Modallogik

Seminarvortrag ETHZ-GESS:

Logik: Von Aristoteles bis Gödel (FS16)

18.5.2016

Philipp Schmocker & Stephan Allenspach

Ablauf

- Teil I: Modallogik
  - Einführung und Definitionen
  - Normalsystem
  - Modallogische Systeme
- Teil II: Semantik der Modallogik
  - Einführung und Definitionen
  - Theoreme
  - Beziehung zwischen den Modallogische Systemen und Frames

Notation

(1) Ausagenvariablen: A, B, C

(2) Nicht-logische Zeichen: „(“ und „)“

(3) Junktoren:

- Zweistellig: $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ (Bsp: $A \wedge B$)
- Einstellig: $\neg$ (Bsp: $\neg A$)
- Nullstellig: $\bot$, $\top$

- Wir können aus $\rightarrow$ und $\bot$ alle anderen Junktoren konstruieren [Bsp. $\neg p$ ist äquivalent zu $(p \rightarrow \bot)$]

Definition Modalsätze

(3) Modaloperatoren:

- Notwendig („In **allen** möglichen Welten gilt“): □
- Möglich („In **einer** möglichen Welten gilt“): ◇

- ◇ (bzw. □) und ¬ kommutieren nicht:
  - ◇¬p (Bsp: Es ist möglich, dass Sokrates nichts weiss)
  - ¬◇p (Bsp: Es ist nicht möglich, dass Sokrates etwas weiss)
- Wir können ◇ aus □ konstruieren:
  - ◇p ist äquivalent zu ¬□¬p

Definition Modalsätze

- Wir betrachten Sequenzen aus den Objekten
  a) $\bot$, $\rightarrow$, $\Box$ [bzw. $\neg$, $\leftrightarrow$, $\wedge$, $\vee$] und „(“ & „)“
  b) Atomare Sätze (p,q etc. als Variablen für diese)
- Definitionen:
  (1) $\bot$ ist ein Modalsatz
  (2) Jeder atomarer Satz ist ein Modalsatz
  (3) A und B Modalsätze, dann (A$\rightarrow$B) ein Modalsatz
  (4) A Modalsatz, dann $\Box$(A) auch ein Modalsatz

Definition System

- Ein System der Modallogik besteht aus
  a) Einer Menge von Modalsätzen (Axiome)
  b) Einer Menge von Schlussregeln (Rules of Inference)
- Ein Beweis besteht aus einer endlichen Anzahl Sequenzen von Modalsätzen, welche aufgebaut sind aus
  a) Axiomen
  b) Bereits hergeleiteten Modalsätzen („Theoreme“)
- Notation:
  - $L \vdash A$ heisst: A ist ein Theorem des Systems L

Schlussfolgerungen

- Modus Ponens:
  - $\dfrac{A, A \rightarrow B}{B}$
  - Alternativ: <(A→B),A,B>
- Vernotwendigung („Necessitation“):
  - Wenn L ⊢ A dann auch L ⊢ □A
  - Alternativ: <A, □A >

Distributionsaxiom

- Das Distributionsaxiom hat die Form:
  - $\Box(A \rightarrow B) \rightarrow (\Box A \rightarrow \Box B)$
  - Bsp:
    - A: Es regnet
    - B: Die Strasse wird nass
    - $\Box(A \rightarrow B)$: In allen möglichen Welten gilt, dass falls es regnet die Strasse nass wird
    - $(\Box A \rightarrow \Box B)$: Falls es in allen möglichen Welten regnet, wird in allen möglichen Welten die Strasse nass

Substitution

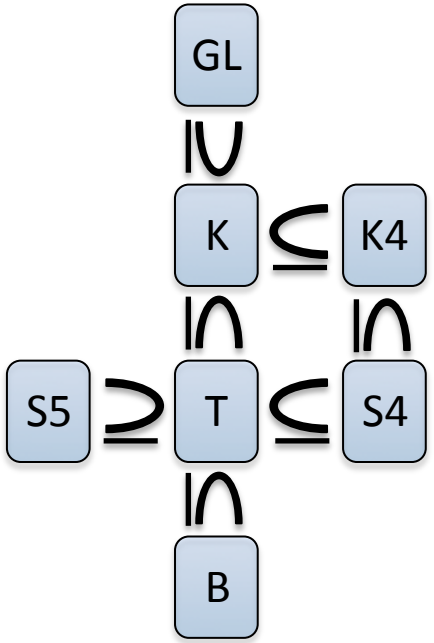
- Sei F ein Modalsatz
- Wir schreiben $F_p(A)$ für die *Substitution von A für p in F*
- Bsp:
  - F=(p → ¬p)
  - A=$q_1 \wedge q_2$

$$F_p(A) = A \rightarrow \neg A = (q_1 \wedge q_2) \rightarrow \neg(q_1 \wedge q_2)$$
$$= (q_1 \wedge q_2) \rightarrow (\neg q_1 \vee \neg q_2)$$

- Definitionen:
  (1) Wenn F=p, dann $F_p(A) = A$
  (2) Wenn F=q (q≠p), dann $F_p(A) = q$
  (3) Wenn F=⊥, dann $F_p(A) = \bot$
  (4) $(F \rightarrow G)_p(A) = F_p(A) \rightarrow G_p(A)$ und $(\Box F)_p(A) = \Box(F_p(A))$

Die 7 Modallogischen Systeme

- Für jedes dieser 7 System gilt:
  - Sie beinhalten alle Tautologien
  - Das Distributionsaxiom gehört dazu
  - Die Schlussregeln sind Modus Ponens und Vernotwendigung
- K: Hat sonst keine Axiome
- K4: $\Box A \rightarrow \Box\Box A$
- T: $\Box A \rightarrow A$
- S4: $\Box A \rightarrow \Box\Box A$ & $\Box A \rightarrow A$
- B: $\Box A \rightarrow A$ & $A \rightarrow \Box\Diamond A$
- S5: $\Box A \rightarrow A$ & $\Diamond A \rightarrow \Box\Diamond A$
- GL: $\Box(\Box A \rightarrow A) \rightarrow \Box A$



Normalsysteme

- Ein System wird *normal* genannt, wenn
  (1) Die Menge seiner Theoreme alle Tautologien und das Distributionsaxiom enthält
  (2) Es abgeschlossen ist unter Modus Ponens, Vernotwendigung und Substitutionen
- Die Kripke-Semantik „K“ ist ein Normalsystem
- Somit sind auch alle Erweiterungs-Systeme (von K) Normalsysteme

Die 7 Modallogischen Systeme

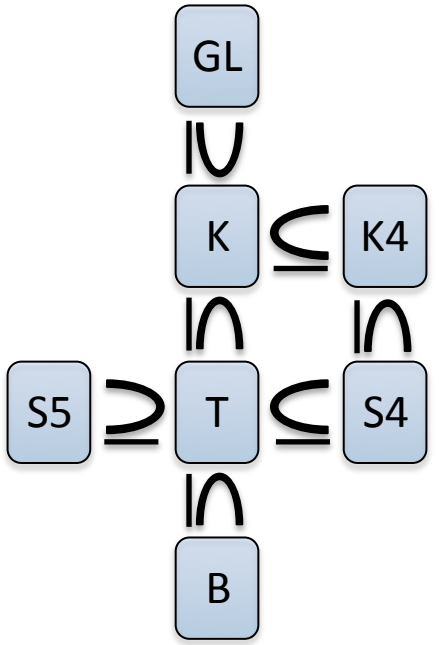
- Im Folgenden nehmen wir an: L sei ein normales System
- **Theorem 1:** Wir nehmen an $L \vdash A \rightarrow B$, dann gilt $L \vdash \Box A \rightarrow \Box B$
- *Beweis:*
  - Vernotwendigung: $L \vdash \Box(A \rightarrow B)$
  - Distributionsaxiom: $\Box(A \rightarrow B) \rightarrow \Box A \rightarrow \Box B$
- **Theorem 2:** Wir nehmen an $L \vdash A \leftrightarrow B$, dann gilt $L \vdash \Box A \leftrightarrow \Box B$
- *Beweis:*
  - Logische Umformung: $L \vdash A \rightarrow B$ und $L \vdash B \rightarrow A$
  - Theorem 1: $L \vdash \Box A \rightarrow \Box B$ und $L \vdash \Box B \rightarrow \Box A$
  - Logische Umformung: $L \vdash \Box A \leftrightarrow \Box B$

Die 7 Modallogischen Systeme

- **Theorem 3:** $L \vdash \Box(A \wedge B) \leftrightarrow (\Box A \wedge \Box B)$
- *Beweis:*
  - Wir zeigen zuerst $\rightarrow$:
    - Es gilt $L \vdash (A \wedge B) \rightarrow A$ und $L \vdash (A \wedge B) \rightarrow B$
    - Theorem 1: $L \vdash \Box(A \wedge B) \rightarrow \Box A$ und $L \vdash \Box(A \wedge B) \rightarrow \Box B$
    - Was wir umschreiben zu $L \vdash \Box(A \wedge B) \rightarrow (\Box A \wedge \Box B)$
  - Nun zeigen wir $\leftarrow$:
    - Es gilt $L \vdash A \rightarrow (B \rightarrow (A \wedge B))$
    - Theorem 1: $L \vdash \Box A \rightarrow \Box(B \rightarrow (A \wedge B))$
    - Distributionsaxiom: $\Box(B \rightarrow (A \wedge B)) \rightarrow \Box B \rightarrow \Box(A \wedge B)$
    - Somit $L \vdash \Box A \rightarrow \Box(A \wedge B)$ [vertausche A&B: $\Box B \rightarrow \Box(A \wedge B)$]
    - Was wir umschreiben zu $(\Box A \wedge \Box B) \rightarrow \Box(A \wedge B)$

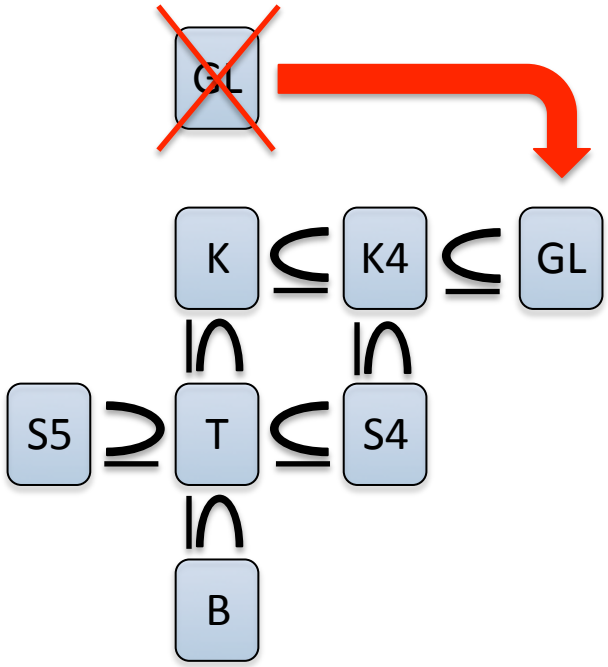
Die 7 Modallogischen Systeme

- Man kann zeigen, dass sich die Struktur des Diagramms (durch fortfahren mit der „Theorem-Sequenz“) umformen lässt
  - Repetition
    - K: Hat sonst keine Axiome
    - K4: $\Box A \rightarrow \Box\Box A$
    - T: $\Box A \rightarrow A$
    - S4: $\Box A \rightarrow \Box\Box A$ & $\Box A \rightarrow A$
    - B: $\Box A \rightarrow A$ & $A \rightarrow \Box\Diamond A$
    - S5: $\Box A \rightarrow A$ & $\Diamond A \rightarrow \Box\Diamond A$
    - GL: $\Box(\Box A \rightarrow A) \rightarrow \Box A$



Die 7 Modallogischen Systeme

- Man kann zeigen, dass sich die Struktur des Diagramms (durch fortfahren mit der „Theorem-Sequenz“) umformen lässt
  - Repetition
    - K: Hat sonst keine Axiome
    - K4: $\Box A \rightarrow \Box\Box A$
    - T: $\Box A \rightarrow A$
    - S4: $\Box A \rightarrow \Box\Box A$ & $\Box A \rightarrow A$
    - B: $\Box A \rightarrow A$ & $A \rightarrow \Box\Diamond A$
    - S5: $\Box A \rightarrow A$ & $\Diamond A \rightarrow \Box\Diamond A$
    - GL: $\Box(\Box A \rightarrow A) \rightarrow \Box A$

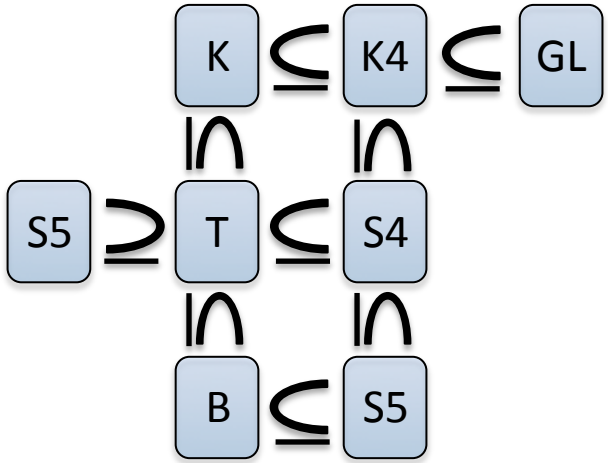


Die 7 Modallogischen Systeme

- **Theorem 18:** GL $\vdash \Box A \rightarrow \Box\Box A$
- *Beweis:*
  - Tautologie: GL $\vdash A \rightarrow \{(\Box\Box A \wedge \Box A) \rightarrow (\Box A \wedge A)\}$
  - Theorem 3: GL $\vdash A \rightarrow \{\Box(\Box A \wedge A) \rightarrow (\Box A \wedge A)\}$
  - Theorem 2: GL $\vdash \Box A \rightarrow \Box\{\Box(\underbrace{\Box A \wedge A}_{B}) \rightarrow (\underbrace{\Box A \wedge A}_{B})\}$
  - Axiom von GL: GL $\vdash \Box(\Box B \rightarrow B) \rightarrow \Box B$ und somit folgt
    GL $\vdash \Box A \rightarrow \Box\{\Box(\Box A \wedge A) \rightarrow (\Box A \wedge A)\} \rightarrow \Box(\Box A \wedge A)$
  - Verwende Thm. 2 und Tautologie $\Box A \wedge A \rightarrow \Box A$: $\Box(\Box A \wedge A) \rightarrow \Box\Box A$
  - Nun: GL $\vdash \Box A \rightarrow \Box\{\Box(\Box A \wedge A) \rightarrow (\Box A \wedge A)\} \rightarrow \Box(\Box A \wedge A) \rightarrow \Box\Box A$
  - Abgekürzt: GL $\vdash \Box A \rightarrow \Box\Box A$ (Axiom von K4) und somit K4 in GL

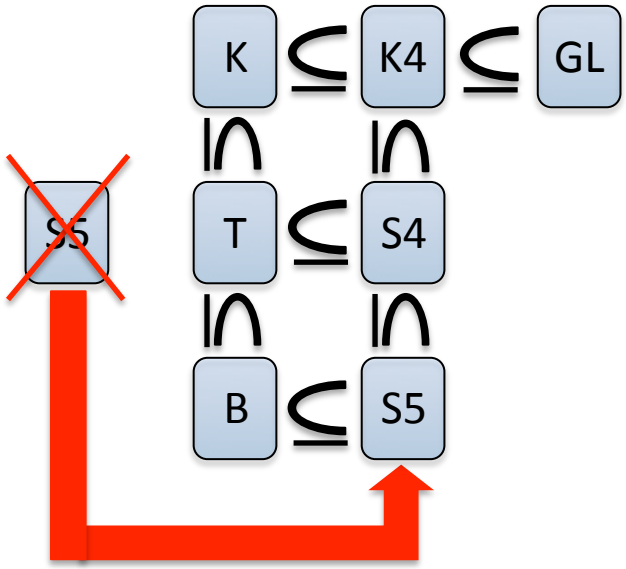
Die 7 Modallogischen Systeme

- Man kann zeigen, dass sich die Struktur des Diagramms (durch fortfahren mit der „Theorem-Sequenz“) umformen lässt
  - Repetition
    - K: Hat sonst keine Axiome
    - K4: $\Box A \rightarrow \Box\Box A$
    - T: $\Box A \rightarrow A$
    - S4: $\Box A \rightarrow \Box\Box A$ & $\Box A \rightarrow A$
    - B: $\Box A \rightarrow A$ & $A \rightarrow \Box\Diamond A$
    - S5: $\Box A \rightarrow A$ & $\Diamond A \rightarrow \Box\Diamond A$
    - GL: $\Box(\Box A \rightarrow A) \rightarrow \Box A$



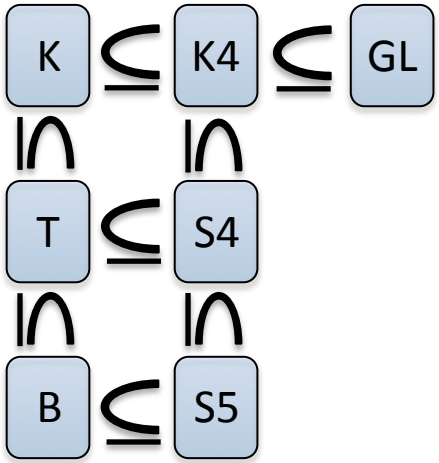
Die 7 Modallogischen Systeme

- Man kann zeigen, dass sich die Struktur des Diagramms (durch fortfahren mit der „Theorem-Sequenz“) umformen lässt
  - Repetition
    - K: Hat sonst keine Axiome
    - K4: $\Box A \rightarrow \Box\Box A$
    - T: $\Box A \rightarrow A$
    - S4: $\Box A \rightarrow \Box\Box A$ & $\Box A \rightarrow A$
    - B: $\Box A \rightarrow A$ & $A \rightarrow \Box\Diamond A$
    - S5: $\Box A \rightarrow A$ & $\Diamond A \rightarrow \Box\Diamond A$
    - GL: $\Box(\Box A \rightarrow A) \rightarrow \Box A$



Die 7 Modallogischen Systeme

- Man kann zeigen, dass sich die Struktur des Diagramms (durch fortfahren mit der „Theorem-Sequenz“) umformen lässt
  - Repetition
    - K: Hat sonst keine Axiome
    - K4: $\Box A \rightarrow \Box\Box A$
    - T: $\Box A \rightarrow A$
    - S4: $\Box A \rightarrow \Box\Box A$ & $\Box A \rightarrow A$
    - B: $\Box A \rightarrow A$ & $A \rightarrow \Box\Diamond A$
    - S5: $\Box A \rightarrow A$ & $\Diamond A \rightarrow \Box\Diamond A$
    - GL: $\Box(\Box A \rightarrow A) \rightarrow \Box A$



Mögliche Welten

- Leibniz: Wir leben in der tatsächlichen Welt
  - Unsere Welt ist nur eine von vielen möglichen Welten
- Kripke: Wir können diese Idee auf die Modallogik anwenden
  - Aussagen können in einigen Welten wahr sein, während sie in anderen Welten falsch sind
  - Einige Aussagen können in **allen** möglichen Welten wahr sein (Notwendigkeit)
  - Einige Aussagen können auch nur in **einer** möglichen Welt wahr sein (Möglichkeit)

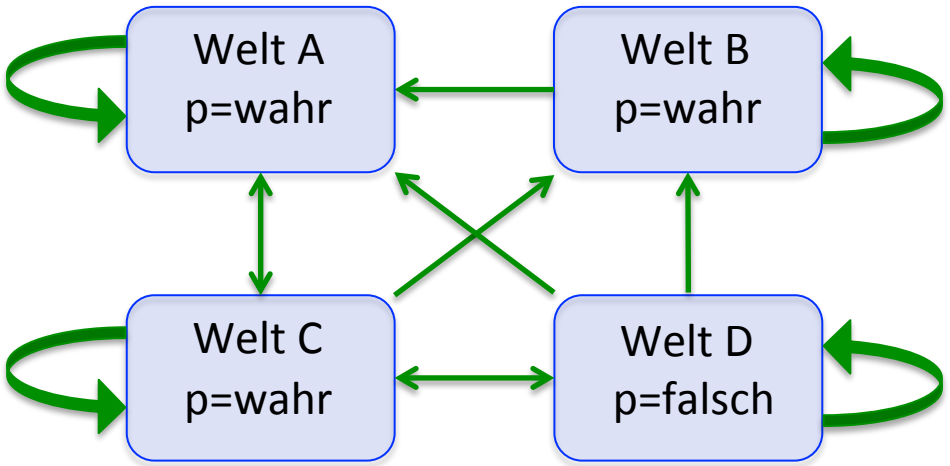
Mögliche Welten

- Können wir **alle** möglichen Welten sehen?
- Könnten wir dann, wenn wir in anderen Welten leben würden, Welten sehen welche wir jetzt von unserer nicht sehen können?

- Kann es sein, dass man von einer speziellen Welt in eine andere Welt sieht, während dies umgekehrt nicht möglich ist?

Mögliche Welten

- Diese *Zugänglichkeit* (accessibility) wirkt sich auf die Notwendigkeit und Möglichkeit einer Aussage aus
- Beispiel:
  - Welt A: $\Box p$
  - Welt B: $\Box p$
  - Welt C: $\Diamond p$
  - Welt D: $\Diamond p$



(Annahme: R sei reflexiv)

Relationen

- Diese Zugänglichkeit (eine Welt von einer anderen aus sehen) ist eine binäre Relation auf den Welten
- Wir definieren:
  (1) Sei W die Menge aller Welten
  (2) Sei R eine *Relation* auf W, wenn für alle x,w gilt wRx, dann gilt x,w in W
  (3) R ist *reflexiv* auf W, wenn für **alle** w in W: wRw
  (4) R ist *irreflexiv* auf W, wenn für **kein** w in W: wRw

Relationen

(5) R ist *antisymmetrisch* auf W, wenn für **alle** w,x in W gilt, dass wenn wRx und auch xRw gilt, dann muss w=x

(6) R ist *transitiv* auf W, wenn für **alle** w,x,y in W gilt, dass wRx und xRy gilt folgt wRy

(7) R ist *symmetrisch* auf W, wenn für **alle** w,x gilt, dass falls wRx, dann auch xRw

(8) R ist *euklidisch* auf W, wenn für **alle** w,x,y in W gilt, dass wenn wRx und auch wRy gilt, folgt xRy (bzw. auch yRx)

Bemerkung: R ist eine Äquivalenzrelation auf W, wenn

- R reflexiv auf W
- R symmetrisch auf W
- R transitiv auf W

Definitionen

- Ein *Frame* ist ein geordnetes Paar <W,R>, wobei W nichtleer und R eine binäre Relation über W ist
  - <W,R> ist endlich gdw W endlich ist
  - W ist die *Domäne* von <W,R>
  - R ist die *Zugänglichkeitsrelation* (accessibility relation)
  - Man sagt <W,R> besitzt eine binäre Relation gdw auch R diese besitzt (z.b. <W,R> ist transitiv, wenn R transitiv ist)
- Eine *Interpretation* (valuation) V auf W ist eine Relation zwischen Elementen auf W und atomaren Sätzen (sprich V als „verifiziert“)
- Ein Tripel <W,R,V> ist ein *Modell*, welches auf dem Frame <W,R> basiert
  - Ein Modell besitzt die gleichen Eigenschaften Endlichkeit, Transitivität etc. wie das Frame <W,R>

Definitionen

- Für jeden Modalsatz A, jedes Modell M=<W,R,V> und jede Welt in W definieren wir die Relation: M,w |= A
- Diese hat folgende Eigenschaften:
  - (1) Wenn A=p (p atomarer Satz), dann: M,w |= A gdw wVp („In Welt w gilt p“)
  - (2) Wenn A=⊥, dann gilt nicht: M,w |= A
  - (3) Wenn A=(B→C), dann M,w |= A gdw
    - a) Entweder ¬M,w |= B
    - b) Oder M,w |= C (und M,w |= B)
  - (4) Wenn A=□B, dann M,w |= A gdw für alle x, für welche gilt wRx, auch gilt M,w |= B (analog wird A=◇B definiert)

Definitionen

- Ein Satz A heisst *wahr* (true) in einer Welt W in einem Modell M, gdw M,w |= A
- Ein Satz A heisst *gültig* (valid) in einem Modell M=<W,R,V>, gdw für alle w in W, A wahr ist in M

Eigenschaften der Modelle

- Es sei M ein Modell und w in W
- Jede Tautologie ist wahr in jeder Welt w in W
- Wenn A und (A→B) wahr sind in w, dann ist auch B wahr (Modus Ponens)
- Das Distributionsaxiom $\Box(A \rightarrow B) \rightarrow \Box A \rightarrow \Box B$ ist wahr in w

- Wenn A gültig ist in M, dann ist auch $\Box A$ gültig in M (Vernotwendigung)

- Daher sind die Theoreme von K (Kripke Semantik) gültig in allen Modellen und folglich auch in allen Frames

Theoreme

- **Theorem 5:** □p→p ist gültig in <W,R>, gdw R reflexiv auf W
- *Beweis:*
  (1) Wir nehmen an □p→p ist gültig in <W,R>. Sei w eine beliebige Welt in W. Wir wollen zeigen wRw:
  - Sei V eine Interpretation auf W s.d. für alle x in W: xVp gdw wRx
  - Wenn wRx, dann xVp und somit M,x|=p. Also gilt M,w|=□p
  - Durch Annahme M,w|=□p→p, gilt dann M,w|=p, also wVp
  - Nach Definition von V folgt also wRw

Theoreme

- *Beweis:*
  (2) Wir nehmen an R ist reflexiv auf W. Sei V eine Interpretation auf W und wir nehmen an x sei in W. Wir wollen zeigen, dass dann $\Box p \rightarrow p$ folgt:
  - Wenn $M,w \models \Box p$ für alle x gilt, verlangen wir $M,x \models p$, falls xRw
  - Durch die Reflexivität (wRw) folgt dann auch $M,w \models p$
  - Somit gilt $M,w \models \Box p \rightarrow p$

Theoreme

- Auf ähnliche Weise beweist man folgende Theoreme:
- **Theorem 6:** $\Box p \rightarrow \Box\Box p$ ist gültig in <W,R> gdw R ist transitiv auf W
- **Theorem 7:** $p \rightarrow \Box\Diamond p$ ist gültig in <W,R> gdw R ist symmetrisch auf W
- **Theorem 8:** $\Diamond p \rightarrow \Box\Diamond p$ ist gültig in <W,R> gdw R ist euklidisch auf W

Theoreme

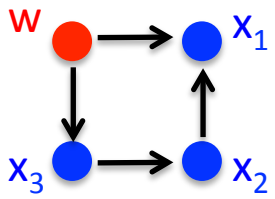
- **Theorem 9: (6 Korrektheitstheoreme)**
  a) Wenn K $\vdash$ A, dann ist A gültig in allen Frames
  b) Wenn K4 $\vdash$ A, dann ist A gültig in allen transitiven Frames
  c) Wenn T $\vdash$ A, dann ist A gültig in allen reflexiven Frames
  d) Wenn S4 $\vdash$ A, dann ist A gültig in allen reflexiven und transitiven Frames
  e) Wenn B $\vdash$ A, dann ist A gültig in allen reflexiven und symmetrischen Frames
  f) Wenn S5 $\vdash$ A, dann ist A gültig in allen reflexiven und euklidischen Frames

Theoreme

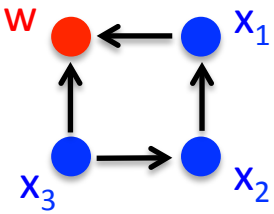
- *Beweis: (Theorem 9c)*
  - Wir nehmen an $T \vdash A$ und <W,R> sei reflexiv
  - Mit **Theorem 5** folgt, dass $\Box p \rightarrow p$ gültig ist in <W,R>
  - Weil wir p für A substituieren können, gilt durch $\Box p \rightarrow p$ auch $\Box A \rightarrow A$
  - Weil alle Tautologien und das Distributionsaxiom in **allen** Modellen gelten, sind dann alle Axiome von T gültig in <W,R>
  - Da alle Sätze, welche in <W,R> gültig sind, geschlossen sind unter Modus Ponens und Vernotwendigung, ist A gültig in <W,R>

Zusätzliche Definitionen

- Ein Element w einer Menge X wird *R-kleinstes* (R-least) Element von X genannt, wenn **xRw** für **kein** x in X gilt



- Ein Element w einer Menge X wird *R-grösstes* (R-greatest) Element von X genannt, wenn **wRx** für **kein** x in X gilt



Zusätzliche Definitionen

- Eine Relation R heisst *wohlfundiert* (wellfounded), wenn es für **jede** nichtleere Menge X ein R-kleinstes Element gibt
- Eine Relation R heisst *umgekehrt wohlfundiert* (converse wellfounded), wenn es für **jede** nichtleere Menge X ein R-grösstes Element gibt
- Bemerkung: Falls R umgekehrt wohlfundiert ist, dann muss R zusätzlich irreflexiv sein
  - Falls wRw gelten würde, dann hätte die nichtleere Menge X={w} kein R-grösstes Element

Weitere Theoreme

- **Theorem 10:** $\Box(\Box p \rightarrow p) \rightarrow \Box p$ ist gültig in <W,R> gdw R transitiv und umgekehrt wohlfundiert
- **Theorem 11:** Sei F=<W,R> endlich und transitiv, dann ist F irreflexiv, gdw F umgekehert wohlfundiert ist

- **Theorem 12:** Wenn GL $\vdash$ A, dann ist A einerseits
  (1) In allen transitiven und umgekehrt wohlfundierten Frames gültig

  und andererseits auch

  (2) In allen endlichen, transitiven und irreflexiven Frames gültig

Systeme und Frames

Systeme	Gültig in welchen Frames?
K:	In allen
K4: $\Box A \rightarrow \Box\Box A$	In allen transitiven
T: $\Box A \rightarrow A$	In allen reflexiven
S4: $\Box A \rightarrow \Box\Box A$ & $\Box A \rightarrow A$	In allen transitiven und reflexiven
B: $\Box A \rightarrow A$ & $A \rightarrow \Box\Diamond A$	In allen reflexiven und symmetrischen
S5: $\Box A \rightarrow A$ & $\Diamond A \rightarrow \Box\Diamond A$	In allen reflexiven und euklidischen
GL: $\Box(\Box A \rightarrow A) \rightarrow \Box A$	In allen transitiven & umgekehrt wohlfundierten **und** In allen endlichen, transitiven und irreflexiven

Fragen?