verwendet wird, um Operationen jenseits der Potenzierung zu benennen. Die iterierte Potenzierung, die gern auch als Hyper-Exponentiation oder Super-Potenzierung bezeichnet wird, heißt bei Goodstein *Tetration*. Danach folgen, in der Reihenfolge der griechischen Vorsilben, die *Pentation*, die *Hexation*, die *Heptation*, die *Octation* und so fort.
Reuben Goodstein starb in Leicester am 8. März 1985 im Alter von 72 Jahren.

$$
\begin{aligned}
g_0(36) &= 36 \\
&= 2^{2^2+1}+2^2
\end{aligned}
$$

$$g_1(36) := S_3^2(g_0(36)) - 1$$

$$
\begin{aligned}
g_1(36) &= \left(3^{3^3+1}+3^3\right)-1 \\
&= 3^{3^3+1}+2\cdot 3^2+2\cdot 3+2
\end{aligned}
$$

$$g_1(36) := S_4^3(g_1(36)) - 1$$

$$
\begin{aligned}
g_2(36) &= \left(4^{4^4+1}+2\cdot 4^2+2\cdot 4+2\right)-1 \\
&= 4^{4^4+1}+2\cdot 4^2+2\cdot 4+1
\end{aligned}
$$

$$g_1(36) := S_5^4(g_2(36)) - 1$$

$$
\begin{aligned}
g_3(36) &= \left(5^{5^5+1}+2\cdot 5^2+2\cdot 5+1\right)-1 \\
&= 5^{5^5+1}+2\cdot 5^2+2\cdot 5
\end{aligned}
$$

Abbildung 4.14: Die ersten vier Elemente der Goodstein-Folge für den Startwert 36

Ferner benötigen wir eine spezielle *Substitutionsfunktion*, die Goodstein in seiner Originalarbeit mit $S_c^b(x)$ bezeichnet. Für eine natürliche Zahl x wird $S_c^b(x)$ berechnet, indem x zunächst in die expandierte b-adische Darstellung gebracht wird und anschließend alle Basen durch c ausgetauscht werden. Beispielsweise ergibt $S_3^2(36)$ die Zahl

$$S_3^2(36) = S_3^2(2^{2^2+1}+2^2) = 3^{3^3+1}+3^3 = 22876792454988 \quad (4.32)$$

Jetzt besitzen wir das nötige Instrumentarium, um Goodstein-Folgen formal zu beschreiben. Zunächst halten wir fest, dass für jede natürliche Zahl x eine separate Goodstein-Folge existiert, deren Elemente wir folgendermaßen notieren:

$$g_0(x), g_1(x), g_2(x), g_3(x), \ldots$$

x ist der Startwert der Folge, d. h., es gilt $g_0(x) = x$. Für die Berechnung von g_1 übersetzen wir g_0 zunächst in seine b-adische Darstellung mit $b = 2$. Anschließend ersetzen wir die Basis b, wie in Abbildung 4.14 gezeigt, durch $b+1$ und erniedrigen das Ergebnis um 1. Die Berechnung der weiteren Folgenelemente funktioniert nach dem gleichen Schema. In jedem Schritt wird die Basis um 1 erhöht (*base bumping*) und das Ergebnis anschließend um 1 erniedrigt:

$$g_{n+1}(x) = \begin{cases} S_{n+3}^{n+2}(g_n(x)) - 1 & \text{falls} \quad g_n(x) > 0 \\ 0 & \text{falls} \quad g_n(x) = 0 \end{cases}$$

Startwert 1	Startwert 2	Startwert 3	Startwert 4	Startwert 5	Startwert 6
$g_0(1) = 1$	$g_0(2) = 2$	$g_0(3) = 3$	$g_0(4) = 4$	$g_0(5) = 5$	$g_0(6) = 6$
$g_1(1) = 0$	$g_1(2) = 2$	$g_1(3) = 3$	$g_1(4) = 26$	$g_1(5) = 27$	$g_1(6) = 29$
$g_2(1) = 0$	$g_2(2) = 1$	$g_2(3) = 3$	$g_2(4) = 41$	$g_2(5) = 255$	$g_2(6) = 257$
$g_3(1) = 0$	$g_3(2) = 0$	$g_3(3) = 2$	$g_3(4) = 60$	$g_3(5) = 467$	$g_3(6) = 3125$
$g_4(1) = 0$	$g_4(2) = 0$	$g_4(3) = 1$	$g_4(4) = 83$	$g_4(5) = 775$	$g_4(6) = 46655$
$g_5(1) = 0$	$g_5(2) = 0$	$g_5(3) = 0$	$g_5(4) = 109$	$g_5(5) = 1197$	$g_5(6) = 98039$
$g_6(1) = 0$	$g_6(2) = 0$	$g_6(3) = 0$	$g_6(4) = 139$	$g_6(5) = 1751$	$g_6(6) = 187243$
$g_7(1) = 0$	$g_7(2) = 0$	$g_7(3) = 0$	$g_7(4) = 173$	$g_7(5) = 2454$	$g_7(6) = 332147$
$g_8(1) = 0$	$g_8(2) = 0$	$g_8(3) = 0$	$g_8(4) = 211$	$g_8(5) = 3325$	$g_8(6) = 555551$
$g_9(1) = 0$	$g_9(2) = 0$	$g_9(3) = 0$	$g_9(4) = 253$	$g_9(5) = 4382$	$g_9(6) = 885775$
$g_{10}(1) = 0$	$g_{10}(2) = 0$	$g_{10}(3) = 0$	$g_{10}(4) = 299$	$g_{10}(5) = 5643$	$g_{10}(6) = 1357259$
$g_{11}(1) = 0$	$g_{11}(2) = 0$	$g_{11}(3) = 0$	$g_{11}(4) = 348$	$g_{11}(5) = 7126$	$g_{11}(6) = 2011162$
...	...	...	...	...	...

Abbildung 4.15: Entwicklung der Goodstein-Folge für die Startwerte 1 bis 6

Wie wahrscheinlich ist es, dass eine Goodstein-Folge den Wert 0 erreicht? In Abbildung 4.14 konnten wir beobachten, dass die Folgenelemente durch die fortwährende Erhöhung der Basis so rasant anwachsen, dass wir bereits nach wenigen Schritten kaum noch in der Lage sind, sie in Dezimalschreibweise zu notieren. Die Beispiele in Abbildung 4.15 zeigen zudem, dass wir dieses Phänomen schon für kleine Startwerte beobachten können. Ab $x = 4$ scheinen Goodstein-Folgen mit aller Macht gegen Unendlich zu streben, und die Vergrößerung des Startwerts befeuert den rasanten Anstieg zusätzlich.

Damit ist es an der Zeit, den Satz von Goodstein zu formulieren. Im Angesicht der betrachteten Beispiele offenbart er Erstaunliches:

Satz 4.9 (Goodstein, 1944)

Jede Goodstein-Folge erreicht irgendwann den Wert 0.

Abbildung 4.16 zeigt, wann die ersten vier Goodstein-Folgen den Wert 0 erreichen. Die ersten drei Folgen tun dies sehr rasch. Für den Startwert 4 steigt die Folge erst einmal für lange Zeit an und erreicht bei

$$i = \frac{1}{4} 24 \cdot 2^{24} 2^{24 \cdot 2^{24}} - 3 \approx 1{,}72 \cdot 10^{121210694}$$

ihr Maximum [6, 147]. Danach bleibt sie lange konstant und tritt anschließend in eine kontinuierliche Abstiegsphase ein. Den Wert 0 erreicht die Folge bei

$$i = 24 \cdot 2^{24} 2^{24 \cdot 2^{24}} - 3 \approx 6{,}89 \cdot 10^{121210694}$$

Diese Zahl sprengt unsere intuitive Vorstellung bei Weitem; sie entspricht einer Dezimalzahl mit mehr als 121 Millionen Ziffern!

Dass jede Goodstein-Folge irgendwann den Wert 0 erreicht, ist schon für sich allein gesehen ein faszinierendes Ergebnis. Noch erstaunlicher ist aber, dass sich der Satz von Goodstein vergleichsweise einfach mit den Mitteln der Ordinalzahltheorie aus Abschnitt 3.2.2 beweisen lässt. Wie dies genau funktioniert, wollen wir uns nun ansehen. Im Kern basiert der Beweis auf der Idee, eine Goodstein-Folge nach dem folgenden Schema in eine Parallelfolge von Ordinalzahlen zu übersetzen:

$$g'_n(x) = S_\omega^{n+2}(g_n(x))$$

Abbildung 4.17 demonstriert, wie wir die Folge konstruieren können. Zunächst schreiben wir die Elemente einer Goodstein-Folge in expandierter b-adischer Darstellung auf und ersetzen anschließend alle Basen durch die Ordinalzahl ω.

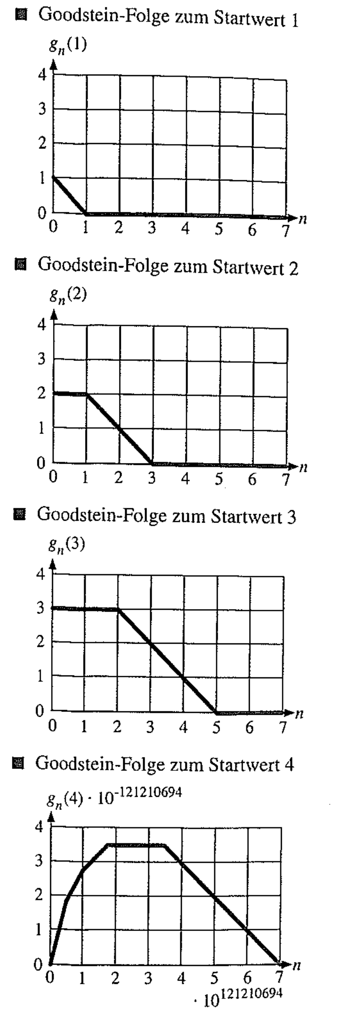


Abbildung 4.16: Werteverläufe der ersten vier Goodstein-Folgen

Abbildung 4.17: Jede Goodstein-Folge lässt sich in eine Parallelfolge von Ordinalzahlen übersetzen, die so lange streng monoton fällt, bis die Goodstein-Folge den Wert 0 erreicht. Wäre Satz 4.9 falsch, so gäbe es eine Goodstein-Folge, deren Elemente allesamt von 0 verschieden sind, und damit gäbe es auch eine unendlich absteigende Folge von Ordinalzahlen. Wir wissen aber bereits, dass eine solche Folge nicht existieren kann.

$$
\begin{array}{ccc}
2^{2^2+1}+2^2 & \xrightarrow{\text{Transformation}} & \omega^{\omega^\omega+1}+\omega^\omega \\
\Downarrow & & \Downarrow \\
3^{3^3+1}+2\cdot 3^2+2\cdot 3+2 & \xrightarrow{\text{Transformation}} & \omega^{\omega^\omega+1}+2\cdot\omega^2+2\cdot\omega+2 \\
\Downarrow & & \Downarrow \\
4^{4^4+1}+2\cdot 4^2+2\cdot 4+1 & \xrightarrow{\text{Transformation}} & \omega^{\omega^\omega+1}+2\cdot\omega^2+2\cdot\omega+1 \\
\Downarrow & & \Downarrow \\
5^{5^5+1}+2\cdot 5^2+2\cdot 5 & \xrightarrow{\text{Transformation}} & \omega^{\omega^\omega+1}+2\cdot\omega^2+2\cdot\omega \\
\Downarrow & & \Downarrow \\
\ldots & & \ldots
\end{array}
$$

Für die weitere Argumentation ist die Monotonieeigenschaft der Substitution S^k_ω von Bedeutung. Diese besagt, dass die Größenverhältnisse zweier Zahlen durch die Substitution unangetastet bleibt:

$$x < y \;\Rightarrow\; S^k_\omega(x) < S^k_\omega(y) \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N} \tag{4.33}$$

Jetzt können wir die Elemente $g'_n(x)$ für alle n mit $g_n(x) > 0$ nach oben abschätzen:

$$
\begin{aligned}
g'_{n+1}(x) &= S^{n+3}_\omega(g_{n+1}(x)) \\
&= S^{n+3}_\omega(S^{n+2}_{n+3}(g_n(x)) - 1) \\
&< S^{n+3}_\omega(S^{n+2}_{n+3}(g_n(x))) \qquad \text{wegen (4.33)} \\
&= S^{n+2}_\omega(g_n(x)) \\
&= g'_n(x)
\end{aligned}
$$

Voilà: Die konstruierte Parallelfolge ist streng monoton fallend. Das bedeutet, dass sich aus jeder Goodstein-Folge, deren Elemente alle von 0 verschieden sind, eine unendlich absteigende Folge von Ordinalzahlen konstruieren lässt. Aus Kapitel 3 wissen wir aber bereits, dass eine solche Folge nicht existieren kann. Das bedeutet im Umkehrschluss, dass jede Goodstein-Folge tatsächlich irgendwann den Wert 0 erreicht.

Mithilfe der Ordinalzahltheorie war es für uns vergleichsweise einfach, den Satz von Goodstein als wahr zu identifizieren. Die eigentlich interessante Frage ist natürlich eine andere: Warum lässt sich das Goodstein-Theorem innerhalb der Peano-Arithmetik formulieren, aber nicht innerhalb der Peano-Arithmetik beweisen? Wie kann es sein, dass wir auf Beweismittel zurückgreifen müssen, die *außerhalb* der Theorie liegen, in der sich das Theorem formulieren lässt?

Zu allererst wollen wir uns klar machen, dass die Peano-Arithmetik tatsächlich stark genug ist, um über den Satz von Goodstein zu sprechen.

Zu diesem Zweck bringen wir die *Goodstein-Funktion* $\mathfrak{G} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ins Spiel, die wie folgt definiert ist:

$$\mathfrak{G}(x) := \min\{n \mid g_n(x) = 0\}$$

In Worten ausgedrückt, gibt der Funktionswert $\mathfrak{G}(x)$ an, nach wie vielen Schritten die Goodstein-Folge mit dem Startwert x die Nulllinie erreicht. Abbildung 4.18 zeigt auf grafische Weise, wie sich die Funktionswerte $\mathfrak{G}(x)$ für die ersten vier Goodstein-Folgen berechnen lassen.

Als nächstes codieren wir die Goodstein-Funktion mithilfe einer arithmetischen Formel $\varphi_\mathfrak{G}$ mit zwei freien Variablen x und y. Diese Formel erfüllt die folgende Beziehung:

$$\models \varphi_\mathfrak{G}(\bar{x},\bar{y}) \;\Leftrightarrow\; \mathfrak{G}(x) = y$$

Dass sich eine Formel mit dieser Eigenschaft tatsächlich konstruieren lässt, ist ein Ergebnis, das wir in Kapitel 5 herausarbeiten werden. Dort werden wir zeigen, wie sich Turing-Maschinen arithmetisieren lassen, und damit werden wir implizit den Beweis erbringen, dass sich jede Funktion, die mit einem systematischen Verfahren berechnet werden kann, innerhalb der Peano-Arithmetik repräsentieren lässt. Auch wenn wir im Moment nur eine vage Vorstellung davon haben, was der Begriff des systematischen Verfahrens genau bedeutet, können wir die Goodstein-Funktion bereits jetzt als berechenbar identifizieren. Wir wissen ja schon, dass jede Goodstein-Folge irgendwann den Wert 0 erreicht. Damit können wir den Funktionswert $\mathfrak{G}(x)$ systematisch ermitteln, indem wir die Folgenelemente so lange eines nach dem anderen ausrechnen, bis sich der Wert 0 einstellt.

Als nächstes werden wir eine Beziehung zwischen der Goodstein-Funktion $\mathfrak{G}(x)$ und dem Satz von Goodstein herstellen. Inhaltlich ist der Satz äquivalent zu der Aussage, die Funktion $\mathfrak{G}(x)$ sei für alle *n definiert*, und dies ist wiederum äquivalent zu der Behauptung, die Goodstein-Funktion sei *total*. Wenn wir davon sprechen, die Totalität von $\varphi_\mathfrak{G}(x)$ in PA zu beweisen, so meinen wir damit, das folgende Theorem herzuleiten:

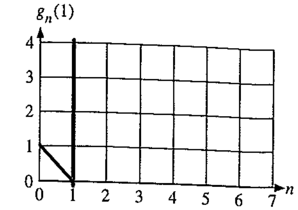
$$\vdash \forall x\, \exists y\; \varphi_\mathfrak{G}(x,y) \tag{4.34}$$

Für Formeln dieser Bauart greift ein starkes Resultat, das auf Georg Kreisel zurückgeht:

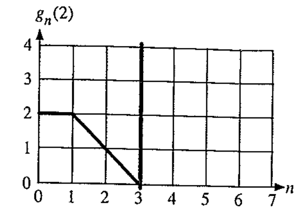
Satz 4.10 (Kreisel, 1952)

Lässt sich die Totalität einer berechenbaren Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ innerhalb der Peano-Arithmetik beweisen, so existiert eine Funktion f_α mit $\alpha < \varepsilon_0$, die f dominiert.

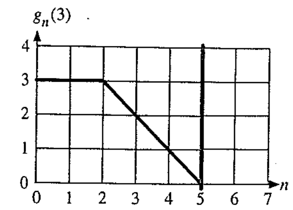
■ $\mathfrak{G}(1) = 1$



■ $\mathfrak{G}(2) = 3$



■ $\mathfrak{G}(3) = 5$



■ $\mathfrak{G}(4) = 24\cdot 2^{24}2^{24\cdot 2^{24}} - 3$

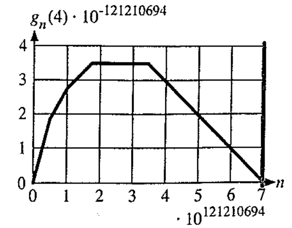


Abbildung 4.18: Die ersten vier Funktionswerte der *Goodstein-Funktion* $\mathfrak{G}$

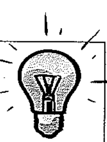
- Ackermann-Funktion

$$\mathfrak{A}(0,n) := 2\cdot n+1$$
$$\mathfrak{A}(m+1,0) := \mathfrak{A}(m,1)$$
$$\mathfrak{A}(m+1,n+1) := \mathfrak{A}(m,\mathfrak{A}(m+1,n))$$

- Funktionenhierarchie

$$\vdots$$
$$\mathfrak{A}_3(n) := \mathfrak{A}(3,n) = O(2\uparrow\uparrow\uparrow n)$$
$$\mathfrak{A}_2(n) := \mathfrak{A}(2,n) = O(2\uparrow\uparrow n)$$
$$\mathfrak{A}_1(n) := \mathfrak{A}(1,n) = O(2^n)$$
$$\mathfrak{A}_0(n) := \mathfrak{A}(0,n) = O(n)$$

Abbildung 4.19: Aus der Ackermann-Funktion abgeleitete Operatorenhierarchie



Die in Abb. 4.19 verwendete Notation $2\uparrow^k n$ geht auf den US-amerikanischen Informatiker Donald E. Knuth zurück [105]. 1976 schlug er diese *Pfeilnotation* als Lösung für ein lange bestehendes Problem der klassischen Mathematik vor, für Funktionen jenseits der Exponentiation keine eigene Symbolik zu kennen. Formal ist $m\uparrow^k n$ wie folgt definiert:

$$m\uparrow^k n := \begin{cases} a^b & \text{falls } k=1 \\ 1 & \text{falls } n=0 \\ m\uparrow^{k-1}(m\uparrow^k(n-1)) & \text{sonst} \end{cases}$$

Mit der 1976 geschaffenen Notation hat Knuth den Weg geebnet, um Funktionen verschiedener Grade nach einem einheitlichen Schema zu benennen. Die am langsamsten wachsende Funktion, die mit der Pfeilnotation dargestellt werden kann, ist die Potenzierung ($m\uparrow n$). Danach folgt mit ($m\uparrow\uparrow n$) die Tetration und so fort.

Im Mittelpunkt dieses Satzes steht eine *Dominanzaussage*. Hier bezieht sich Kreisel auf eine Hierarchie schnell wachsender Funktionen, die auf Stanley Wainer und Martin Löb zurückgeht [111, 185]. Auch wenn die Hierarchie im Detail komplex ist, folgt sie der einfachen Grundidee, Funktionen anhand ihrer Wachstumsrate zu ordnen. Dies ist ein gängiges Vorgehen in der Mathematik, und solange wir den Bereich der „gewöhnlichen" Funktionen nicht verlassen, auch nicht weiter schwer. Beispielsweise bildet die Folge

$$n, 2\cdot n, 3\cdot n, \ldots, n^2, n^3, \ldots, 2^n, 3^n, \ldots, 2^{2^n}, 2^{2^{2^n}}, \ldots \tag{4.35}$$

eine natürliche Hierarchie immer schneller wachsender Funktionen. Komplizierter wird es, wenn wir versuchen, Funktionen in eine solche Hierarchie zu integrieren, die noch viel schneller wachsen. Ein Beispiel hierfür ist die *Ackermann-Funktion* $\mathfrak{A}(m,n)$, die wir auf Seite 208 bereits kennen gelernt haben. Ihre Definition sieht auf den ersten Blick harmlos aus, und dennoch können wir den Funktionswert $\mathfrak{A}(m,n)$ bereits für kleine Werte von m praktisch nicht mehr ausrechnen. Warum dies so ist, wird klar, wenn wir den Parameter m für verschiedene Werte konstant halten. Auf diese Weise entsteht aus $\mathfrak{A}(m,n)$ für jede Zahl $m\in\mathbb{N}$ eine separate Funktion $\mathfrak{A}_m(n)$, deren Wachstumsverhalten in Abbildung 4.19 dargestellt ist. Die Funktion $\mathfrak{A}_0(n)$ wächst linear, $\mathfrak{A}_1(n)$ exponentiell, $\mathfrak{A}_2(n)$ hyper-exponentiell und so fort. Damit entpuppt sich die Ackermann-Funktion als eine Art Universalfunktion, die eine unendliche Schar immer schneller wachsender Funktionen in sich vereint.

Noch schneller wächst die *Diagonalfunktion*

$$\mathfrak{A}_\omega(n) := \mathfrak{A}_n(n)$$

Für jeden Wert von m wird $\mathfrak{A}_\omega(n)$ ab einem gewissen n größer sein als $\mathfrak{A}_m(n)$. Wir sagen: $\mathfrak{A}_m$ wird durch $\mathfrak{A}_\omega$ dominiert. Dass wir als Index dieser Funktion die Ordinalzahl ω gewählt haben, ist naheliegend, schließlich können wir $\mathfrak{A}_\omega$ in der gleichen Weise als Grenzfunktion ansehen, wie wir ω als Limit-Ordinalzahl für die natürlichen Zahlen definiert haben.

Ganz ähnlich sind auch Wainer und Löb vorgegangen. Die Löb-Wainer-Hierarchie wird durch eine Folge von Funktionen f_α mit einem ordinalen Index α gebildet. Die Funktionen f_0 und f_1 wachsen linear, f_2 wächst bereits exponentiell, und für die Niederschrift für f_3 müssten wir auf Exponentialtürme zurückgreifen, wie wir sie in Abschnitt 3.2.2.2 für die Konstruktion von Ordinalzahlen verwendet haben.

Mithilfe der Löb-Wainer-Hierarchie sind wir in der Lage, das rasante Wachstumsverhalten der diagonalisierten Ackermann-Funktion quantitativ einzufangen: $\mathfrak{A}_\omega$ wächst mit der gleichen Geschwindigkeit wie die Funktion f_ω.

Jetzt ist auch klar, wie wir den Satz von Kreisel zu lesen haben. Wird eine berechenbare Funktion f durch eine arithmetische Formel φ_f beschrieben, so können wir innerhalb von PA nur dann auf einen Beweis für die Formel

$$\forall x\, \exists y\, \varphi_f(x,y)$$

hoffen, wenn f von einer Funktion f_α mit $\alpha < \varepsilon_0$ dominiert wird.

Damit ist es an der Zeit, das Wachstumsverhalten der Goodstein-Funktion näher zu beleuchten. Der eklatante Sprung von $\mathfrak{G}(3)$ auf $\mathfrak{G}(4)$ weckt bereits die Vermutung, dass wir es hier mit einer Wachstumsrate zu tun haben, die jene der diagonalisierten Ackermann-Funktion noch deutlich übersteigt. Dass wir heute sehr genau über das Wachstumsverhalten der Goodstein-Funktion Bescheid wissen, verdanken wir Laurie Kirby und Jeff Paris. Im Jahr 1982 führten sie als erste den Beweis, dass $\mathfrak{G}(x)$ genauso schnell wächst wie die Funktion f_{ε_0} aus der Löb-Wainer-Hierarchie [101]. Das bedeutet im Umkehrschluss, dass $\mathfrak{G}$ jede Funktion f_α mit $\alpha < \varepsilon_0$ dominiert, und damit folgt aus dem Satz von Kreisel, dass es unmöglich ist, Formel (4.34) innerhalb der Peano-Arithmetik zu beweisen. Aus der Äquivalenz des Satzes von Goodstein und der Totalität von $\mathfrak{G}(x)$ folgt jetzt sofort das gesuchte Ergebnis:

Satz 4.11 (Kirby, Paris, 1982)

> Der Satz von Goodstein ist innerhalb von PA unbeweisbar.

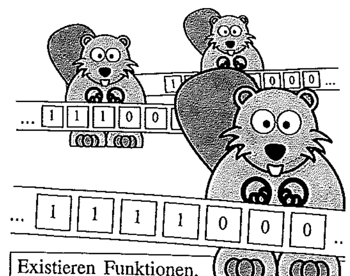
Ein interessanter Aspekt soll an dieser Stelle nicht unerwähnt bleiben. Auch wenn es nicht möglich ist, Formel (4.34) in PA herzuleiten, so können wir für jeden konkreten Wert von x durchaus beweisen, dass die Funktion $\mathfrak{G}$ an der Stelle x definiert ist. Das bedeutet, dass wir

$$\vdash \exists y\, \varphi_{\mathfrak{G}}(\overline{x},y) \tag{4.36}$$

für alle x beweisen können. Gleichzeitig attestiert uns Satz 4.11:

$$\nvdash \forall x\, \exists y\, \varphi_{\mathfrak{G}}(x,y) \tag{4.37}$$

Beide Varianten unterscheiden sich nur dadurch, dass die Quantifikation über x in (4.36) außerhalb des Kalküls und in (4.37) innerhalb des Kalküls vorgenommen wurde. Erneut wird deutlich, wie penibel wir zwischen der Kalkülebene ($\forall x$) und der Meta-Ebene (für alle x) unterscheiden müssen.



Existieren Funktionen, die schneller wachsen als die Goodstein-Funktion? Die Antwort ist Ja! Eine bekanntes Beispiel ist die Biber-Funktion $\mathfrak{B}(n)$ (*busy beaver function*), die der ungarische Mathematiker Tibor Radó 1962 im Rahmen eines Wettbewerbs formulierte [15, 144]. Das ausgerufene Ziel war es, eine Turing-Maschine (*busy beaver*) mit möglichst wenig Zuständen zu konstruieren, die möglichst viele Einsen auf ein leeres Band schreibt [15, 144]. Der Funktionswert $\mathfrak{B}(n)$ ist die maximal mögliche Anzahl Einsen für einen Biber mit n Zuständen. Da für jedes n nur endlich viele Biber existieren, ist der Wert der Biberfunktion für alle n wohldefiniert. Trotzdem sind die Funktionswerte nur bis $n=4$ exakt bekannt:

$\mathfrak{B}(1)$	$\mathfrak{B}(2)$	$\mathfrak{B}(3)$	$\mathfrak{B}(4)$	$\mathfrak{B}(5)$
1	4	6	13	≥ 4098

Auch wenn für $n \geq 5$ nur noch grobe Abschätzungen existieren, lassen sich beeindruckende Aussagen über die Wachstumsrate von $\mathfrak{B}(n)$ treffen. So lässt sich beweisen, dass die Biberfunktion stärker wachsen muss als jede berechenbare Funktion. Das bedeutet, dass $\mathfrak{B}(n)$ sowohl die Ackermann-Funktion als auch die Goodstein-Funktion dominiert. Die Biberfunktion selbst ist unberechenbar, d. h., es ist nicht möglich, ein Verfahren zu konstruieren, mit dem sich der Funktionswert $\mathfrak{B}(n)$ für alle n systematisch ermitteln lässt.