5) De Morgan und Schröder

Augustus De Morgan (1806–1878) hat zuerst das Problem der Relationen, d. h. der mehrstelligen Begriffe aufgegriffen. Sein bekanntestes Buch ist „Formal Logic" (1847). Seine Ideen zur Relationenlogik sind in dem 4. seiner Aufsätze in den *Cambridge Philosophical Transactions* enthalten, die 1846–62 erschienen. Dort studiert er konverse Relationen, Relationsprodukte und verschiedene Beziehungen zwischen ihnen, und diskutiert auch Quantifikationen über Relationen, allerdings unsystematisch und ohne so etwas wie ein Logiksystem anzugeben.

Ernst Schröder (1841–1902) ist mit seinem Buch „Der Operationskreis des Logikkalküls" (1877) der unmittelbare Vorgänger der BS. Im wesentlichen besteht seine Leistung darin, die von Boole und früheren Nachfolgern hinterlassenen Unklarheiten zu beseitigen, und einige kleine Neuerungen einzuführen. Eigenständig hat er Normalformen entwickelt, die Unabhängigkeit von Axiomen studiert und er hat auch als erster so etwas wie ein typentheoretisches Prinzip formuliert:

„... damit auch in der ursprünglichen Mannigfaltigkeit [dem *universe of discourse*] die Subsumption aufrecht erhalten werden kann, ist von vornherein erforderlich (und hinreichend), daß unter ihren als Individuen gegebenen Elementen sich keine *Klassen* befinden, welche ihrerseits Elemente derselben Mannigfaltigkeit als Individuen unter sich begreifen". (Schröder (1890–1905), Bd. I, S. 247 f.)

Subsumption und Klassenbegriff werden bei Schröder aber nicht präzise charakterisiert. Das Problem, das seine typenlogische Unterscheidung lösen soll, ergibt sich nur aus einer Verwechslung von ε und $\subset$. Darauf hat Frege in seiner „Kritischen Beleuchtung einer Punkte in E. Schröders Vorlesungen über die Algebra der Logik" (1895) hingewiesen; er hat den typentheoretischen Gedanken weder hier noch später akzeptiert. Schröder versuchte auch, die Boolesche Algebra durch Einbeziehung von Relationen zu erweitern, gab das aber bald auf, denn der Boolesche Rahmen ist dazu nicht geeignet: Die volle Prädikatenlogik ist wesentlich stärker als die monadische.

Was es also vor der BS an Logik gab war kurz zusammengefaßt: die Boolesche Klassenalgebra und erste Ansätze zu einer Relationenlogik.

3 Die Begriffsschrift

3.1 Zielsetzung der BS

Im Vorwort zur BS nennt Frege zunächst sein zentrales Ziel: eine logische Begründung der Arithmetik. Er unterscheidet analytische und empirische Sätze:

„Wir teilen danach alle Wahrheiten, die einer Begründung bedürfen, in zwei Arten, indem der Beweis bei den einen rein logisch vorgehen kann, bei den andern sich auf Erfahrungstatsachen stützen muß" (BS, S. IX.)[1]

und sagt dann:

„Indem ich mir nun die Frage vorlegte, zu welcher dieser beiden Arten die arithmetischen Urteile gehörten, mußte ich zunächst versuchen, wie weit man in der Arithmetik durch Schlüsse allein gelangen könnte, nur gestützt auf die Gesetze des Denkens, die über allen Besonderheiten erhaben sind. Der Gang war hierbei dieser, daß ich zuerst den Begriff der Anordnung in einer Reihe auf die logische Folge zurückzuführen suchte, um von hier aus zum Zahlbegriff fortzuschreiten. Damit sich hierbei nicht unbemerkt etwas Anschauliches eindrängen könnte, mußte Alles auf die Lückenlosigkeit der Schlußkette ankommen. Indem ich diese Forderung auf das strengste zu erfüllen trachtete, fand ich ein Hindernis in der Unzulänglichkeit der Sprache, die bei aller entstehenden Schwerfälligkeit des Ausdruckes doch, je verwikkelter die Beziehungen wurden, desto weniger die Genauigkeit erreichen ließ, welche mein Zweck verlangte. Aus diesem Bedürfnisse ging der Gedanke der vorliegenden Begriffsschrift hervor. Sie soll also zunächst dazu dienen, die Bündigkeit einer Schlußkette auf die sicherste Weise zu prüfen und jede Voraussetzung, die sich unbemerkt einschleichen will, anzuzeigen, damit letztere auf ihren Ursprung untersucht werden könne". (BS, S. X.)

[1] Frege scheint hier synthetische Aussagen apriori nicht in Betracht zu ziehen. Seine Unterscheidung in GLA, S. 3 f. (vgl. dazu unten 4.1) sind systematisch klarer.

In BSP sagt er dazu:

„Das Bedürfnis nach einer Begriffsschrift machte sich bei mir fühlbar, als ich nach den unbeweisbaren Grundsätzen oder Axiomen fragte, auf denen die ganze Mathematik beruht. Erst nach Beantwortung dieser Frage kann man mit Erfolg den Erkenntnisquellen nachzuspüren hoffen, aus denen diese Wissenschaft schöpft. Wenn diese letzte Frage nun auch mehr der Philosophie angehört, so muß man jene doch als mathematische anerkennen. Die Frage ist schon alt; denn schon Euklid scheint sie sich gestellt zu haben. Wenn sie trotzdem noch nicht genügend beantwortet ist, so ist der Grund in der logischen Unvollkommenheit unserer Sprachen zu sehen. Will man erproben, ob ein Verzeichnis von Axiomen vollständig sei, so muß man versuchen, aus ihnen alle Beweise des Zweiges der Wissenschaft zu führen, um den es sich handelt. Und hierbei muß man genau darauf achten, die Schlüsse nur nach rein logischen Gesetzen zu ziehen; denn sonst würde sich unmerklich etwas einmischen, was als Axiom hätte aufgestellt werden müssen. Der Grund, weshalb die Wortsprachen zu diesem Zwecke wenig geeignet sind, liegt nicht nur in der vorkommenden Vieldeutigkeit der Ausdrücke, sondern vor allem in dem Mangel fester Formen für das Schließen. Wörter wie ‚also', ‚folglich', ‚weil' deuten zwar darauf hin, daß geschlossen wird, sagen aber nichts über das Gesetz, nach dem geschlossen wird, und können ohne Sprachfehler auch gebraucht werden, wo gar kein logisch gerechtfertigter Schluß vorliegt. Bei einer Untersuchung, welche ich hier im Auge habe, kommt es aber nicht nur darauf an, daß man sich von der Wahrheit des Schlußsatzes überzeuge, womit man sich sonst in der Mathematik meistens begnügt; sondern man muß sich auch zum Bewußtsein bringen, wodurch diese Überzeugung gerechtfertigt ist, auf welchen Urgesetzen sie beruht. Dazu sind feste Geleise erforderlich, in denen sich das Schließen bewegen muß, und solche sind in den Wortsprachen nicht ausgebildet". (KS, S. 221.)[2]

Die Begriffsschrift soll also eine logische Kunstsprache sein, in der eine exakte Darstellung logischer Schlüsse möglich ist, und dazu ist eine eindeutige Formulierung der logischen Struktur der Sätze erforderlich. Zu ihrem Verhältnis zur natürlichen Sprache sagt Frege:

„Das Verhältnis meiner Begriffsschrift zu der Sprache des Lebens glaube ich am deutlichsten machen zu können, wenn ich es mit dem des Mikroskops zum Auge vergleiche. Das Letztere hat durch den Umfang seiner Anwendbarkeit, durch die Beweglichkeit, mit der es sich den verschiedensten Umständen anzuschmiegen weiß, eine große Überlegenheit vor dem Mikroskop. Als optischer Apparat betrachtet, zeigt es freilich viele Unvollkommenheiten,

2 Vgl. dazu auch BBS (in BS, S. 108 f.) und GGAI, S. VI ff. und S. 1.

die nur in Folge seiner innigen Verbindung mit dem geistigen Leben gewöhnlich unbeachtet bleiben. Sobald aber wissenschaftliche Zwecke große Anforderungen an die Schärfe der Unterscheidung stellen, zeigt sich das Auge als ungenügend. Das Mikroskop hingegen ist gerade solchen Zwecken auf das vollkommenste angepaßt, aber eben dadurch für alle andern unbrauchbar". (BS, S. XI.)[3]

Auf die Leistung der Sprache und der sprachlichen Zeichen im allgemeinen kommt Frege in BBS zu sprechen. Er betont dort, daß wir uns genauere Vorstellungen über die Welt erst mit der Sprache bilden können; Vorstellungen allein sind zu schwankend und von Erinnerung und Wahrnehmung abhängig:

„Wenn wir aber das Zeichen einer Vorstellung hervorbringen, an die wir durch eine Wahrnehmung erinnert werden, so schaffen wir damit einen neuen festen Mittelpunkt, um den sich Vorstellungen sammeln. Von diesen wählen wir wiederum eine aus, um ihr Zeichen hervorzubringen. So dringen wir Schritt für Schritt in die innere Welt unserer Vorstellungen ein und bewegen uns darin nach Belieben, indem wir das Sinnliche selbst benutzen, um uns von seinem Zwange zu befreien. Die Zeichen sind für das Denken von derselben Bedeutung wie für die Schiffahrt die Erfindung, den Wind zu gebrauchen, um gegen den Wind zu segeln. Deshalb verachte niemand die Zeichen! Von ihrer zweckmäßigen Wahl hängt nicht wenig ab. Ihr Wert wird auch dadurch nicht vermindert, daß wir nach langer Übung nicht mehr nötig haben, das Zeichen wirklich hervorzubringen, daß wir nicht mehr laut zu sprechen brauchen, um zu denken; denn in Worten denken wir trotzdem und, wenn nicht in Worten, doch in mathematischen oder andern Zeichen. Wir würden uns ohne Zeichen auch schwerlich zum begrifflichen Denken erheben. Indem wir nämlich verschiedenen aber ähnlichen Dingen dasselbe Zeichen geben, bezeichnen wir eigentlich nicht mehr das einzelne Ding, sondern das ihnen Gemeinsame, den Begriff. Und diesen gewinnen wir erst dadurch, daß wir ihn bezeichnen; denn da er an sich unanschaulich ist, bedarf er eines anschaulichen Vertreters, um uns erscheinen zu können. So erschließt uns das Sinnliche die Welt des Unsinnlichen. Hiermit sind die Verdienste der Zeichen nicht erschöpft. Es mag indessen genügen, ihre Unentbehrlichkeit darzutun. Die Sprache aber erweist sich als mangelhaft, wenn es sich darum handelt, das Denken vor Fehlern zu bewahren. Sie

3 In BBS vergleicht Frege die natürliche Sprache mit der Hand, die zu den verschiedensten Aufgaben geeignet ist, die Begriffsschrift mit einem Werkzeug, das auf spezielle Zwecke zugeschnitten ist. Vgl. BS, S. 110.

genügt schon der ersten Anforderung nicht, die man in dieser Hinsicht an sie stellen muß, der, eindeutig zu sein". (BS, S. 107 f.)

Frege hat auch auf den Wert der Begriffsschrift als *characteristica,* in der die logischen Strukturen der Sätze eindeutig dargestellt werden, für die *Philosophie* hingewiesen. Er schreibt:

„Wenn es eine Aufgabe der Philosophie ist, die Herrschaft des Wortes über den menschlichen Geist zu brechen, indem sie die Täuschungen aufdeckt, die durch den Sprachgebrauch über die Beziehungen der Begriffe oft fast unvermeidlich entstehen, indem sie den Gedanken von demjenigen befreit, womit ihn allein die Beschaffenheit des sprachlichen Ausdrucksmittels behaftet, so wird meine Begriffsschrift, für diese Zwecke weiter ausgebildet, den Philosophen ein brauchbares Werkzeug werden können". (BS, S. XII f; vgl. a. KS, 370.)

Auch das ist ein klassischer Text. In der analytischen Philosophie wird dann aus Freges „Wenn-so"-Satz ein „Weil"-Satz: Die Herrschaft der Sprache über den Geist zu brechen wird nun zum Hauptanliegen der Philosophie. Dabei sieht man die logische Symbolsprache vielfach als Idealsprache an; Analysen von Sätzen der normalen Sprache sind dann in Form von Übersetzungen in diese Idealsprache anzugeben.

In ZBS weist Frege auf den Unterschied seiner Zielsetzung in der BS gegenüber jener von Boole hin:

„Ich wollte nicht eine abstrakte Logik in Formeln darstellen, sondern einen Inhalt durch geschriebene Zeichen in genauerer und übersichtlicherer Weise zum Ausdruck bringen, als es durch Worte möglich ist. Ich wollte in der Tat nicht einen bloßen *calculus ratiocinator,* sondern eine *lingua characterica* im leibnizischen Sinne schaffen, wobei ich jene schlußfolgernde Rechnung immerhin als einen notwendigen Bestandteil einer Begriffsschrift anerkenne". (BS, S. 97 f.)[4]

Frege unterscheidet also zwei Aufgaben: die Entwicklung einer logischen *characteristica,* einer Begriffsschrift, und die Angabe eines logischen *Kalküls*[5]. Beide hängen so zusammen, daß die *characteristica* eine notwendige Voraussetzung für eine exakte Formulierung

[4] Zu Leibniz vgl. a. BS, S. XI f. und N, S. 9 f.
[5] Die BS soll nach Frege „beides mit gleichem Nachdruck sein", vgl. KS, S. 227.

des Kalküls ist. Dieser Kalkül ist keine Begriffsschrift, aber in der BS enthalten. Zweck der Begriffsschrift war von vornherein die Entwicklung eines logischen Kalküls, und auf ihn hin ist sie angelegt.

Frege wollte in der logischen Sprache mit möglichst wenigen Grundausdrücken auskommen:

„Ich befolgte den Grundsatz, möglichst weniges als ursprünglich einzuführen, nicht aus Scheu vor neuen Zeichen ... sondern weil die Übersicht über den wissenschaftlichen Besitzstand erschwert wird, wenn dasselbe in verschiedenen Verkleidungen auftritt, und das scheint mir der einzig zu billigende Grund zu sein, aus dem man neuen Bezeichnungen widerstreben darf. Dies hindert nicht, daß man für eine oft vorkommende, sehr zusammengesetzte Zeichenverbindung nachträglich eine einfachere einführt. Die von diesen geltenden Sätze stelle man dann aber nicht als ursprünglich hin, sondern leite sie aus der Bedeutung ab. Je mehr Urzeichen eingeführt werden, desto mehr Urgesetze werden auch gefordert. Es ist aber ein allgemeiner Grundsatz der Wissenschaft, deren Zahl möglichst zu verringern. Das Wesen der Erklärung besteht ja gerade darin, daß sie eine große, vielleicht unübersehbare Mannigfaltigkeit durch einen oder wenige Sätze beherrscht". (N, S. 40.)

Frege wollte auch mit möglichst wenigen logischen Grundgesetzen und Schlußregeln auskommen. Zur Axiomatik sagt er:

„Es liegt nahe, die zusammengesetzteren dieser Urteile aus einfacheren abzuleiten, nicht um sie gewisser zu machen, was meistens unnötig wäre, sondern um die Beziehungen der Urteile zu einander hervortreten zu lassen. Es ist offenbar nicht dasselbe, ob man bloß die Gesetze kennt, oder ob man auch weiß, wie die einen durch die andern schon mitgegeben sind. Auf diese Weise gelangt man zu einer kleinen Anzahl von Gesetzen, in welchen, wenn man die in den Regeln enthaltenen hinzunimmt, der Inhalt aller, obschon unentwickelt, eingeschlossen ist. Und auch dies ist ein Nutzen der ableitenden Darstellungsweise, daß sie jenen Kern kennen lehrt. Da man bei der unübersehbaren Menge der aufstellbaren Gesetze nicht alle aufzählen kann, so ist Vollständigkeit nicht anders als durch Aufsuchung derer zu erreichen, die der Kraft nach alle in sich schließen". (BS, S. 25.)

Freges Ziel in der BS ist es also, eine logische Begründung der Arithmetik anzugeben. Dazu benötigt er ein hinreichend leistungsfähiges axiomatisches System der Logik, in dem sich die Begründung vollzieht, und zwar in einer so expliziten und stringenten Weise, daß klar ist, daß nur die angegebenen logischen Axiome und Schlußprinzipien verwendet werden. Dazu wiederum benötigt er eine logische Symbolsprache im Sinn einer *characteristica,* in der sich ein solches Axiomensystem formulieren läßt.

3.2 Die Aussagenlogik

Frege hat in der BS einen Kalkül angegeben, der Aussagenlogik, Prädikatenlogik 1. Stufe mit Identität und Prädikatenlogik 2. Stufe umfaßt. Der Übersichtlichkeit wegen formulieren wir hier diese Systeme getrennt, beginnen also mit der Aussagenlogik (kurz A. L.).

Ein Logiksystem wird heute in drei Schritten aufgebaut: Zunächst wird die Syntax der Sprache angegeben, dann ihre Semantik und endlich das Axiomensystem. Frege hat die *Syntax* seiner BS nicht so exakt aufgebaut, wie das heute üblich ist. Präziser ist ihre Bestimmung im System der GGA, davon wird aber erst später die Rede sein. Es fällt jedoch nicht schwer, präzise syntaktische Regeln für die Logik der BS anzugeben. Da wir Freges Schreibweise im folgenden in die heute übliche übersetzen, ist die Syntax der Rekonstruktionssprache die normale. Frege gibt keine objektsprachlichen Konstanten an, sondern arbeitet mit metasprachlichen Mitteilungszeichen für objektsprachliche Sätze. Er gibt entsprechend auch keine Axiome an, sondern Axiomenschemata und erspart sich so eine Einsetzungsregel[6].

Frege verwendet einen Operator, der in der modernen Logik nicht vorkommt, und in ihr entbehrlich ist. Seine Einführung ergibt sich daraus, daß Frege nur eine syntaktische Kategorie für Namen und Sätze kennt – und analog für Funktionsausdrücke und Prädikate. Später wird das dadurch motiviert, daß Frege Sätze als Namen von Wahrheitswerten auffaßt und die beiden Wahrheitswerte – „das Wahre" und „das Falsche" – als Gegenstände. Da nun die a. l. Operatoren nur für Sätze definiert sind, braucht Frege eine Funktion, die Gegenstände auf Wahrheitswerte abbildet, und er verwendet jene Funktion, die das Wahre auf sich selbst und alle anderen Gegenstände auf das Falsche abbildet. Diese Funktion wird durch den *Inhaltsstrich* oder „den Waagerechten" – ausgedrückt. In der BS fungiert der Operator aber lediglich so, daß hinter ihm nur Sätze stehen dürfen, ein Ausdruck, der einen „beurteilbaren Inhalt" hat,

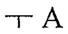
6 Zu diesen Begriffen vgl. z. B. Kutschera und Breitkopf (1975), § 5 und 6. Da in der BS eine Einsetzungsregel fehlt, muß man die lateinischen Buchstaben als Mitteilungszeichen, nicht als freie Variable verstehen. Vgl. dazu BS, S. 21.

wie Frege sagt (BS, S. 2)[7]. Es wäre also eine entsprechende syntaktische Regel anzugeben. Der Inhaltsstrich tritt auch in der BS immer in Verbindung mit einem Operator auf (und wird mit ihm verschmolzen), so daß man in der Rekonstruktion (bei einer syntaktischen Unterscheidung von Sätzen und Termen) ganz auf ihn verzichten kann.

Der *Urteilsstrich* | kommt nur in Verbindung mit dem Inhaltsstrich vor, d. h. in der Form ⊢ A. Der Ausdruck besagt, daß der Satz A behauptet wird. Das Zeichen ⊢ steht also in der BS vor Theoremen, und wird in diesem Sinn heute für Beweisbarkeit verwendet. (Für Festsetzungen verwendet Frege das Zeichen ⊩ (BS, S. 56); er würde

7 Wenn Frege dort auch sagt, der Ausdruck –A (wo A ein Satz ist), bedeute soviel wie „der Umstand, daß A", so wäre das so zu verstehen, daß der Inhaltsstrich ein Operator ist, der aus Sätzen Bezeichnungen für ihren Sinn macht, aber das paßt nicht zu Freges sonstigen Darlegungen – Negationen und Implikationen sind z. B. nicht für Umstände definiert – und da Frege später diese Deutung auch aufgegeben hat, können wir sie hier ignorieren. – P. Aczel macht in (1980), S. 41 den Inhaltsstrich für die Inkonsistenz des Systems der GGA verantwortlich, da damit eine interne (objektsprachliche) Definition von Wahrheit möglich sei, womit sich nach A. Tarski (1933) die semantische Antinomie des Lügners rekonstruieren läßt. Dazu ist zu sagen: Erstens ist der Inhaltsstrich kein Wahrheitsprädikat; angewandt auf Namen für das Wahre ergibt er nicht einen Namen für das Wahre, sondern für das Falsche. (Das hat Aczel vielleicht deswegen übersehen, weil er nur die Ontologie des Systems betrachtet, nicht aber die Objektsprache und ihre Interpretation). Zweitens ergibt sich Aczels Lokalisierung des „Fehlers" bei Frege daraus, daß er andere Voraussetzungen für die Konstruktion der logischen Antinomien, insbesondere die eineindeutige Zuordnung von Objekten (Wertverläufen) zu einstelligen Funktionen 1. Stufe, als „intuitiv korrekt und daher konsistent" ansieht (S. 39). Wenn die Antinomien aber irgendetwas deutlich gemacht haben, dann die Tatsache, daß bloße Intuition im Bereich der Mengenlehre unzuverlässig ist. Es gibt grundsätzlich mehrere mögliche Ansätze zur Vermeidung der Antinomien: die Abschwächung der klassischen Logik, der Existenzprinzipien für Mengen, die Aufgabe der Typenfreiheit der Mengenlehre uws. C. Thiel hat in (1983) im Anschluß an Aczel versucht, die Antinomie des Lügners zu rekonstruieren. Dabei wird aber auf S. 296 ohne Begründung angenommen, die Klasse K, die mithilfe des Begriffes ‚falsch' erklärt ist, lasse sich im System der GGA durch einen Wertverlaufsterm darstellen.

also z. B. statt $A \wedge B := \neg(A \supset \neg B)$ schreiben $\Vdash A \wedge B \equiv \neg(A \supset \neg B)$.) Es ist wie der Urteilsstrich ein *metasprachliches* Zeichen. Frege unterscheidet aber in der BS noch nicht zwischen Objekt- und Metasprache und behandelt beide daher wie objektsprachliche Zeichen[8].
Als a. l. Grundoperatoren verwendet Frege die Zeichen

 für $\neg A$, d. h. für *Negation*, und

 für $A \supset B$, d. h. für *Implikation.*[9]

Die Symbolik Freges ist also *zweidimensional.* Das unterscheidet sie von allen sonst üblichen symbolischen Schreibweisen und war sicher ein Grund dafür, daß sie sich nicht durchgesetzt hat. Üblicherweise verwendet man zweidimensionale Darstellungen nur für Beweise und Ableitungen. Freges Schreibweise macht nun zwar die Implikationsstruktur von Sätzen übersichtlicher als die lineare Schreibweise, aber Beweise werden damit als Folgen zweidimensionaler Gebilde unübersichtlicher. Frege hat seine Symbolik so verteidigt:

„Durch die zweifache Ausdehnung der Schreibfläche wird eine Mannigfaltigkeit von Stellungen der Schriftzeichen zueinander möglich, und das kann für die Zwecke des Gedankenausdrucks benutzt werden. Bei einem gewöhnlichen geschriebenen oder gedruckten Texte ist es freilich ganz zufällig, welche Schriftzeichen untereinander zu stehen kommen; dagegen benutzt man bei tabellarischen Zusammenstellungen die zweifache Ausdehnung, um Übersichtlichkeit zu erzielen. In ähnlicher Weise suche ich das in meiner Begriffsschrift zu tun. Indem ich die einzelnen Teilsätze – z. B. Folgesatz und Bedingungssätze – untereinander schreibe und links davon durch eine Verbindung von Strichen die logischen Beziehungen bezeichne, durch die das Ganze zusammengehalten wird, erreiche ich eine durchsichtige Gliederung des Satzes. Ich erwähne dies, weil jetzt Bestrebungen hervortreten, jede Formel in eine Zeile zu pressen. In der Peanoschen Begriffsschrift wird die Einzeiligkeit der Formeln, wie es scheint, grundsätzlich durchgeführt, was

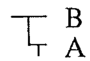
8 In N, 280 (dem Fragment zum 4. Teil der LU über Allgemeinheit) unterscheidet Frege Darlegungs- (= Meta-) und Hilfs- (= Objekt-) Sprache. Die Unterscheidung von Objekt- und Metasprache wurde erst ab ca. 1930 von A. Tarski systematisch entwickelt.
9 Sie sind so zu lesen, daß die waagerechten Striche zugleich als Inhaltsstriche fungieren, so daß als Argumente nur Sätze infrage kommen.

mir wie ein mutwilliger Verzicht auf einen Hauptvorzug des Geschriebenen vor dem Gesprochenen vorkommt. Die Bequemlichkeit des Setzers ist denn doch der Güter höchstes nicht. Aus physiologischen Gründen ist eine lange Zeile schwerer zu übersehen und ihre Gliederung schwerer aufzufassen als kürzere untereinander stehende Zeilen, die aus der Brechung jener enstanden sind, falls diese Teilung der Gliederung des Sinnes entspricht". (KS, S. 222 (= BSP).)[10]

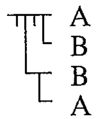
Das System der Operatoren $\{\neg, \supset\}$ ist *vollständig* in dem Sinn, daß sich alle a. l. Operatoren damit definieren lassen[11]. Dieser Gedanke der Vollständigkeit findet sich in der BS noch nicht, sondern erst in den LU (vgl. dazu unten). Einen Beweis der Vollständigkeit seines Operatorensystems hat Frege aber nicht angegeben. Auch der Begriff der Wahrheitswertfunktion und damit die Abgrenzung a. l. Operatoren wird erst später formuliert[12].

Frege definiert andere a. l. Operatoren wie üblich – er führt dafür allerdings keine eigenen Abkürzungen ein:

Konjunktion:  $A \wedge B := \neg(A \supset \neg B)$ (BS, S. 12)

Adjunktion:  $A \vee B := \neg A \supset B$ (BS, S. 10 f.)

Die *Äquivalenz* läßt sich erklären durch

 $A \equiv B := (A \supset B) \wedge (B \supset A)$.

Frege verwendet das Zeichen $\equiv$ in der BS sowohl für Identität wie für Äquivalenz. Das hängt wieder damit zusammen, daß er mit einer einzigen syntaktischen Kategorie für Sätze und Terme arbeitet. In der A. L. ist das Zeichen $\equiv$ als Grundzeichen entbehrlich. Daher diskutieren wir es und die Axiome, die Frege dafür angibt, erst unten im Zusammenhang mit seiner Logik der Identität.

Die *Semantik* der a. l. Operatoren legt Frege so fest, wie das heute üblich ist: Er betrachtet im Falle der Implikation $A \supset B$ die vier

10 Vgl. dazu auch BS, S. 103 f. (= ZBS) und 111 (= BBS).
11 Vgl. dazu z. B. Kutschera und Breitkopf (1975), 3.4.
12 Vgl. dazu KS, S. 136 f. und 394.

Fälle, daß A und B beide wahr sind, daß A wahr und B falsch ist, daß A falsch und B wahr ist, und daß A und B beide falsch sind, und sagt, die Implikation $A \supset B$ solle im 2. Fall falsch, in den anderen Fällen hingegen wahr sein (BS, S. 5; vgl. a. BW, S. 104). Das Prinzip der Wahrheitsdefinitheit, nach dem jeder Aussagesatz entweder wahr oder falsch ist, wird dabei vorausgesetzt (vgl. KS, S. 344). Zur Negation sagt Frege hingegen nur, $\neg A$ bedeute, daß A nicht stattfinde (BS, S. 10). Es ist jedoch klar, daß sich daraus die Festlegung ergibt, daß $\neg A$ genau dann wahr ist, wenn A falsch ist. Es fehlt aber der für die Semantik zentrale Begriff der Bewertung oder Interpretation sowie jener des a. l. wahren Satzes und des a. l. gültigen Schlusses. Frege rechtfertigt jedoch z. B. den Schluß von A und $A \supset B$ auf B so, daß er sagt: Sind beide Prämissen wahr, so muß nach der Deutung von $A \supset B$ mit A auch B wahr sein, setzt also den Begriff des gültigen Schlusses voraus (BS, S. 7 f.). Ebenso rechtfertigt er die a. l. Wahrheit seiner Axiome so wie wir das heute tun, d. h. so, daß sie für beliebige Verteilungen von Wahrheitswerten auf die einfachen Sätze wahr werden (vgl. z. B. BS, S. 26).

Freges *Kalkül* der A. L. sieht so aus

Axiome:

A1) $A \supset (B \supset A)$	(BS, S. 26)
A2) $(C \supset (B \supset A)) \supset ((C \supset B) \supset (C \supset A))$	(BS, S. 26)
A3) $(D \supset (B \supset A)) \supset (B \supset (D \supset A))$	(BS, S. 35)
A4) $(B \supset A) \supset (\neg A \supset \neg B)$	(BS, S. 43)
A5) $\neg\neg A \supset A$	(BS, S. 44)
A6) $A \supset \neg\neg A$	(BS, S. 47)[13]

Ableitungsregel

R1: $A \supset B, A \vdash B$	(BS, S. 8)

Frege beweist die *Widerspruchsfreiheit* seines Kalküls – d. h. den Satz, daß im Kalkül nur (a. l.) wahre Sätze beweisbar sind – so, daß er die (a. l.) Wahrheit der Axiome aufgrund der semantischen Festlegungen nachweist und zeigt, daß R1 aus wahren Sätzen nur

[13] In der Einleitung zur BS weist Frege darauf hin, daß sich A5, A6 in das Axiom $A \equiv \neg\neg A$ zusammenfassen lassen (BS, S. XIV).

wahre Sätze erzeugt (also auch: aus a. l. wahren Sätzen nur a. l. wahre Sätze).

Die *Vollständigkeit* seines Kalküls – d. h. den Satz, daß im Kalkül alle (a. l.) wahren Sätze beweisbar sind – hat Frege nicht bewiesen; das hat zuerst Post 1921 getan. Dazu fehlte Frege auch der Begriff der a. l. Wahrheit. Er sagt, er habe mit seiner BS den Nachweis führen wollen,

„daß ich mit meinen Urgesetzen überall auskomme. Hier konnte freilich nur eine Wahrscheinlichkeit dadurch erreicht werden, daß ich in vielen Fällen damit auskam. Es war aber nicht gleichgültig, an welchem Beispiele ich das zeigte. Um nicht vielleicht grade die für den wissenschaftlichen Gebrauch wertvollen Umformungen zu übersehen, wählte ich die zusammenhängende Ableitung eines Satzes, der mir für die Arithmetik unentbehrlich zu sein scheint, obwohl er als selbstverständlich wenig beachtet wird". (N, S. 42.)

Frege macht also nur plausibel, daß man in der Arithmetik tatsächlich mit den angegebenen Gesetzen auskommt. Die Methoden für Vollständigkeitsbeweise sind auch erst viel später eingeführt worden, von Post für die A. L. in (1921), von Gödel für die elementare Prädikatenlogik in (1930).

Freges A. L. ist aber vollständig. Das ergibt sich daraus, daß im System Freges das Axiom

A3*: $(\neg A \supset \neg B) \supset (B \supset A)$

ableitbar ist. Die Axiome A1, A2, A3* ergeben aber zusammen mit R1 ein vollständiges System der A. L. Dieses System wurde 1921 von Lukasiewicz als Vereinfachungen des Fregeschen angegeben[14].

Beweis:

$(\neg A \supset \neg B) \supset (\neg\neg B \supset \neg\neg A)$	A4
$B \supset \neg\neg B$	A6
$(B \supset \neg\neg B) \supset ((\neg\neg B \supset \neg\neg A) \supset (B \supset \neg\neg A))$	mit dem Theorem 9 (BS, S. 35), d. h. mit $((C \supset B) \supset ((B \supset A) \supset (C \supset A))$
$(\neg\neg B \supset \neg\neg A) \supset (B \supset \neg\neg A)$	R1

[14] Vgl. dazu auch Lukasciewicz und Tarski (1930).

$((\neg A \supset \neg B) \supset (\neg\neg B \supset \neg\neg A)) \supset (((\neg\neg B \supset \neg\neg A) \supset (B \supset \neg\neg A)) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset (B \supset \neg\neg A))$	Theorem 9
$(\neg A \supset \neg B) \supset (B \supset \neg\neg A)$	R1 (2 mal)
$\neg\neg A \supset A$	A5
$(\neg\neg A \supset A) \supset ((B \supset \neg\neg A) \supset (B \supset A))$	mit Theorem 5 (BS, S. 32), d. h. mit $(B \supset A) \supset ((C \supset B) \supset (C \supset A))$
$(B \supset \neg\neg A) \supset (B \supset A)$	R1
$(\neg A \supset \neg B) \supset (B \supset \neg\neg A)) \supset (((B \supset \neg\neg A) \supset (B \supset A)) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset (B \supset A)))$	Theorem 9
$(\neg A \supset \neg B) \supset (B \supset A)$	R1 (2 mal).

Die Axiome des Fregeschen Systems sind nicht *unabhängig* voneinander, denn A3 folgt aus A1 und A2[15]. Die Methoden zum Beweis der Unabhängigkeit von Axiomen wurden zuerst von P. Bernays und J. Łukasiewicz entwickelt[16].

Zur Existenz eines *Entscheidungsverfahrens* für die A. L. hat Frege nichts gesagt. Er weist auch nicht auf Entsprechungen zur Booleschen A. L. hin.

3.3 Die elementare Prädikatenlogik

Frege führt zum Aufbau der Prädikatenlogik (kurz P. L.) zunächst einen allgemeinen Funktionsbegriff ein. Diesen Begriff hat er in späteren Arbeiten wie FB, BG und WF ausführlicher und präziser erläutert als in der BS (vgl. dazu 6.1). Hier unterscheidet er z. B. noch nicht zwischen Funktion und Funktionsausdruck. Sehen wir davon ab, so können wir die Ausführungen in BS, S. 15f so verstehen: Frege geht aus von zusammengesetzten Namen oder Sätzen Φ,

[15] Vgl. dazu auch Lucasciewicz (1936), S. 127.

[16] Vgl. dazu Bernays (1926) und die Bemerkung in Tarski (1956), S. 43. E. V. Huntington hat 1935 darauf hingewiesen, daß diese Methode (einer Interpretation in einer mehrwertigen Logik) sich auch zum Beweis der Unabhängigkeit von Deduktionsregeln anwenden läßt.

die an einer oder mehreren Stellen einen bedeutungsvollen Ausdruck Ψ enthalten. Diese Struktur von Φ werde durch die Schreibweise $\Phi[\Psi]$ angedeutet. Ersetzt man den Ausdruck Ψ an jenen Stellen, auf die sich die eckigen Klammern beziehen, durch eine passende Variable ξ für Ausdrücke derselben syntaktischen Kategorie wie Ψ, so entsteht ein Ausdruck $\Phi[\xi]$ für eine einstellige Funktion. Insbesondere ergibt sich also z. B. aus einem Satz durch Ersetzung eines Eigennamens durch eine Gegenstandsvariable ein Prädikat.

„Wenn in einem Ausdrucke, dessen Inhalt nicht beurteilbar zu sein braucht, ein einfaches oder zusammengesetztes Zeichen an einer oder an mehreren Stellen vorkommt, und wir denken es an allen oder einigen dieser Stellen durch anderes, überall aber durch dasselbe ersetzbar, so nennen wir den hierbei unveränderlich erscheinenden Teil des Ausdruckes Funktion, den ersetzbaren ihr Argument". (BS, S. 16.)

Entsprechend werden mehrstellige Funktionsausdrücke gebildet:

„Wenn man in einer Funktion ein bis dahin als unersetzbar angesehenes Zeichen an einigen oder allen Stellen, wo es vorkommt, ersetzbar denkt, so erhält man durch diese Auffassungsweise eine Funktion, die außer den bisherigen noch ein Argument hat. Auf diese Weise entstehen Funktionen von zwei und mehr Argumenten". (BS, S. 17f.)

Als Mitteilungszeichen für Funktionsausdrücke verwendet Frege große griechische Buchstaben und übernimmt die mathematische Funktionsschreibweise, also $\Phi(A)$, $\Psi(A, B)$ etc.[17]. Man kann also aus $\Phi(A, B)$ die Funktionsausdrücke $\Phi(\xi, B)$, $\Phi(A, \xi)$, $\Phi(\xi, \zeta)$, $\xi(A, B)$, etc. erzeugen. Wir beschränken uns zunächst auf die Ersetzung von Gegenstandsnamen in Sätzen, betrachten also nur jene Funktionsausdrücke, die Prädikate 1. Stufe sind[18]. Dann läßt sich die im System der BS enthaltene elementare P. L. so darstellen:

[17] Die Ausdrücke $\Phi(A)$ sind also als Quasianführungen zu lesen, d. h. als Bezeichnungen von objektsprachlichen Ausdrücken, die aus Φ, gefolgt von einem linken Klammerzeichen, gefolgt vom Ausdruck A, gefolgt von einem rechten Klammerzeichen gebildet werden.

[18] Frege will in $\Phi(a)$ den Namen nicht als Subjekt, $\Phi(\xi)$ als Prädikat im üblichen Sinn verstehen. Er meint, diese Begriffe hätten in der Logik keinen Platz, weil sie der Unterscheidung von Thema und Rhema entsprechen. Vgl. dazu BS, S. 3. Seine Äußerung in N, S. 273 ist auch in diesem Sinn zu verstehen: „Das Eigenartige meiner Auffassung der Logik

Bei Frege hat der *Alloperator* die Gestalt

$\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\;\Phi(\mathfrak{a})$ für $\wedge\mathfrak{a}\,\Phi(\mathfrak{a})$ bzw. $\wedge x\,A[x]$.

Frege benützt also kleine deutsche Buchstaben $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \ldots$ als gebundene Gegenstandsvariablen. Wir verwenden in der Transskription die Buchstaben x, y, z. Er legt fest, daß $\wedge xA[x]$ nur dann ein Satz ist, wenn x in A[ ] nicht vorkommt (BS, S. 20 f.). Mit einer entsprechenden Bedingung wird auch heute der Bezug der Variablen in den Quantoren eindeutig festgelegt, d. h. es wird z. B. ausgeschlossen, daß ein Ausdruck vorkommt wie $\wedge x(Fx \wedge \wedge x(Gx \wedge Hx))$. Den Bereich eines Quantors bezeichnet Frege als „Gebiet" (BS, S. 20). Kleine lateinische Buchstaben a, b, c, … verwendet er als freie Gegenstandsvariablen. Sie dienen zum Ausdruck der Allgemeinheit in Satzschemata. So besagt $\vdash A[a]$ dasselbe wie $\vdash \wedge xA[x]$ (BS, S. 21). Da jedoch, wie bereits erwähnt, eine Einsetzungsregel für diese Variablen fehlt, deuten wir sie als Mitteilungszeichen für Gegenstandsnamen. Der *Existenzquantor* wird bei Frege wie üblich durch

$\neg\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\neg\;\Phi(\mathfrak{a})$, d. h. $\neg\wedge x\neg A[x]$ (BS, S. 23)

wiedergegeben. Eine Abkürzung führt er auch dafür nicht ein.

Semantisch wird der Alloperator so erklärt: $\wedge xA[x]$ bedeutet das Urteil, daß die Funktion A[x] eine Tatsache ergibt, was immer man als ihr Argument ansehen möge (BS, S. 19). Da Frege nicht zwischen Funktion und Funktionsausdruck, sowie zwischen Argument als nichtsprachlichem Objekt und als Name für dieses Objekt unterscheidet, kann man das sowohl so verstehen, daß $\wedge xA[x]$ wahr ist genau dann, wenn die durch A[x] ausgedrückte Funktion für jedes Objekt als Argument den Wahrheitswert „wahr" ergibt, als auch so, daß der Ausdruck A[x] für jede Einsetzung eines Namens für x das

wird zunächst dadurch kenntlich, daß ich den Inhalt des Wortes „wahr" an die Spitze stelle, und dann dadurch, daß ich den Gedanken sogleich folgen lasse als dasjenige, bei dem Wahrsein überhaupt in Frage kommen kann. Ich gehe also nicht von den Begriffen aus und setze aus ihnen den Gedanken oder das Urteil zusammen, sondern ich gewinne die Gedankenteile durch Zerfällung des Gedankens. Hierdurch unterscheidet sich meine Begriffsschrift von ähnlichen Schöpfungen Leibnizens und seiner Nachfolger trotz des von mir vielleicht nicht glücklich gewählten Namens. Die Wahrheit ist nicht Teil des Gedankens".

Wahre bezeichnet. Diese beiden Deutungen liefern verschiedene Resultate, wenn nicht jedes Objekt (des *universe of discourse*) einen Namen in der Objektsprache hat. Sie ergeben allerdings denselben Begriff p. l. Wahrheit[19]. Wir wollen Freges Bestimmung im folgenden im ersteren Sinn verstehen, d. h. Allsätze in der üblichen Weise deuten. Das entspricht auch eher der Festlegung in GGAI, S. 12. Man muß allerdings sagen, daß Frege der Unterschied beider Deutungen nicht klar war. Das zeigt sich auch in GGAI darin, daß dort im Beweis der semantischen Definitheit wieder die zweite Deutung zugrundegelegt wird. Ein Grund für diese Unklarheit ist wohl auch, daß Frege nicht mit einem festen Vorrat objektsprachlicher Namen rechnet, sondern die Menge dieser Namen offen läßt, im Effekt also sagt: Der Satz $\wedge xA[x]$ ist wahr, wenn A[a] wahr ist für alle *möglichen* Namen für Objekte des Grundbereichs. Das entspricht dann der heutigen Deutung im ersteren Sinn: Der Satz $\wedge xA[x]$ ist wahr in der Interpretation V, wenn A[a] wahr ist in allen Interpretationen V′, die sich von V höchstens dadurch unterscheiden, daß sie a ein anderes Objekt des Grundbereichs zuordnen.

Zur Interpretation des Alloperators gehört eine Festlegung des *universe of discourse* als Definitionsbereich der Variablen. Frege nimmt dafür immer die Menge *aller* Objekte an. Das ergibt sich für ihn aus der Idee, jedes logische Theorem solle eine vollkommen allgemeine Aussage sein, in der keine deskriptiven Konstanten vorkommen – solche Aussagen gibt es freilich nicht in der elementaren P. L., sondern erst in der höheren P. L. und in Systemen der Klassenlogik. Auch hier folgt aber nicht die Geltung in allen Gegenstandsbereichen aus jener im allumfassenden *universe of discourse*, denn dieser ist sicher unendlich, d. h. es gilt in ihm z. B. das Theorem $\vee f(\wedge x\neg f(x,x) \wedge \wedge x\vee y f(x,y) \wedge \wedge xyz(f(x,y)\wedge f(y,z) \supset f(x,z)))$, das aber in endlichen Bereichen nicht gilt[20].

Im *Kalkül* Freges kommt zu den a. l. Axiomen folgendes p. l. Axiom hinzu:

A7: $\wedge xA[x] \supset A[a]$ (BS, S. 51).

Als zusätzliche Deduktionsregel, die Frege allerdings nicht explizit als solche kennzeichnet, benötigt man seine Regel:

19 Vgl. dazu z. B. Kutschera (1967), 2.2.2.

20 Vgl. zu dieser Konzeption Freges seine „Kritische Beleuchtung einiger Punkte in E. Schröders Vorlesungen …" (1895).

R2: $A \supset B[a] \vdash A \supset \bigwedge x B[x]$, falls a nicht in der Konklusion vorkommt (BS, S. 21).

Dieser Kalkül der elementaren P. L. ist vollständig und widerspruchsfrei. Die semantische Widerspruchsfreiheit hat Frege bewiesen (BS, S. 51, 21 f.). Ein p. l. Vollständigkeitsbeweis ist zuerst 1930 von K. Gödel angegeben worden. Da Frege keinen Interpretationsbegriff kennt, fehlt bei ihm eine entscheidende Voraussetzung für einen solchen Beweis.

Da Frege nicht syntaktisch zwischen Namen und Sätzen unterscheidet, könnte er im System der BS auch über Wahrheitswerte quantifizieren, also z. B. die Allgemeingültigkeit des *tertium non datur* durch $\bigwedge x(-x \vee \neg x)$ ausdrücken. Von dieser Möglichkeit macht er aber keinen Gebrauch.

3.4 Identität

Die Identität wird in der BS durch „a≡b" bezeichnet, später durch „a=b". Die Erklärung der Identität in der BS ist unbefriedigend und Frege hat sie in SB revidiert. In der BS sagt er:

„Während sonst die Zeichen lediglich Vertreter ihres Inhaltes sind, so daß jede Verbindung, in welche sie treten, nur eine Beziehung ihrer Inhalte zum Ausdrucke bringt, kehren sie plötzlich ihr eigenes Selbst hervor, sobald sie durch das Zeichen der Inhaltsgleichheit verbunden werden; denn es wird dadurch der Umstand bezeichnet, daß zwei Namen denselben Inhalt haben". (BS, S. 13 f.)

Danach soll „a≡b" soviel besagen wie „‚a' ist synonym mit ‚b'", oder schwächer – Frege unterscheidet erst in SB zwischen Sinn und Bezug von Namen – soviel wie „‚a' bezeichnet dasselbe wie ‚b'". Frege sagt:

„Die Notwendigkeit eines Zeichens der Inhaltsgleichheit beruht also auf folgendem: derselbe Inhalt kann auf verschiedene Weisen völlig bestimmt werden; daß aber in einem besonderen Falle durch zwei Bestimmungsweisen wirklich Dasselbe gegeben werde, ist der Inhalt eines Urteils. Bevor dies erfolgt ist, müssen den beiden Bestimmungsweisen entsprechend zwei verschiedene Namen dem dadurch Bestimmten verliehen werden. Das Urteil aber bedarf zu seinem Ausdrucke eines Zeichens der Inhaltsgleichheit, welches jene beiden Namen verbindet. Hieraus geht hervor, daß die verschiedenen Namen für denselben Inhalt nicht immer bloß eine gleichgültige Formsache sind, sondern daß sie das Wesen der Sache selbst betreffen, wenn sie mit verschiedenen Bestimmungsweisen zusammenhängen. In diesem Falle ist das Urteil, welches die Inhaltsgleichheit zum Gegenstande hat, im kantischen Sinne ein synthetisches". (BS, S. 14 f.)

Und er definiert die „Inhaltsgleichheit" so:

„Es bedeute nun $\vdash (A \equiv B)$: das Zeichen A und das Zeichen B haben denselben begrifflichen Inhalt, so daß man überall an die Stelle von A B setzen kann und umgekehrt". (BS, S. 15.)

Da eine Behauptung der Sinn- oder Bezugsgleichheit zweier objektsprachlicher Namen nach heutiger Auffassung ein metasprachliches Urteil ist, sehen wir von dieser Deutung hier ab und lesen „a=b" wie üblich als „Das Objekt a ist mit dem Objekt b identisch". Dann ergeben die beiden Axiome, die Frege für die Identität angibt:

A8) $a=a$ (BS, S. 50)

A9) $a=b \supset (A[a] \equiv A[b])$ (BS, S. 50)

in Verbindung mit dem p. l. Kalkül einen vollständigen Kalkül der elementaren P. L. mit Identität. Auch in diesem Fall hat Frege nur etwas zur semantischen Widerspruchsfreiheit, nicht aber zur Vollständigkeit gesagt. Kennzeichnungsterme führt Frege erst in den GGA im Rahmen der klassenlogischen Sprache ein.

3.5 Die höhere Prädikatenlogik

Das System der BS enthält auch eine höhere P. L. Da Frege Ausdrücke und Variablen verschiedener syntaktischer Kategorien nicht explizit unterscheidet, verwendet er das Axiom A7 und die Regel R2 auch für Quantifikationen über Begriffe 1. Stufe, d. h. über Begriffe, die für Objekte erklärt sind. Die Typenunterscheidung wird erst im System der GGA klar durchgeführt.

Die *Unvollständigkeit* der P. L. höherer Stufe ist 1931 von K. Gödel bewiesen worden. A7 und R2 genügen aber für die schwache Vollständigkeit im Sinne von L. Henkin[21].

[21] Vgl. dazu z. B. Kutschera (1967), 4.2 und 4.3.

Die P. L. 2. Stufe dient Frege in der BS dazu, Begriffe einzuführen, die er für die logische Begründung der Arithmetik benötigt. Er definiert insbesondere folgende Begriffe[22]

$E(G,F) := \bigwedge x (Gx \supset \bigwedge y (F(x, y) \supset G(y)))$
— *die Eigenschaft G vererbt sich in der F-Reihe* (BS, S. 59).

$F^{>0}(x, y) := \bigwedge g (E(g, F) \wedge \bigwedge z (F(x, z) \supset gz) \supset gy)$
— *y folgt in der F-Reihe auf x,* — Relationskette 2. Art (BS, S. 60). Man macht sich leicht klar, daß $F^{>0}(x, y)$ genau dann gilt, wenn es eine Zahl $n \geq 1$ gibt und Objekte $x_0, x_1, \ldots, x_n$ mit $x_0 = x$, $x_n = y$ und $F(x_0, x_1) \wedge F(x_1, x_2) \wedge \ldots \wedge F(x_{n-1}, x_n)$. Mit Hilfe der Relation F ‚y ist unmittelbarer Nachfolger von x', die Frege in den GLA erklärt, kann man also den Begriff ‚y ist eine natürliche Zahl' durch $F^{\geq 0}(0, y)$ definieren, wenn man setzt:

$F^{\geq 0}(x, y) := F^{>0}(x, y) \vee x = y$
— *y gehört der mit x anfangenden F-Reihe an* — Relationskette 1. Art (BS, S. 71).

Frege verwendet dabei in der BS folgende Symbolik:

$$\begin{array}{ll} \delta\, G(\alpha) & \\ |(& \text{für } E(G, F) \\ \alpha\, F(\delta, \alpha) & \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \gamma & \\ \sim F(x_\gamma, y_\beta) & \text{für } F^{>0}(x, y) \\ \beta & \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \gamma & \\ \approx F(x_\gamma, y_\beta) & \text{für } F^{\geq 0}(x, y). \\ \beta & \end{array}$$

Er beweist dann einige Sätze über diese Relationen wie z. B.

$E(G, F) \wedge F^{>0}(x, y) \wedge \bigwedge z (F(x, z) \supset Gz) \supset Gy$	(BS, S. 63)
$F(x, y) \supset F^{>0}(x, y)$	(BS, S. 69)
$F^{>0}(x, y) \wedge F^{>0}(y, z) \supset F^{>0}(x, z)$	(BS, S. 71)
$E(\alpha y F^{>0}(x, y), F)$	(BS, S. 71)
$F^{\geq 0}(x, y) \wedge F(y, z) \supset F^{>0}(x, z)$	(BS, S. 72)
$E(\alpha y F^{\geq 0}(x, y), F)$	(BS, S. 74).

[22] Vgl. dazu Kutschera (1967), S. 292 ff.

Dabei sei $\alpha xy F(x, y)$ die Funktion F — α steht also für Funktionalabstraktion — und $\alpha y F(x, y)$ ist entsprechend für jeden Wert von x die Funktion $F(x, y)$. Die 4. Formel ist also zu lesen im Sinn von $\bigwedge x E(\alpha y F^{>0}(x, y), F)$ — für jedes x vererbt sich die Eigenschaft, in der F-Reihe auf x zu folgen, in der F-Reihe.

Frege definiert ferner die Nacheindeutigkeit der Relation F durch

$NE(F) := \bigwedge xy (F(y, x) \supset \bigwedge z (F(y, z) \supset x = z))$
— F ist *nacheindeutig* (BS, S. 77)

Er schreibt $\overset{\delta}{\underset{\varepsilon}{I}}\, F(\delta, \varepsilon)$ für NE(F) (verwendet also kleine griechische Buchstaben als gebundene Variable — wir würden $NE_{xy}(F(x, y))$ oder $NE(\alpha xy F(x, y))$ schreiben) und beweist z. B. die Sätze

$NE(F) \wedge (F^{\geq 0}(z, y) \vee F^{>0}(y, x)) \wedge F(y, x) \supset F^{\geq 0}(z, x) \vee F^{>0}(x, z)$ (BS, S. 83)

$NE(F) \supset \bigwedge x E(\alpha y (F^{\geq 0}(x, y) \vee F^{>0}(y, x)), F)$ (BS, S. 85)

(Ist F nacheindeutig, so vererbt sich die Eigenschaft, auf ein Objekt x in der F-Reihe zu folgen, mit ihm identisch zu sein oder ihm vorauszugehen, für alle x in der F-Reihe.)

$NE(F) \wedge F^{>0}(x, y) \wedge F^{>0}(x, z) \supset F^{\geq 0}(z, y) \vee F^{>0}(y, z)$ (BS, S. 86).

Diese Begriffsbildungen und Sätze stellen wie gesagt die Vorbereitung für die Grundlegung der Arithmetik dar und belegen, daß Frege zur Zeit der Abfassung der BS die Definitionen der Anzahlbegriffe der GLA schon klar vor Augen gehabt hat.

3.6 Das Gesamtsystem der BS

Das Gesamtsystem der BS ist außerordentlich stark, denn neben den erwähnten Teilsystemen enthält es z. B. auch eine quantifizierte A. L. Wir können es in Form einer Satzlogik so rekonstruieren[23]:

1. Syntax der Sprache $\mathfrak{B}$

a) *Kategorien:* 0 und 1 sind Kategorien und sind $\tau_1, \ldots, \tau_n$ Kategorien, so ist auch $(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ eine Kategorie.

[23] Auf die Möglichkeit einer Rekonstruktion als Termlogik gehen wir im Zusammenhang mit den GGA ein.

0 ist die Kategorie von Eigennamen, 1 die von Sätzen, $(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ die eines n-stelligen Funktors, der aus Ausdrücken der Kategorien $\tau_1, \ldots, \tau_n$ Ausdrücke der Kategorie 1 erzeugt.

b) Das *Alphabet* von $\mathfrak{B}$ besteht aus unendlich vielen Konstanten und Variablen jeder Kategorie, aus den logischen Symbolen $\neg$, $\supset$, $\wedge$, $\equiv$, α und den Klammerzeichen und dem Komma als Hilfszeichen.

c) *Terme*

(1) Konstanten der Kategorie τ sind Terme der Kategorie τ.

(2) Ist F ein Term der Kategorie $(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ und sind $a_1, \ldots, a_n$ Terme der Kategorien $\tau_1, \ldots, \tau_n$, so ist $F(a_1, \ldots, a_n)$ ein Term der Kategorie 1.

(3) Ist A ein Term der Kategorie 1, so auch $\neg A$.

(4) Sind A, B Terme der Kategorie 1, so auch $(A \supset B)$.

(5) Sind a, b Terme derselben Kategorie 0 oder 1, so ist $(a \equiv b)$ ein Term der Kategorie 1.

(6) Ist $A[a]$ ein Term der Kategorie 1, a eine Konstante der Kategorie τ und x eine Variable derselben Kategorie, die in $A[a]$ nicht vorkommt, so ist $\wedge x A[x]$ ein Term der Kategorie 1.

(7) Ist $A[a_1, \ldots, a_n]$ ein Term der Kategorie 1, sind $a_1, \ldots, a_n$ Konstanten der Kategorien $\tau_1, \ldots, \tau_n$ und $x_1, \ldots, x_n$ Variable derselben Kategorien, die in $A[a_1, \ldots, a_n]$ nicht vorkommen, so ist $\alpha x_1, \ldots, x_n A(x_1, \ldots, x_n)$ ein Term der Kategorie $(\tau_1, \ldots, \tau_n)$.

Sätze sind Terme der Kategorie 1. *Rein generelle* Sätze sind solche, die keine Konstanten enthalten. Es sollen die üblichen Klammerregeln gelten. Nach Tarski (vgl. (1923)) kann man auch auf die Operatoren $\neg$ und $\supset$ verzichten, denn man kann definieren:

$\neg A := A \equiv \wedge x^1 (x^1)$

$A \wedge B := \wedge x^{(1)} (B \equiv (x^{(1)}(A) \equiv x^{(1)}(B))$

$A \supset B := \neg(A \wedge \neg B)$[24].

Die Adäquatheit der zweiten Definition ergibt sich daraus, daß es 4 einstellige Satzoperatoren gibt: $O_1A := A$, $O_2A := \neg A$, $O_3A := T$ und $O_4A := \neg T$, wo T eine Tautologie ist. Gilt also das Definiens, so gilt

[24] Würde man die Relation $\equiv$ für beliebige Terme erklären – was nach Freges Ausführungen möglich wäre –, so könnte man nach R. Montague (1970) auch auf $\wedge$ verzichten und definieren:
$\wedge x^\tau A[x^\tau] := \alpha x^\tau A[x^\tau] \equiv \alpha x^\tau (x^\tau \equiv x^\tau)$.

auch $B \equiv (O_3A \equiv O_3B)$, also B, und $B \equiv (A \equiv B)$, also $B \supset A \wedge B$, mit B also $A \wedge B$. Gilt umgekehrt $A \wedge B$, so gilt B, also $B \equiv (O_3A \equiv O_3B)$ und $B \equiv (O_4A \equiv O_4B)$; ferner $B \equiv (O_1A \equiv O_1B)$ und $B \equiv (O_2A \equiv O_2B)$.

2. *Semantik der Sprache* $\mathfrak{B}$

Es sei U eine nichtleere Menge von Objekten[25]. Dann bestimmen wir die Mengen $E_{\tau,U}$ möglicher Extensionen der Kategorie τ über U wie folgt:

$E_{0,U} = U$

$E_{1,U} = \{w, f\}$

$E_{(\tau_1, \ldots, \tau_n),U} = E_{1,U}{}^{E_{\tau_1,U} \times \ldots \times E_{\tau_n,U}}$.

Dabei sei A^B die Menge aller Funktionen, die die Klasse B in die Klasse A abbilden, und $A_1 x \ldots x A_n$ das Cartesische Produkt der Mengen $A_1, \ldots, A_n$, d. h. die Menge aller n-gliedrigen Folgen $(x_1, \ldots, x_n)$, so daß x_i $(1 \leq i \leq n)$ Element von A_i ist.

Eine *Interpretation* von $\mathfrak{B}$ über U ist eine Funktion V, für die gilt

a) $V(a^\tau) \varepsilon E_{\tau,U}$ für alle Konstanten a^τ der Kategorie τ.

b) $V(F(a_1, \ldots, a_n)) = V(F)(V(a_1), \ldots, V(a_n))$

c) $V(\neg A) = w$ gdw. $V(A) = f$

d) $V(A \supset B) = w$ gdw. $V(A) = f$ oder $V(B) = w$

e) $V(a \equiv b) = w$ gdw. $V(a) = V(b)$

f) $V(\wedge x^\tau A[x^\tau]) = w$ gdw. $\wedge V'(V' \underset{a}{=} V \supset V'(A[a^\tau]) = w)$, wo die Konstante a^τ nicht in $\wedge x^\tau A[x^\tau]$ vorkomme.

g) $V(\alpha x_1^{\tau_1} \ldots x_n^{\tau_n} A[x_1^{\tau_1}, \ldots, x_n^{\tau_n}])$ sei jene Funktion $f \varepsilon E_{(\tau_1, \ldots, \tau_n),U}$ für die gilt: $\wedge V'(V' \underset{a_1, \ldots, a_n}{=\!=\!=\!=\!=} V \supset f(V'(a_1^{\tau_1}), \ldots, V'(a_n^{\tau_n})) = V'(A[a_1^{\tau_1}, \ldots, a_n^{\tau_n}]))$, wo die Konstanten $a_1^{\tau_1}, \ldots, a_n^{\tau_n}$ nicht in $\alpha x_1^{\tau_1} \ldots x_n^{\tau_n} A[x_1^{\tau_1}, \ldots, x_n^{\tau_n}]$ vorkommen.

Dabei besage $V \underset{a_1, \ldots, a_n}{=\!=\!=\!=\!=} V'$, daß die Interpretation V mit V′ übereinstimmt bis auf höchstens die Werte für $a_1, \ldots, a_n$. Von den angegebenen Bedingungen kommen in der BS nur (c) bis (f) vor.

Ein Satz A von $\mathfrak{B}$ ist logisch wahr genau dann, wenn A bei allen Interpretationen wahr ist. Wir haben schon gesehen, daß diese Bedingung nicht, wie Frege annimmt, mit der Wahrheit der Allgeneralisierung bei einer Interpretation von $\mathfrak{B}$ über dem Bereich aller Gegenstände zusammenfällt.

[25] Dabei könnte man w, f einschließen; wir tun das aber hier nicht.

3. Das Axiomensystem
Es besteht aus A1 bis A9, bzw. A1, A2, A3*, A7, A8, A9 und den Regeln R1, R2.

3.7 Die Leistung der BS

In der BS hat Frege das erste Logiksystem entwickelt, das modernen Anforderungen nahekommt. Er hat damit sowohl sein Ziel einer ausdrucksstarken logischen Sprache erreicht als auch das eines leistungsfähigen Logikkalküls.

Im letzteren Punkt liegt das Hauptverdienst der BS, das freilich ohne einen präzisen Aufbau der Sprache nicht möglich gewesen wäre. Die Logik der BS geht über die Boolesche Logik weit hinaus. Diese ist, wie wir gesehen haben, eine monadische P. L. Freges System enthält hingegen nicht nur die volle P. L. 1. Stufe mit Identität – also auch die gesamte Relationenlogik, für die bei De Morgan und Schröder nur rudimentäre Ansätze vorlagen –, sondern darüber hinaus auch eine P. L. höherer Stufe, wobei sich Frege allerdings im Effekt auf die P. L. 2. Stufe beschränkt. Das besondere Verdienst Freges besteht in der Einführung der Quantoren; sie bildet die Voraussetzung für eine generelle Formulierung der P. L.[26].

Schon Boole hatte gesehen, daß die Syllogistik nicht zur Formulierung der in der Mathematik nötigen Schlüsse ausreicht. Aber auch Booles Logik ist dafür zu schwach. So läßt sich z. B. der Satz: „Es gibt unendlich viele Primzahlen", d. h. „Zu jeder Primzahl gibt es eine größere" bei Boole nicht darstellen. Dieser Satz hat die Form $\bigwedge x(Px \supset \bigvee y(Py \wedge x<y))$. Er enthält erstens einen Relationsausdruck $x<y$ und zweitens gibt es bei Boole keine verschachtelten Quantoren. Verschachtelte Quantoren lassen sich in der monadischen P. L. zwar eliminieren, aber nicht beim Vorkommen von Relationsausdrücken. So hat auch Frege in ZBS auf die höhere Leistungsfähigkeit seiner Sprache wie seines Kalküls gegenüber Boole und Schröder hingewiesen[27]. Schröder hatte in seiner Rezension der BS (1881) hingegen behauptet, die BS sei schwächer als der Boolesche Kalkül.

[26] Vgl. dazu Freges Aussagen in ZBS (BS, S. 105).
[27] Vgl. dazu auch N, S. 9ff., 16, 30, 51f.

Zusammenfassend kann man sagen, daß Frege mit der BS einen ähnlich bedeutenden Beitrag zur Entwicklung der Logik erbracht hat wie Aristoteles mit der Formulierung der Syllogistik.

3.8 Ergänzungen aus den „Logischen Untersuchungen"

Im Anschluß an die Erörterung der BS soll noch auf einige Ausführungen Freges zu den logischen Operatoren in den LU hingewiesen werden, mit denen er jene aus der BS ergänzt und vertieft hat.

Der Hauptteil von LUI („Der Gedanke") ist erkenntnistheoretischer Natur und wird im 10. Kapitel dargestellt. Bei der Erörterung der *Verneinung* in LUII setzt sich Frege zunächst mit anderen Ansichten auseinander, ohne allerdings die Autoren zu nennen, auf die er sich bezieht. Er geht davon aus, daß es nicht nur wahre, sondern auch falsche Gedanken gibt – als „Gedanke" bezeichnet Frege seit SB den Sinn eines (Aussage-)Satzes, also eine Proposition (vgl. 5.2). Die Verneinung kann daher nicht darin bestehen, einen Gedanken als nicht existierend zu erklären. Er diskutiert dann die These, die Verneinung sei ein „Auflösen des Gedankens in seine Bestandteile" (KS, S. 367). Falsche Gedanken sind keine Gedankentrümmer, und das Beurteilen eines Gedankens ändert an diesem nichts. Eine Auflösung des Gedankens durch einfache Negation würde auch eine doppelte Negation unmöglich machen:

„Kein Ungedanke wird durch Verneinen zum Gedanken, wie kein Gedanke durch Verneinen zum Ungedanken wird". (Ks, S. 368.)

Zur Unterscheidung bejahender und verneinender Urteile in der traditionellen Logik sagt Frege:

„Dazu kommt, daß es gar nicht leicht ist, anzugeben, was ein verneinendes Urteil (ein verneinender Gedanke) sei. Man betrachte die Sätze „Christus ist unsterblich", „Christus lebt ewig", „Christus ist nicht unsterblich", „Christus ist sterblich", „Christus lebt nicht ewig". Wo haben wir nun hier einen bejahenden, wo einen verneinenden Gedanken? Wir sind gewohnt anzunehmen, das Verneinen erstrecke sich auf den ganzen Gedanken, wenn sich das „nicht" mit dem Verbum des Prädikats verbindet. Aber das Verneinungswort bildet grammatisch auch zuweilen einen Teil des Subjekts, wie in dem Satze „kein Mensch wird über hundert Jahre alt". Eine Verneinung kann irgendwo in einem Satze stecken, ohne daß der Gedanke dadurch unzweifelhaft ein verneinender würde. Man sieht, zu welchen kniffligen Fragen der Ausdruck „verneinendes Urteil" (verneinender Gedanke) führen kann. Endlose, mit größtem Scharfsinn geführte und doch im wesentlichen unfruchtbare Streite können die Folge sein. Deshalb stimme ich dafür, daß man die Unterscheidung von verneinenden und bejahenden Urteilen oder Gedanken so lange ruhen lasse, bis man ein Kennzeichen habe, von dem man in jedem Falle ein verneinendes Urteil von einem bejahenden mit Sicherheit unterscheiden könne. Wenn man ein solches Merkmal hat, wird man auch erkennen, welcher Nutzen etwa von jener Unterscheidung zu erhoffen sei. Ich bezweifle zunächst noch, daß dies gelingen werde. Der Sprache wird man dieses Merkmal nicht entnehmen können; denn die Sprachen sind in logischen Fragen unzuverlässig. Ist es doch nicht eine der geringsten Aufgaben des Logikers, auf die Fallstricke hinzuweisen, die von der Sprache dem Denkenden gelegt werden". (KS, S. 369 f.)

Gedanken lassen sich also nicht eindeutig in verneinende und bejahende einteilen. Frege diskutiert dann die Möglichkeit, zwei Urteilsformen anzunehmen: Bejahen und Verneinen. Die Negation würde dann nicht zum Gedanken gehören, sondern zum Urteil; anstelle einer Urteilsform hätten wir deren zwei: Behaupten und Verneinen. (In diesem Sinn unterscheidet z. B. Aristoteles *Kataphasis* und *Apophasis*.)

„Gibt es zwei verschiedene Weisen des Urteilens, von denen jene bei der bejahenden, diese bei der verneinenden Antwort auf eine Frage gebraucht wird? Oder ist das Urteilen in beiden Fällen dasselbe? Gehört das Verneinen zum Urteilen? Oder ist die Verneinung Teil des Gedankens, der dem Urteilen unterliegt?" (KS, S. 372.)

Frege zeigt nun, daß man ohne Negation als Gedankenbestandteil nicht auskommt, denn mit dem Urteil $\vdash \neg A \supset B$ z. B. verneine ich nichts. Wenn man aber eine objektsprachliche Negation hat, ist eine zweite Form der Behauptung überflüssig, denn die Verneinung von A kann man durch $\vdash \neg A$ ausdrücken.

„So ist denn die Annahme von zwei verschiedenen Weisen des Urteilens zu verwerfen. Aber was hängt denn von dieser Entscheidung ab? Vielleicht könnte man sie für wertlos halten, wenn dadurch nicht eine Ersparung an logischen Urbestandteilen und an dem, was ihnen sprachlich entspricht, bewirkt würde. Bei der Annahme von zwei verschiedenen Weisen des Urteilens haben wir nötig: 1. die behauptende Kraft im Falle des Bejahens, 2. die behauptende Kraft im Falle des Verneinens, etwa in unlöslicher Verbindung mit dem Worte „falsch", 3. ein Verneinungswort wie „nicht" in Sätzen, die ohne behauptende Kraft ausgesprochen werden. Nehmen wir dagegen nur eine einzige Weise des Urteilens an, haben wir dafür nur nötig 1. die behauptende Kraft, 2. ein Verneinungswort. Eine solche Ersparung zeigt immer eine weitergetriebene Zerlegung an, und diese bewirkt eine klarere Einsicht. Damit hängt eine Ersparung eines Schlußgesetzes zusammen. Wo wir bei unserer Entscheidung mit einem solchen auskommen, brauchten wir sonst zwei. Wenn wir mit einer Art des Urteilens auskommen können, dann müssen wir es auch". (KS, S. 374.)

Frege legt dann dar, daß die Verneinung sich immer auf ganze Sätze bezieht, nicht nur auf das Prädikat (KS, S. 374 f.). Die Verneinung ist eine Funktion, die auf Gedanken anwendbar ist (KS, S. 375 f.).

Bei der Erörterung von *Gedankengefügen* in LUIII betont Frege zunächst die Leistung der Sprache, mit endlich vielen Ausdrücken unendlich viele Gedanken formulieren zu können.

„Erstaunlich ist es, was die Sprache leistet, indem sie mit wenigen Silben unübersehbar viele Gedanken ausdrückt, daß sie sogar für einen Gedanken, den nun zum ersten Male ein Erdenbürger gefaßt hat, eine Einkleidung findet, in der ihn ein anderer erkennen kann, dem er ganz neu ist. Dies wäre nicht möglich, wenn wir in dem Gedanken nicht Teile unterscheiden könnten, denen Satzteile entsprächen, so daß der Aufbau des Satzes als Bild gelten könnte des Aufbaues des Gedankens". (KS, S. 378.)

Frege betrachtet dann Funktionen, mit denen sich aus vollständigen Gedanken neue vollständige Gedanken bilden lassen. Diese komplexen Gedanken bezeichnet er in Analogie zum Wort „Satzgefüge" als *Gedankengefüge* (KS, S. 379).

„Nicht jeder Satz, der sprachlich aus Sätzen zusammengesetzt ist, kann uns ein brauchbares Beispiel liefern; denn die Grammatik kennt Sätze, die von der Logik nicht als eigentliche Sätze anerkannt werden können, weil sie keine Gedanken ausdrücken. Das zeigen uns die Relativsätze; denn in einem von seinem Hauptsatze getrennten Relativsatze können wir nicht erkennen, was mit dem Relativpronomen bezeichnet werden soll. Wir haben in einem solchen Satze keinen Sinn, nach dessen Wahrheit wir fragen könnten, mit anderen Worten: wir haben als Sinn eines abgetrennten Relativsatzes keinen Gedanken. Wir dürfen also nicht erwarten, daß einem Satzgefüge, bestehend aus einem Hauptsatze und einem Relativsatze, als Sinn ein Gedankengefüge entspreche". (KS, S. 379.)

In LUIII betrachtet Frege zunächst die Konjunktion, die er als „Gedankengefüge 1. Art" bezeichnet, und jene aus zwei Gedanken gebildeten komplexen Gedanken, die sich mit Negation und Konjunktion darstellen lassen. Die Adjunktion $A \vee B$ ergibt sich dabei als $\neg(\neg A \wedge \neg B)$, die Implikation $A \supset B$ als $\neg(A \wedge \neg B)$. Zur logischen Deutung des Wortes „oder" sagt er:

„Vielleicht findet man, daß der hier angegebene Sinn des Wortes „oder" mit dem Sprachgebrauch nicht immer übereinstimmt. Hiergegen sei zunächst bemerkt, daß es bei der Festsetzung des Sinnes wissenschaftlicher Ausdrücke nicht die Aufgabe sein kann, den Sprachgebrauch des Lebens genau zu treffen; dieser ist ja meist für wissenschaftliche Zwecke ungeeignet, wo das Bedürfnis genauerer Prägung gefühlt wird. Es muß dem Naturforscher erlaubt sein, im Gebrauche des Wortes „Ohr" von dem sonst Üblichen abzuweichen. Auf dem Gebiete der Logik können mitanklingende Nebengedanken stören. Nach dem, was über den Gebrauch von „oder" gesagt worden ist, kann wahrheitsgemäß behauptet werden: „Friedrich der Große siegte bei Roßbach, oder zwei ist größer als drei". Da meint jemand: „Sonderbar! was hat der Sieg bei Roßbach mit dem Unsinn zu tun, daß zwei größer als drei sei?" ... Man ist gewohnt, bei Sätzen, die mit „oder" verbunden sind, anzunehmen, daß der Sinn des einen mit dem des andern etwas zu tun habe, daß zwischen ihnen irgendeine Verwandtschaft bestehe; und in einem gegebenen Falle wird man eine solche vielleicht auch angeben können; aber in einem andern Falle wird man eine andere haben, so daß es unmöglich sein wird, eine Sinnverwandtschaft anzugeben, die immer mit dem „oder" verknüpft wäre und zu dem Sinne dieses Wortes gerechnet werden könnte. Aber warum fügt der Redner den zweiten Satz überhaupt an? Wenn er behaupten will, daß Friedrich der Große bei Roßbach siegte, genügte ja dazu der erste Satz; daß der Redner nicht sagen will, zwei sei größer als drei, ist doch anzunehmen. Wenn der Redner sich mit dem ersten Satze begnügt hätte, hätte er mit weniger Worten mehr gesagt. Wozu also dieser Aufwand von Worten? Auch diese Fragen führen nur auf Nebengedanken. Welche Absichten und Beweggründe der Redner habe, gerade dies zu sagen und jenes nicht, geht uns hier gar nichts an, sondern nur das, was er sagt". (KS, S. 384 f.)

Zur logischen Deutung von „wenn-dann" im Sinne der materialen Implikation sagt Frege:

„Man wird vielleicht finden, daß der Sprachgebrauch hierdurch nicht getroffen sei. Demgegenüber muß immer wieder betont werden, daß es der Wissenschaft erlaubt sein muß, ihren eigenen Sprachgebrauch zu haben, daß sie sich der Sprache des Lebens nicht immer unterwerfen kann. Eben darin sehe ich die größte Schwierigkeit der Philosophie, daß sie für ihre Arbeiten ein wenig geeignetes Werkzeug vorfindet, nämlich die Sprache des Lebens, für deren Ausbildung ganz andere Bedürfnisse mitbestimmend gewesen sind, als die der Philosophie. So ist auch die Logik genötigt, aus dem, was sie vorfindet, sich erst ein brauchbares Werkzeug zurechtzufeilen ... Freilich wird diese Auffassung eines hypothetischen Satzgefüges zunächst befremden. Es kommt bei meiner Erklärung nicht darauf an, den Sprachgebrauch des Lebens zu treffen, der für die Zwecke der Logik meist zu verschwommen und schwankend ist. Da drängt sich allerlei heran, z. B. das Verhältnis von Ursache und Wirkung, die Absicht, mit der ein Redender einen Satz von der Form „Wenn B, so A" ausspricht, der Grund, aus dem er seinen Inhalt für wahr hält. Der Redende gibt vielleicht Winke hinsichtlich solcher beim Hörenden etwa auftauchenden Fragen. Solche Winke gehören zum Beiwerke, das in der Sprache des Lebens den Gedanken oft umrankt. Meine Aufgabe ist es hier, durch Abscheidung des Beiwerks als logischen Kern ein Gefüge von zwei Gedanken herauszuschälen, ein Gefüge, welches ich hypothetisches Gedankengefüge genannt habe". (KS, S. 387 f.)

Frege betont, daß Tautologien und Kontradiktionen nicht unsinnig sind. Zu Satz $A \supset A$ sagt er:

„In einem solchen Falle liegen die Fragen nahe: „Drückt dieser Satz einen Gedanken aus? Ist er nicht inhaltsleer? Was erfährt man denn Neues, wenn man ihn hört? Nun, vielleicht hat man, bevor man ihn hört, diese Wahrheit überhaupt nicht gekannt und also auch nicht anerkannt. Insofern kann man doch unter Umständen etwas dadurch erfahren, was einem neu ist. Es ist doch die Wahrheit nicht zu leugnen, daß die Schneekoppe höher als der Brocken ist, wenn die Schneekoppe höher als der Brocken ist. Da nur Gedanken wahr sein können, muß dieses Satzgefüge einen Gedanken ausdrücken und dann ist auch die Verneinung dieses Gedankens ein Gedanke trotz ihrer scheinbaren Unsinnigkeit". (KS, S. 393.)

Frege grenzt auch a. l. Satzverbindungen, bzw. in seiner Terminologie: *mathematische Gedankengefüge* von anderen ab, wobei er nun auch Gefüge von mehr als zwei Gedanken betrachtet (KS, S. 393):

„Zur Bildung aller dieser Gefüge reichen Gedankengefüge erster Art [Konjunktionen] und die Verneinung hin, wobei statt der ersten Art auch irgendeine andere unserer sechs Arten gewählt werden kann [das sind die Formen $A \wedge B$, $\neg A \wedge \neg B$, $\neg A \wedge B$ und ihre Negationen]. Nun drängt sich die Frage auf, ob jedes Gedankengefüge eine solche Bildung hat. Was die Mathematik anbetrifft, bin ich überzeugt, daß in ihr Gedankengefüge anderer Bildung nicht vorkommen. Auch in der Physik, Chemie und Astronomie wird es schwerlich anders sein; aber die Finalsätze mahnen zur Vorsicht und scheinen eine genauere Untersuchung zu fordern. Diese Frage will ich hier unentschieden lassen. Immerhin scheinen Gedankengefüge, die so aus Gefügen erster Art mittels der Verneinung gebildet sind, einer besonderen Benennung wert. Sie mögen *mathematische Gedankengefüge* heißen. Damit soll nicht gesagt sein, daß es andere Gedankengefüge gebe. Doch in anderer Hinsicht erscheinen die mathematischen Gedankengefüge als zusammengehörig. Ersetzt man nämlich in einem solchen einen wahren Gedanken durch einen wahren Gedanken, so ist das so gebildete Gedankengefüge wahr oder falsch, je nachdem das ursprüngliche Gefüge wahr oder falsch ist. Dasselbe gilt, wenn man in einem mathematischen Gedankengefüge einen falschen Gedanken durch einen falschen ersetzt". (KS, S. 394.)

Hier behauptet Frege also im Effekt die *Vollständigkeit des Operatorensystems* $\{\neg, \wedge\}$ und bestimmt extensionale Satzstrukturen als solche, in denen die Substitution äquivalenter Sätze *salva veritate* möglich ist. A. l. Operatoren sind solche, die extensionale Strukturen ergeben; sie drücken also Wahrheitswertfunktionen aus (vgl. KS, S. 375, 377, 379).

Die Arbeit „Logische Allgemeinheit" (N, S. 278 ff.), die als Fortsetzung der LU gedacht war, ist Fragment geblieben – es ist ca. 1923 entstanden. Darin geht Frege zunächst von Allsätzen der Form „Alle S sind P" aus, analysiert sie als Sätze der Gestalt: „Für jedes Objekt x gilt: Wenn x ein S ist, dann ist x ein P". Danach bricht jedoch das Fragment ab, bevor Frege zu einer genaueren Erörterung von Allsätzen der einfachen Form $\wedge x A[x]$ kommt.

In den LU finden sich also Erörterungen zu den logischen Operatoren, die beim Aufbau logischer Symbolsprachen meist fehlen, zu einer umsichtigen Rechtfertigung des gewohnten Vorgehens aber doch erforderlich sind.

4 Grundlagen der Arithmetik

4.1 Zielsetzung

Mit den GLA beginnt Frege die Durchführung seines Programms einer logischen Begründung der Arithmetik, deren Vorbereitung die BS war. In der Einleitung sagt er, die Mathematiker vermöchten schon auf die einfache Frage, was die Zahl Eins sei, keine befriedigende Antwort zu geben:

„Auf solche Fragen werden wohl auch die meisten Mathematiker keine genügende Antwort bereit haben. Ist es nun nicht für die Wissenschaft beschämend, so im Unklaren über ihren nächstliegenden und scheinbar so einfachen Gegenstand zu sein? Um so weniger wird man sagen können, was Zahl sei. Wenn ein Begriff, der einer großen Wissenschaft zu Grunde liegt, Schwierigkeiten darbietet, so ist es doch wohl eine unabweisbare Aufgabe, ihn genauer zu untersuchen und diese Schwierigkeiten zu überwinden, besonders da es schwer gelingen möchte, über die negativen, gebrochenen, komplexen Zahlen zu voller Klarheit zu kommen, solange noch die Einsicht in die Grundlage des ganzen Baues der Arithmetik mangelhaft ist". (GLA, S. XIV.)

Frege will die natürlichen Zahlen wie den Zahlbegriff mit logischen Mitteln definieren und mithilfe dieser Definitionen die Grundgesetze der Arithmetik auf rein logischem Wege beweisen. Zunächst will er aber zeigen, daß all das, was bisher über die Grundlagen der Arithmetik gesagt wurde, unbefriedigend ist:

„Um nun jenen Wahn zu widerlegen, daß in Bezug auf die positiven ganzen Zahlen eigentlich gar keine Schwierigkeiten obwalten, sondern allgemeine Übereinstimmung herrsche, schien es mir gut, einige Meinungen von Philosophen und Mathematikern über die hier in Betracht kommenden Fragen zu besprechen. Man wird sehen, wie wenig von Einklang zu finden ist, so daß geradezu entgegengesetzte Ansprüche vorkommen ... Hierdurch suche ich das Bedürfnis nach einer genaueren Untersuchung zu wecken. Zugleich will ich durch die vorausgeschickte Beleuchtung der von andern ausgespro-