EVA PICARDI

Alfred North Whitehead / Bertrand Russell: *Principia Mathematica* (1910–13)

Im September 1930 fand in Königsberg eine Tagung über die Erkenntnislehre der exakten Wissenschaften statt. Im Mittelpunkt der Diskussion standen die Auseinandersetzungen über das Thema Grundlagen der Mathematik. Die Akten der Tagung, die 1931 in der von Rudolf Carnap und Hans Reichenbach herausgegebenen Zeitschrift *Erkenntnis* erschienen, vermitteln dem Leser den Eindruck, es handele sich um ein vergleichsweise neues Forschungsgebiet, das wie Gallien bereits »in partes tres« unter die streitbaren Stämme der Formalisten, Intuitionisten und Logizisten aufgeteilt war. Als Sprecher dieser drei Gruppen traten in Königsberg Johann von Neumann, Arend Heyting und Rudolf Carnap auf. Der eigentliche Wegbereiter des logizistischen Standpunkts war der deutsche Mathematiker und Philosoph Gottlob Frege gewesen.[1] Aber erst durch Russells 1903 erschienenes Buch *The Principles of Mathematics* wurde eine größere Leserschaft von Philosophen und Mathematikern mit der These bekanntgemacht, Mathematik sei nur erweiterte Logik. Weitere führende Vertreter der logizistischen Richtung waren Frank Ramsey, Leon Chwistek und Rudolf Carnap. Dies ist das geistige Klima, in dem die Ideen der *Principia Mathematica* (im folgenden abgekürzt als: PM) eine wichtige Rolle spielen.

Die drei Bände der PM sind das Ergebnis von Russells ursprünglichem Vorhaben, in Zusammenarbeit mit seinem ehemaligen Cambridger Lehrer Alfred North Whitehead

1 Wichtige Beiträge stammen freilich auch von dem Mathematiker Richard Dedekind, der sich jedoch nicht so eingehend mit der philosophischen Bedeutung seiner logischen und mathematischen Resultate beschäftigt hat.

einen Fortsetzungsband der *Principles of Mathematics* zu schreiben. In dieses Projekt sollte Whitehead vor allem seine mathematischen Fertigkeiten (speziell im Hinblick auf die Darstellung der Relationenlogik) einbringen sowie seine »konservative« Einstellung zum Korpus der reinen Mathematik: Die logische Grundlegung sollte möglichst viel – im Idealfall die ganze – Mathematik bestehen lassen (freilich ohne die eventuell in ihr enthaltenen Widersprüche). Den philosophischen Teil dagegen überließ Whitehead ohne Einschränkungen Russell (vgl. Russell, 1959, S. 74). Da es hier im wesentlichen um die philosophische Bedeutung der PM geht, stammen die im folgenden erörterten Gedanken großenteils von Russell.

Die PM könnte man als Verwirklichung des logizistischen Ideals ansehen, wie es 1879 von Frege in der *Begriffsschrift* verkündet und in den beiden Bänden der *Grundgesetze der Arithmetik* vervollkommnet worden war. Zunächst mußte jedoch ein bösartiges Virus, das den im übrigen gesunden Körper dieses Werks infiziert hatte, ausgemerzt oder wenigstens unter Kontrolle gebracht werden. Dieses Virus – besser bekannt unter dem Namen »Russellsche Antinomie« – war 1901 von Russell entdeckt worden, als er gerade über Cantors Beweis des Satzes nachdachte, daß eine Menge mehr Untermengen hat als Elemente. Russell erkannte, daß sich aus gewissen Voraussetzungen, die auf den ersten Blick selbstverständlich erscheinen, nicht nur eine Reihe einigermaßen überraschender Folgerungen ableiten läßt, sondern eine ganze Familie von Kontradiktionen (also Sätzen der Form »*p* und nicht *p*«).

Die unkomplizierteste dieser Kontradiktionen betrifft den Ausdruck »unprädizierbar«; sie bemüht noch nicht einmal den Begriff der Klasse oder Menge. Eine Eigenschaft heiße »unprädizierbar«, wenn sie nicht von sich selbst ausgesagt werden kann. Nun stellt sich die Frage, ob die Eigenschaft »unprädizierbar« ihrerseits unprädizierbar ist. Die widersprüchliche Antwort lautet: Wenn ja, so ist sie aufgrund der Definition von »unprädizierbar« nicht unprädizierbar; wenn nicht, so kann sie nicht von sich selbst ausgesagt werden und ist – wieder aufgrund der Definition von »unprädizierbar« – unprädizierbar. Die bekannteste dieser Kontradiktionen ist Russells Antinomie der Klasse von Klassen, die sich nicht selbst enthalten. Betrachten wir das Prädikat »*x* ist eine Klasse, die sich selbst nicht als Element enthält«. Wird nun durch dieses Prädikat eine Klasse *w* definiert, so stellen wir fest, daß *w*, sofern sie sich selbst als Element enthält, sich nicht selbst enthält, und umgekehrt. Also gibt es eine Klasse wie *w* gar nicht.

Nun lassen sich derartige Kontradiktionen im Rahmen des Fregeschen Systems der *Grundgesetze* ohne weiteres ableiten. Dort wird die fragwürdige Voraussetzung als Axiom (Grundgesetz *V*) herausgestellt. Dieses Grundgesetz *V* besagt, daß zwei Begriffswörter genau dann denselben Umfang haben, wenn sie für *alle* Gegenstände als Argumente dieselben Werte annehmen. Dieses Axiom soll, wie Frege betont, nicht als Definition von »Begriffsumfang« oder »Wertverlauf« aufgefaßt werden, sondern als wahre Aussage, die den intuitiv erkennbaren Zusammenhang zwischen einer Klasse und dem sie definierenden Prädikat wiedergibt.

Aus der Entdeckung des Widerspruchs zieht Russell den Schluß, es sei offenbar unberechtigt, anzunehmen, daß »jede logisch bestimmte Norm eine Klasse definiert«. Dementsprechend widmet er sich in der Zeit zwischen 1901 und 1908 vor allem der Suche nach passenden Beschränkungen für solche Normen, um zu gewährleisten, daß durch sie tatsächlich Klassen bestimmt werden. Solche Normen nennt Russell 1906 – unabhängig von der jeweils gewählten Art der Beschränkung – »prädikativ« und benutzt damit ein Wort, das in späteren Arbeiten andere Bedeutungen annimmt. Da der von Russell entdeckte Widerspruch nichts mit den sogenannten Paradoxien des Unendlichen zu tun hat und gleich drei Begriffe betrifft (nämlich »wohldefiniertes Prädikat«, »Begriff« und »Klasse« – wobei die ersten zwei mit Sicherheit zur Logik gehören, während der dritte ihr normalerweise zugeschlagen wird), leuchtet unschwer ein, daß Frege, als er Russells Mitteilung des Widerspruchs vom 16. Juni 1902 erhielt, meinte, die Mathematik sei damit »ins Wanken geraten«. Dennoch dauerte es nur ein Jahrzehnt, bis mit den PM ein eindrucksvolles Denkmal enthüllt und als Verwirklichung des logizistischen Ideals präsentiert wurde. Hieß das nicht, daß Freges besorgte Reaktion doch unangemessen gewesen war?

Die drei Bände der PM umfassen wichtige Teile der reinen Mathematik. Es gewinnt daher den Anschein, als bräuche man die Auffassung, wonach die gesamte reine Mathematik im Grunde Logik ist, nicht mehr als bloßen Glaubensartikel oder mit der dürftigen Begründung zu akzeptieren, eine solche Zurückführung sei »im Prinzip« möglich, sondern nun stelle sie sich als Hypothese dar, die durch eine gewaltige Menge induktiven Belegmaterials gestützt werde. Doch sobald wir die wirkliche geistige Entwicklung der Gründerväter des Logizismus näher betrachten, erhalten wir ein ganz anderes Bild: Schon 1906 ließ Frege, wie Dummett überzeugend nachgewiesen hat, das Vorhaben einer logischen Begründung der Arithmetik fallen, denn er vermochte keine Möglichkeit zu erkennen, wie sich der Begriff des logischen Gegenstands (und damit der Begriff der Klasse) aus der durch Russells Antinomie ausgelösten Katastrophe retten ließe – und nach der Veröffentlichung der PM hat er seine Meinung keineswegs geändert (vgl. Dummett, 1981, Kap. 2). Ja, in Freges Nachlaß finden sich sogar zwei kurze Arbeiten von 1924 und 1925, in denen er das Projekt ankündigt, die Mathematik mit Hilfe einer »geometrischen Erkenntnisquelle« zu begründen (was immer er damit gemeint haben mag). Zu bedenken ist auch Kreisels Vermutung, Russell habe das Interesse an seiner eigenen Schöpfung – der Typentheorie – deshalb verloren, weil ein in Typen zerlegtes Universum zwar leichter zu handhaben ist, »er als Philosoph sich damit jedoch nicht zufriedengeben konnte, weil sich unsere wirkliche mathematische Erfahrung nicht in dieser Weise darstellt« (Kreisel, 1972).

In der neuen Einleitung zur zweiten Auflage der PM, deren erster Band 1925 erschien, erklären die Verfasser, daß sie Ramsey und dem Autor des *Tractatus* Dank schulden. Doch als die beiden restlichen Bände der zweiten Auflage 1927 erscheinen, ziehen Ramsey wie Wittgenstein ihre bisherigen Gedanken in Zweifel und beginnen, neue Wege zu erkunden. Übrigens stellt schon die neue Einleitung der PM die These als fragwürdig hin, wonach das vorhandene Korpus der Mathematik auf logischer Basis rekonstruiert werden könne. Die Verfasser erklären, ohne das – von Wittgenstein und Ramsey vehement kritisierte und in der zweiten Auflage fallengelassene – Reduzibilitätsaxiom sei es nicht mehr möglich, eine ganze Reihe wichtiger Sätze der Analysis zu beweisen. Doch im Gegensatz zu der Haltung, die Ramsey und Wittgenstein um 1928 anzunehmen geneigt sind, ziehen die Verfasser der PM weder den Schluß »Um so schlimmer für die klassische Mathematik« noch erachten sie die Teile der Mathematik für problematisch, die im Rahmen der PM-Logik nicht unter Dach und Fach zu bringen sind.

Außerdem wollen Whitehead und Russell ebensowenig aus Cantors Paradies vertrieben werden wie Hilbert. Allerdings wollen sie dort, ebenso wie Hilbert, mit einem logisch reinen Gewissen leben. Sie sehen sich in der folgenden Zwickmühle: Im Rahmen der ersten Auflage der PM ist es möglich, den größten Teil der vorhandenen Mathematik auf logischer Basis zu begründen, doch das zeigt, um mit Gödel zu reden, lediglich, daß die erste Auflage der PM ihren eigenen Grundsätzen nicht gerecht wird; insbesondere verstößt sie gegen das »Zirkelfehlerprinzip« (*vicious circle principle*; vgl. Gödel, 1944). In der ersten Auflage werden die hinderlichen Folgen des Zirkelfehlerprinzips durch das Reduzibilitätsaxiom wettgemacht. Sofern die Beachtung des Zirkelfehlerprinzips als das charakteristische Merkmal des von den Verfassern der PM vertretenen Logizismus gilt, mißlingt den PM der Nachweis, die Mathematik lasse sich auf die Logik zurückführen. Die Sachlage, die sich daraus ergibt, ist alles andere als zufriedenstellend. Im Grunde mußte eingeräumt werden, daß (bisher) noch kein schlüssiger Beweis geliefert worden war für die Annahme, daß sich die Mathematik auf die Logik zurückführen lasse.

> »Es wäre vielleicht möglich, die unendlichen wohlgeordneten Reihen der logischen Strenge zu opfern; die Theorie der reellen Zahlen aber ist ein unentbehrlicher Bestandteil der gewöhnlichen Mathematik und kann kaum der Gegenstand eines vernünftigen Zweifels sein. Wir haben darum ein gutes Recht, anzunehmen, daß irgendein wahres logisches Axiom sie rechtfertigen wird. Das erforderliche Axiom mag enger sein als das Reduzibilitätsaxiom, aber immerhin bleibt es noch zu entdecken« (167 f. / XIV).

Diese Überlegungen erklären vielleicht, weshalb es 1930 so aussah, als sei Rudolf Carnap der letzte (wiewohl zaudernde) Logizist gewesen. Es wäre jedoch vorschnell, wollte man daraus den Schluß ziehen, die beiden anderen Schulen, die damals in Königsberg vertreten waren, hätten besser dagestanden. Die drei abgedruckten Vorträge sollten nicht als »Forschungsprogramme« gelesen werden, die die Arbeit künftiger Generationen von Logikern und Mathematikern zu befruchten vermochten, sondern eher als Epiloge der hitzigen Diskussionen, die in den dreißig Jahren davor stattgefunden hatten. Hinzu kommt, daß 1931 Gödels Unvollständigkeitssätze veröffentlicht wurden. Eine kurze Zusammenfassung der Hauptresultate dieses Artikels wurde von Gödel in Königsberg vorgetragen und ist in dem oben genannten Band der *Erkenntnis* mitabgedruckt. Der Titel dieses Artikels lautet »Über formal unentscheidbare Sätze der ›Principia Mathematica‹ und verwandter Systeme«. In Gödels Arbeit soll keine Schwäche aufgezeigt werden, die etwa nur für die PM spezifisch wäre. Doch es kommen darin ganz neue Problemstellungen zum Vorschein, die in den PM kaum berührt werden, und insgesamt hat der Artikel den Effekt, daß jenes Denkmal ein wenig veraltet wirkt. Aber auch abgesehen von Gödels späteren Resultaten, ist es erstaunlich, daß die Entwicklung der Strichnotation (von Sheffer bzw. Nicod) in der Einleitung zur zweiten Auflage als das bedeutendste Ergebnis hingestellt wird, das zwischen 1910 und 1925 in der mathematischen Logik erzielt worden sei, denn diese Notation gestatte eine weitere Vereinfachung in der Darstellung der undefinierbaren Ausdrücke der Logik. Bedient man sich der Strichnotation »$p \mid q$« (d. h. »p und q sind unverträglich«), kann man ohne die beiden undefinierbaren Ausdrücke »nicht-p« und »p oder q« auskommen, und es wird möglich, die ersten fünf Grundsätze (*primitive propositions*) durch ein einziges Axiom zu ersetzen.

Durch diese Erwägungen gelangen wir wieder zu dem angemessenen Hintergrund, vor dem die PM gesehen werden sollten, und dies ist der Hintergrund der Entstehung der modernen Logik. Es ist gewiß keine Übertreibung, wenn man sagt, daß der erste Teil des ersten Bandes der PM (»Mathematical Logic«) zusammen mit den beiden Einleitungen wie kaum ein anderes Werk dazu beigetragen hat, unsere Vorstellung von dem, worum es in der Logik überhaupt geht, zu prägen. Und was vom Standpunkt der hier gegebenen Interpretation noch wichtiger ist: Es gelingt den PM, auf überzeugende Weise zu zeigen, warum Logik und Philosophie füreinander von Bedeutung sind.

1. Logische Analyse

In dem 1924 veröffentlichten Artikel über den logischen Atomismus erwähnt Russell ein heuristisches Prinzip, das er und Whitehead hilfreich fanden, als sie gemeinsam über mathematische Logik arbeiteten. Dieses Prinzip lautet: »Schlüsse auf unbekannte Wesenheiten sind nach Möglichkeit durch Konstruktionen aus bekannten Wesenheiten zu ersetzen«

(Russell, 1924, S. 146). Es ist wichtig, sich diese Maxime klarzumachen, denn sie erläutert, was die Verfasser der PM unter der zulänglichen »logischen Analyse« eines Satzes bzw. einer Menge von Sätzen verstehen, warum sich die Analyse nach ihrer Auffassung lohnt und wodurch ihre Ausführung möglich wird. Der ganze Artikel ist ein nützliches Dokument, um die Entwicklung von Russells philosophischen Ansichten zwischen den beiden Auflagen der PM zu begreifen und um die zahlreichen Elemente der Spannung zwischen den beiden Einleitungen der PM zu erhellen.

Nach Russell ist die logische Analyse *die* Methode der Philosophie. Ihr Ziel ist die »Kritik und Klärung von Begriffen, die leicht als fundamental angesehen und unbefragt akzeptiert werden« (ebd., S. 162). Die Erinnerung an die Devise »Konstruktionen statt Schlüsse« erweist sich als nützlich sowohl zur Interpretation von Russells These, die Entdeckung der Theorie der Kennzeichnungen (*definite descriptions*) – jenes von Ramsey so genannten »Paradebeispiels der logischen Analyse« – sei der erste Schritt zur Lösung der logischen Antinomien gewesen (Russell, 1944, S. 13), als auch zum Verständnis der Bedeutung der »regressiven Methode zur Entdeckung der Prämissen der Mathematik«, wie es im Titel eines 1907 gehaltenen Vortrags heißt.

Bei dieser Art von Analyse geht es nicht darum, etwas auf den ersten Blick Unklares oder Zweifelhaftes durch etwas Klares oder Selbstverständliches zu ersetzen. Wäre dies das Ziel, kämen Sätze wie »Der gegenwärtige König von Frankreich ist kahl« oder »2 + 2 = 4« nie als zu analysierende in Frage. Denn wenn wir diese Sätze unklar fänden, wäre es überaus zweifelhaft, wie wir hoffen könnten, die zu ihrer Analyse verwendeten Sätze zu verstehen. Die Analyse hängt nur auf indirekte Weise mit dem Verstehen zusammen. Sie will Begriffe ans Licht bringen, die in logischer – und nicht in erkenntnistheoretischer – Hinsicht Priorität haben. Es mag zwar sein, daß die Urelemente, die die logische Analyse einer gegebenen Aussage zutage fördert, »einfach« sind, was aber

nicht heißt, daß sie »leichter« zu begreifen sind als diejenigen, die augenscheinlich in den verfügbaren »Daten« enthalten sind (Russell, 1907, S. 273, 279). Ebensowenig geht es bei der Analyse darum, die Wahrheit von »2 + 2 = 4« oder die Falschheit von »Der gegenwärtige König von Frankreich ist kahl« gewisser zu machen, sondern darum, in diese beiden Sätze eine *logische Form* hineinzulesen, die die Grundbegriffe (*primitive ideas*) oder undefinierbaren Ausdrücke zum Vorschein bringt, die in einfachen arithmetischen Gleichungen ebenso vorkommen wie in idiomatisch formulierten Sätzen der natürlichen Sprache, die die vertraute Subjekt-Prädikat-Konstruktion an den Tag legen. Zwischen diesen beiden Fällen – Zahlwörter einerseits und definite Kennzeichnungen von Individuen andererseits – bestehen Unterschiede und Ähnlichkeiten. Ein Unterschied besteht darin, daß wir im ersten (aber nicht im zweiten) Fall vermuten können, daß die in solchen Ausdrücken vorkommenden »erschlossenen Entitäten« – d. h. Zahlen und Klassen – durch Konstruktionen aus bekannten Entitäten ersetzt werden können. Im ersten (aber nicht im zweiten) Fall führt die Analyse womöglich zur Beseitigung der erschlossenen Entitäten. Konkrete Einzeldinge (Individuen) werden in der ersten wie in der zweiten Auflage der PM zur ontologischen Ausstattung der Welt gerechnet. Dabei sollte die erkenntnistheoretische Frage, ob diese Einzeldinge in der Terminologie der Sinnesdaten gedeutet werden können, nicht mit der Frage der ontologischen Entbehrlichkeit der Klassen verwechselt werden. Die eigentliche Frage ist vielmehr, wie die behauptete Allgemeingültigkeit der Logik mit spezifischen Existenzannahmen (etwa hinsichtlich der Anzahl der Individuen) in Einklang gebracht werden kann. Eine Ähnlichkeit besteht darin, daß in beiden Fällen eine Lücke zwischen grammatischer und logischer Form aufscheint. Das wirksamste Verfahren, diese Lücke zum Vorschein zu bringen, besteht darin, die sprachliche Form der beiden Sätze zu zerlegen und die Stücke in solcher Weise wieder zusammenzusetzen, daß nicht einmal eine Spur übrigbleibt von einem selbständig vorkommenden bezeichnenden Ausdruck, der von einem Gegenstand zu handeln scheint, über den mit Hilfe des restlichen Teils des Satzes etwas ausgesagt wird, nach dem von Frege karikierten Motto »Was das Auge sieht, muß das Herz glauben«.

2. Unvollständige Symbole: Kennzeichnungen

Die Theorie der unvollständigen Symbole soll uns von der Gewohnheit abbringen, immer nach einem Gegenstand Ausschau zu halten, wenn wir auf einen kennzeichnenden Ausdruck der Form »das x, welches $\varphi\hat{x}$ erfüllt« oder auf einen singulären Terminus wie »die Klasse aller x, die $\varphi\hat{x}$ erfüllen« stoßen. Unvollständige Symbole werden mit Hilfe von *Kontextdefinitionen* eliminiert, d. h. mit Hilfe von Vorschriften, die angeben, wie man von einem Satz, der ein unvollständiges Symbol enthält, zu einem Satz gelangen kann, der dieses Symbol nicht mehr enthält. Da die Definition nach Auffassung der Autoren der PM nichts weiter ist als eine abgekürzte Schreibweise, werden dadurch keine neuen Begriffe ins Spiel gebracht, weshalb auch keine neuen Axiome für solche Begriffe erforderlich sind. Die Symbole für Kennzeichnungen bzw. Klassenabstraktoren sind »$(\iota x)\ (\varphi x)$« bzw. »$\hat{x}(\varphi x)$«. Im Gegensatz zu »echten« Eigennamen haben die unvollständigen Symbole jedoch eine »Reichweite« (*scope*), die von der Art ihres Vorkommens im Satz abhängt.

Im Hinblick auf die Kennzeichnungen führt die logische Analyse zu nebenher gewonnenen Ergebnissen, die wertvolle Einsichten darstellen in bezug auf den Begriff der Existenz. Daraus ergibt sich eine Lösung des antiken Rätsels, wie man von etwas, das gar nicht existiert, etwas Wahres aussagen kann, ohne – wie z. B. Meinong vorgeschlagen hatte – anzunehmen, daß dieses Etwas in einem Reich des Geistes oder in einem »dritten Reich« west. »Existieren« ist für Russell wie

für Frege ein Prädikat, das nicht von Individuen ausgesagt wird, sondern von Aussagenfunktionen oder von Begriffen. Die Tatsache, daß ein Satz wie »Sokrates existiert« Sinn hat, ist laut Russell ein Hinweis darauf, daß der Name »Sokrates« eine verhüllte Kennzeichnung ist und daß der Satz, in dem der Name »Sokrates« vorkommt, allem Anschein zum Trotz eine scheinbare Variable (*apparent variable*) enthält:

> »Für Sokrates selbst stand ohne Zweifel das Wort ›Sokrates‹ für einen Gegenstand, um den er unmittelbar wußte, und enthielt das Urteil ›Sokrates ist ein menschliches Wesen‹ keine scheinbare Variable. Für uns aber, die wir Sokrates nur durch Beschreibung kennen, kann das Wort ›Sokrates‹ nicht bedeuten, was es für ihn bedeutete; es bedeutet vielmehr ›die Person mit den und den Eigenschaften‹ [...]. Nun steckt aber in allen Sätzen über ›den So-und-so‹ eine scheinbare Variable [...]. So steckt in dem, was *uns* vorschwebt, wenn wir sagen ›Sokrates ist ein menschliches Wesen‹, eine scheinbare Variable, obwohl keine in dem entsprechenden, von Sokrates gefällten Urteil steckte, wofern es nur etwas wie unmittelbares Selbstbewußtsein gibt« (73/50).

Mit der Frage, welche Kennzeichnung an die Stelle von »Sokrates« treten soll – sei es »der Mann namens ›Sokrates‹« oder »der Ehemann der Xanthippe« –, brauchen wir uns hier nicht zu beschäftigen. Nur nebenbei wollen wir darauf hinweisen, daß das Ich in dem 1924 publizierten Artikel über den Logischen Atomismus als »erschlossene Wesenheit« gedeutet wird und nicht mehr als durch unmittelbare Bekanntschaft erkennbar gilt. Auf Russells Theorie über Erkenntnis durch Bekanntschaft und Erkenntnis durch Beschreibung können wir hier nicht ausführlich eingehen. Die Theorie der Bekanntschaft bildet den Hintergrund der in der ersten Auflage der PM erörterten multiplen Urteilstheorie, die Russell 1919 fallenläßt, während er an der Überzeugung festhält, daß es so etwas wie logische Eigennamen wirklich gibt. Dementsprechend werden »dies« und »jenes« in der zweiten Auflage als die einzigen logischen Eigennamen gekennzeichnet. Diese Indikatoren besitzen die erstaunliche Eigenschaft, daß ihnen immer, wenn sie verwendet werden, etwas durch sie Bezeichnetes entsprechen muß. Sie haben allerdings auch einen erstaunlichen Nachteil, nämlich den, daß wir niemals sicher sein können, was das, was sie bezeichnen, eigentlich ist. Da sie nach Russells Auffassung (Russell, 1918) für die Sinnesdaten stehen, die dem Sprecher eines sie enthaltenden Satzes vorschweben, und da Sinnesdaten als etwas Privates, was nur der betreffende Sprecher besitzt, gelten und da sie dem Hörer deshalb grundsätzlich unzugänglich sind, ist kaum zu sehen, welchen Nutzen sie im Verständigungsprozeß haben könnten. In der Logik soll die Aufgabe dieser logischen Eigennamen durch freie Variablen erfüllt werden.

Daß es eine sinnvolle und nach Russell eine *wahre* Behauptung ist, wenn man sagt: »Der gegenwärtige König von Frankreich existiert nicht«, zeigt, daß diese Aussage nicht von einem Individuum handelt, sondern von einer Aussagenfunktion. Wir sagen damit, es sei falsch, daß die Aussagenfunktion »gegenwärtiger König von Frankreich sein« durch genau ein Individuum erfüllt wird. Dementsprechend sollte die Behauptung »Der gegenwärtige König von Frankreich ist kahl« richtig so gelesen werden: Es gibt ein x derart, daß x ein König von Frankreich ist und daß alles, was ein König von Frankreich ist, identisch ist mit x, und x ist kahl. Da Frankreich zur Zeit keine Monarchie ist, ist der Satz falsch, und folglich werden wir, indem wir den Satz verneinen, zwar etwas Wahres sagen, aber nicht etwas Wahres über (*about*) etwas Nichtexistierendes. Das kontradiktorische Gegenteil des Satzes »Der gegenwärtige König von Frankreich ist kahl« lautet nicht »Der gegenwärtige König von Frankreich ist nicht kahl«, sondern »Es ist falsch, daß der gegenwärtige König von Frankreich kahl ist«. Wenn Frankreich keinen König hat, ist es verfehlt, sowohl zu behaupten, daß der König kahl ist, als auch zu behaupten, daß er nicht kahl ist.

Daher muß man achtgeben auf die »Reichweite« der Kennzeichnungen, denn diese Reichweite ist relevant für die Beurteilung des Wahrheitswerts des ganzen Satzes. Wir dürfen uns durch die Schreibweise des Symbols »$(\iota x)(\varphi x)$« nicht zu der Annahme verleiten lassen, »$(\iota x)(\varphi x) = (\iota x)(\varphi x)$« sei ein Beispiel des Identitätssatzes »$x = x$«. Derartige Sätze werden immer dann falsch sein, wenn die Kennzeichnung uneigentlich ist (*improper*, d. h. der offenbar kennzeichnende Ausdruck trifft auf keinen oder auf mehr als einen Gegenstand zu). Aus einem ähnlichen Grund sollte »Der So-und-so ist ein So-und-so« nicht als ein Schema aufgefaßt werden, aus dem sich lauter offenkundige Wahrheiten gewinnen lassen: Der Satz »Der Mann, der *Waverley* schrieb, schrieb *Waverley*« bringt keine notwendige Wahrheit zum Ausdruck, denn er wäre falsch, wenn niemand das Buch geschrieben hätte oder wenn Walter Scott es zusammen mit einem anderen Autor verfaßt hätte (*14.22).

Russells Analyse der Kennzeichnungen ist in mehrfacher Hinsicht und aus verschiedenen Gründen kritisiert worden. Manche Autoren haben die Tauglichkeit der »Belege«, auf denen sie beruht, bestritten, nämlich die Behauptung, daß wir etwas *Falsches* sagen, wenn wir einen Satz verwenden, in dem eine uneigentliche Kennzeichnung mit weitestmöglicher Reichweite vorkommt. Andere haben gemeint, es sei gar nicht die Aufgabe eines singulären Terminus, etwas zu beschreiben oder zu kennzeichnen, sondern seine Funktion bestehe darin, auf ein Einzelding Bezug zu nehmen, indem man auf seiten der intendierten Hörer Kenntnisse voraussetzt, die ausreichen, um dieses Einzelding zu identifizieren. Ein weiterer Einwand lautet, es sei unplausibel, anzunehmen, daß wir mit der Äußerung eines derart einfachen Satzes gleich drei Behauptungen aufstellen: eine Existenzbehauptung, eine Eindeutigkeitsbehauptung und eine Eigenschaftsprädikation. Daß die Kennzeichnung nicht leer ist, sei eine *Präsupposition* sowohl des Satzes selbst als auch seiner Negation; ist diese Präsupposition nicht erfüllt, seien sowohl der Satz selbst als auch seine Negation weder wahr noch falsch. Schließlich ist Russells Auffassung, wonach Eigennamen verhüllte Kennzeichnungen sind, kritisiert worden, weil sich Namen in modalen und tempusabhängigen Kontexten anders verhalten als Kennzeichnungen. Manche Philosophen haben geltend gemacht, Russells Analyse der Kennzeichnungen möge zwar für eine Idealsprache und eventuell auch für ein formales System angebracht sein, nicht aber für eine natürliche Sprache, obwohl sie offenbar auch als Beitrag zur Analyse der natürlichen Sprache gemeint ist. Was immer diese Einwände ausrichten können, Russells Analyse hat zumindest das Verdienst, ohne nichtexistierende Gegenstände auszukommen und für Behauptungen, in denen uneigentliche Kennzeichnungen vorkommen, eine Wahrheitswertzuordnung zu liefern, die meines Erachtens mit dem Sprachgefühl übereinstimmt.

3. Unvollständige Symbole: Namen für Klassen

Im Fall des Beispiels »2 + 2 = 4« ist die logische Analyse ein Zwischenschritt im Rahmen der anspruchsvolleren Aufgabe, nachzuweisen, daß sich die arithmetischen Sätze nicht nur in einer »rein logischen« Schreibweise formulieren lassen, sondern aus einer kleinen Menge logischer Axiome und Definitionen als Theoreme abgeleitet werden können. Was hier nachgewiesen werden muß, ist, daß die Elementarbegriffe, die in arithmetischen Gleichungen vorkommen, logische Begriffe sind, deren Gehalt in wenigen Grundsätzen zusammengefaßt werden kann. Um dies zu erreichen, hatte der italienische Mathematiker Giuseppe Peano drei undefinierte Grundbegriffe ausgewählt, nämlich »0«, »natürliche Zahl« und »Nachfolger von« sowie fünf Grundsätze (die »Peanoschen Axiome«). Ferner hatte er eine elegante und leicht zu handhabende Notation entwickelt, in der logische und algebraische Begriffe leicht auseinanderzuhalten sind, in der das

Enthaltensein eines Elements in einer Menge vom Enthaltensein einer Menge in einer anderen Menge unterschieden wird und in der die Menge nicht mit ihrer Einermenge verwechselt wird. Was die logische Notation anlangt, konnten sich die Verfasser der PM demnach auf die Arbeit stützen, die Peano und Frege bereits geleistet hatten. Dem Abschnitt der PM, der die mathematische Logik behandelt, fehlt es sogar, wie Gödel betont hat, im Vergleich mit Freges *Grundgesetzen* an strenger Ausführung.

Russell ist der Meinung, daß die Peanoschen Axiome nicht die letzten logischen Prämissen der Arithmetik darstellen. Um die arithmetischen Theoreme aus den Axiomen abzuleiten, bedarf es außerdem der »Prämissen der symbolischen Logik«: »Falls sich nachweisen läßt, daß diese Prämissen auch hinreichend sind, werden sie keine logischen Prämissen mehr sein und ihre Stelle unter den Theoremen einnehmen« (Russell, 1907, S. 277). Frege war bei der Anwendung des regressiven Verfahrens einen Schritt weiter gegangen als Peano, doch einige der »Prämissen«, die er sich zu eigen gemacht hatte, erwiesen sich als verfehlt. In diesen Prämissen spielt der Begriff der Klasse eine Rolle. Nun ergriffen die Verfasser der PM die drastische Maßnahme, auf Klassen überhaupt zu verzichten (*no-class theory*).

Als sich Russell 1908 diese Auffassung zu eigen machte, wollte er damit nicht bestreiten, daß es überhaupt Klassen gibt, sondern er wollte sich des Urteils enthalten. Wenn es möglich ist, alles, was sich über solche erschlossenen Wesenheiten sagen läßt, in einer Sprache zu sagen, die keine offene Bezugnahme auf sie enthält, dann sollte es auch in einer solchen Sprache gesagt werden (Russell, 1906, S. 154). Da die natürlichen Zahlen nichts weiter sind als Klassen von Klassen, und da die klassische Zahlentheorie auf der Grundlage der Arithmetik »rekonstruiert« werden kann, ergibt sich daraus der Schluß, daß, sofern man ohne Klassen auskommen kann, auch die natürlichen Zahlen durch »Konstruktionen aus bekannten Wesenheiten« ersetzt werden können. Prak-

tisch das gleiche gilt auch für die »Abstrakta«, die durch Äquivalenzrelationen erzeugt werden, wie z. B. Gestalten, Richtungen und Längen. Wenn es möglich ist, alle Behauptungen über Klassen durch Behauptungen über ihre Elemente zu imitieren, dann sind die Klasse »als Eine« (im Gegensatz zur Klasse »als Viele«) oder der Begriff und die Relation »als etwas von ihren Argumenten Getrenntes« etwas Fiktives (vgl. *20). Daß wir im Fall einer unendlichen Klasse außerstande sind, ihre Elemente einzeln aufzuzählen und eine Behauptung über ihre Elemente mit Hilfe einer unendlichen Konjunktion (oder Disjunktion) zu »paraphrasieren«, zeigt nicht, daß Bezugnahmen auf die Klasse »als Eine« nicht eliminiert werden können, sondern es zeigt nur, daß sich die Vorstellung, eine Aussagenfunktion sei »immer wahr«, und die Vorstellung, sie sei »manchmal wahr«, nicht mit Hilfe von Wahrheitsfunktionen erklären lassen.
Doch wie stellen wir es an, nach den entsprechenden »bekannten Wesenheiten« zu suchen? Wie soll es gelingen, die undefinierbaren Ausdrücke und die Grundsätze der Logik zu ermitteln? Was »selbstverständlich« wirkt oder »einleuchtet«, liefert, wie die Kontradiktionen gezeigt haben, keine unfehlbare Richtschnur. Ja nach Russell sind Logik und Mathematik in dieser Hinsicht nicht besser daran als die übrigen Wissenschaften. Auch in der Logik müssen wir »induktiv« herausfinden, welche logischen »Prämissen« den Tatsachen entsprechen, so daß sich aufgrund von Tatsachen und Hypothesen neue Aussagen ableiten lassen.

> »Also verhält es sich in der Mathematik, außer in den ersten Anfangsteilen, so, daß die Aussagen, aus denen eine gegebene Aussage abgeleitet wird, im allgemeinen den Grund angibt, weshalb wir die gegebene Aussage glauben. Doch wenn wir es mit den Prinzipien der Mathematik zu tun haben, ist das Verhältnis umgekehrt. Hier sind unsere Aussagen zu einfach, um leicht zu sein, und daher sind ihre Konsequenzen generell leichter als sie. Folglich glauben wir die Prämissen tendenziell deshalb, weil wir sehen können, daß ihre Konsequenzen wahr sind, anstatt die Konsequenzen zu glauben, weil wir wissen, daß die Prämissen wahr sind. Aber das Erschließen der Prämissen aus den Konsequenzen ist das Wesen der Induktion; dementsprechend ist die Methode, die man bei der Erforschung der Prinzipien der Mathematik anwendet, eigentlich eine induktive Methode und im wesentlichen die gleiche wie die, die man in irgendeiner anderen Wissenschaft zur Ermittlung allgemeiner Gesetze benutzt« (Russell, 1907, S. 273 f.).

Um die Angemessenheit einer Menge »logischer Hypothesen« festzustellen, versucht man als erstes herauszubekommen, ob es möglich ist, mit Hilfe der eingeführten Grundbegriffe alle arithmetischen Aussagen *auszudrücken*. Dies ist allerdings nicht die einzige Probe, sondern das formale System, in dem diese logischen Hypothesen ihren Ort haben, muß zwei weitere Bedingungen erfüllen, nämlich die der *Vollständigkeit* und die der *Kohärenz*: »1. Die Deduktionen des Systems müssen alle Aussagen umfassen, die wir für wahr und einer Ableitung aus rein logischen Prämissen fähig halten [...]; und 2. darf das System zu keinen Widersprüchen führen, d. h. im Verfolg unserer Schlüsse dürfen wir nie dazu geführt werden, sowohl p als nicht-p zu behaupten« (23 / 12 f.). Wie aus den Gödelschen Unvollständigkeitssätzen hervorgeht, kann kein formales System mit den deduktiven Möglichkeiten der PM diese beiden Bedingungen erfüllen.

4. Unvollständige Symbole: Aussagen

Eine Aussagenfunktion ist eine Funktion, die Aussagen als Werte annimmt. Steht »$\varphi\hat{x}$« etwa für »x ist ein Mensch«, sind die Argumente, mit Bezug auf die diese Aussagenfunktion definiert ist, Individuen, und ihre »Werte« sind die Aussagen »*a* ist ein Mensch«, »*b* ist ein Mensch«, »*c* ist ein Mensch« usw. ad infinitum, sofern die Anzahl der Individuen unendlich ist und jedes Individuum einen Namen hat. Aber wie ist die semantische Beziehung zwischen einer Aussagenfunktion und ihren Werten zu verstehen? Nach Russell wird jeder Wert einer Aussagenfunktion von dieser »mehrdeutig bezeichnet« (*ambiguous denotation*); ihre Werte sollen vor der Funktion selbst gegeben sein (der Grund wird in Abschnitt 5 genannt), und man darf annehmen, daß sie eine Gesamtheit bilden. Diese Interpretation scheint jedoch nicht in Einklang zu stehen mit der Erklärung, die in der Einleitung zur ersten Auflage gegeben wird, wo es heißt: »Nicht das ist nötig, daß die Werte individuell und extensional gegeben seien, sondern daß die Gesamtheit der Werte intensional gegeben sei, so daß es für jeden vorgelegten Gegenstand mindestens theoretisch bestimmt ist, ob er ein Wert der Funktion ist oder nicht.« (59/40).

Dieser Punkt ist wichtig, wenn man verstehen will, wie es möglich ist, vorteilhafterweise Aussagen als *Werte* von Aussagenfunktionen auffassen zu können, ohne sich dabei ontologisch auf Aussagen als »Entitäten« oder »Wesenheiten« oder gar auf deren Gesamtheit festzulegen. Russell bringt diesen Gedanken zum Ausdruck, indem er erneut auf den Begriff des unvollständigen Symbols zurückkommt und erklärt, als Entitäten aufgefaßte Aussagen seien »falsche Abstraktionen« und *die Aussage selbst sei ein unvollständiges Symbol* (64 f. / 44). Es wäre verfehlt, anzunehmen, Russell wolle mit dieser Feststellung nur auf das *Symbol* hinweisen. Die strategische Funktion des Begriffs des unvollständigen Symbols liegt darin, daß damit eine erschlossene und entbehrliche Wesenheit signalisiert wird, also etwas, was kein eigenständiger Bestandteil der Realität ist. Aussagen sind keine Entitäten, die man zu einer Gesamtheit zusammenfassen könnte. Die semantischen Paradoxien haben gezeigt, daß es so etwas wie »die Gesamtheit aller wahren Aussagen« gar

nicht gibt. Das Prädikat »wahr« ist im Hinblick auf die verschiedenen logischen Typen mehrdeutig, was sich in den PM in den einschränkenden Bedingungen widerspiegelt, die dadurch aufgestellt werden, daß die prädikativen Funktionen innerhalb jedes einzelnen logischen Typus noch einmal in Ordnungen unterteilt werden.

Es gibt mehrere Gründe, weshalb Russell diese Auffassung vertreten will, und einesteils hängen sie mit der Typentheorie zusammen, anderenteils mit Russells erkenntnistheoretischen Ansichten.[2] Da diese Gründe sehr aufschlußreich sind, sollen sie kurz genannt werden: (a) Im Gegensatz zu Frege will Russell die Aussagen nicht als Namen von Wahrheitswerten auffassen, sondern als »Verweise« auf *Tatsachen*. Die den Aussagen anzumerkende Artikuliertheit oder »Diskursivität« ist darauf zurückzuführen, daß sie dazu dienen, über Komplexe zu reden (S. 64/44). (b) Aussagen dürfen nicht als Objekte von Verben für propositionale Einstellungen – wie »zweifeln«, »glauben« oder »wissen« – gedeutet werden. Die Aussage »*A* urteilt *p*« sollte nicht, wie Frege es z. B. gewollt hatte, in eine Beziehung zerlegt werden, die zwischen zwei Gegenständen – etwa zwischen einem Bewußtsein und einer Aussage – besteht, sondern in eine Beziehung zwischen einem Bewußtsein und den etwaigen Bestandteilen der Tatsache, von der die Aussage handeln soll (*multiple theory of judgment*). (c) Die Behauptung eines Wertes einer Aussagenfunktion wie »$\varphi\hat{x}$« bei gegebenem Argument »Sokrates« besteht z. B. in der Behauptung der Aussage »Sokrates ist sterblich«, und diese Aussage ist – im Gegensatz etwa zu Freges Theorie – verschieden von der Aussage »Der Wert der Aussagenfunktion $\varphi\hat{x}$ für das Argument Sokrates ist das Wahre«. Also können wir mit der Behauptung *p* nicht dasselbe meinen wie mit der Behauptung »Der Wahrheitswert

2 Um die Ansichten, die Russell 1910 vertritt, besser zu verstehen, sollte man zum Vergleich seinen früheren Versuch einer »substitutionalen« Theorie heranziehen, in der die Aussagen als Basisentitäten gelten. Vgl. Russell, 1906a; Hylton, 1980; Grattan-Guinness, 1977.

von p ist das Wahre« (60/41). In dem letzteren Satz kommt »p« als Subjekt vor, das einen *vor dem Urteilsakt gegebenen* Bestandteil zu bezeichnen scheint, ist also eine falsche Abstraktion. Erst im jeweiligen Einzelakt des Urteilens wird das unvollständige (Aussagen-)Symbol vervollständigt (65/44). Wären jene beiden Behauptungen äquivalent, dann wäre die Behauptung der Aussage, die die Antinomie formuliert, nicht sinnlos, sondern falsch, und zwar aus dem gleichen Grund, weshalb die Aussage »Der gegenwärtige König von Frankreich ist kahl« falsch ist, nämlich weil der darin enthaltenen Kennzeichnung nichts entspricht. Nach der Typentheorie ist die Aussage »Die Klasse aller Klassen, die sich selbst nicht als Elemente enthalten, ist (bzw. ist nicht) ein Element ihrer selbst« nicht falsch, sondern *sinnlos*.

5. Die Typentheorie

Diese Überlegungen lassen übrigens erkennen, daß die Theorie der Kennzeichnungen in einem weniger offenkundigen Sinn ein *erster Schritt* zur Lösung der Antinomien sein könnte: Sie trägt dazu bei, den Unterschied zwischen Behaupten und Nennen zu verdeutlichen, und sie rückt den für Aussagen geeigneten Begriff des Sinn-Habens, der im Mittelpunkt der Typentheorie steht, in den Vordergrund. Wir können nicht davon ausgehen, daß ein Begriff sinnvoll auf jeden beliebigen als Argument gegebenen Gegenstand angewendet werden kann. Ein Prädikat für Begriffe kann nicht *ohne Änderung des Sinns* auf einen Gegenstand bezogen werden, und ein Prädikat, das auf Klassen von Begriffen angewendet werden darf, braucht nicht sinnvoll auf Begriffe anwendbar zu sein. Jeweils verschieden ist z. B. der Sinn, in dem der Ausdruck für die Elementbeziehung in dem sogenannten Peanoschen Syllogismus vorkommt: »Petrus ist ein Apostel, die Apostel sind zwölf, also ist Petrus zwölf.« Der Trugschluß, der diesem Syllogismus zugrunde liegt, läßt sich

nicht schon durch den Hinweis beheben, daß »ε« für eine nichttransitive Relation steht; die Typentheorie bringt uns überdies zu der Erkenntnis, daß die beiden ersten »ε« nicht typeneindeutig sind. Der Syllogismus ist daher ein Beispiel für die von Russell so bezeichnete Typenmehrdeutigkeit: Die Bedeutungen von »ε« bilden eine Familie, obwohl es weder einen bestimmten Einzelbegriff gibt, den sie exemplifizieren, noch eine Gesamtheit aller derartigen Bedeutungen.[3] Die Negation einer sinnlosen Aussage ist ihrerseits sinnlos, obwohl die natürliche Sprache diesen Sachverhalt mitunter verhüllt. Aus dem gleichen Grund, weshalb wir negative Existenzaussagen nicht so deuten können, als handelten sie von Individuen, ist es auch nicht sinnvoll, die (Schein-)Aussage »Die Funktion ›$\hat{x}$ ist ein Mann‹ ist ein Mann« zu verneinen (60/41).

Die richtige Lesart von »›φx‹ ist immer wahr« lautet, wie wir gesehen haben: »Jede Aussage der Form ›φx‹ ist wahr.« Daraus ergibt sich, daß nicht alle Sätze, die wie Aussagen aussehen, tatsächlich Aussagen – d. h. Werte von »φx« – sind, denn normalerweise wird es Werte von »x« geben, für die φx »unsinnig« ist. Die Argumente, für die »φx« überhaupt Werte annimmt, bilden den *Signifikanzbereich* von »φx«. Dementsprechend wird durch alle Aussagen der Form »$(x)\ \varphi x$« – d. h. durch jede Aussage, die eine scheinbare Variable enthält – »ein *Typus* als Bereich der scheinbaren Variable bestimmt, wobei der Typus durch die Funktion festgelegt wird« (*12). In dem bereits zitierten Aufsatz über den Logischen Atomismus wird folgende Definition des »logischen Typus« angeführt:

3 Vgl. Russell, 1924, S. 153. Ferner Ramsey, 1925, S. 197–199. Ramsey bedient sich dieser Argumentation, um zu zeigen, daß die erkenntnistheoretischen Paradoxien, durch die die Typentheorie ungebührlich kompliziert geworden war, innerhalb der einfachen Typentheorie (und ohne das Reduzibilitätsaxiom) entschärft werden können und die Grundlagen der Mathematik ohnehin nicht betreffen. Vgl. Wang, 1974, Kap. 3, insbes. S. 114–120.

> »*A* und *B* gehören genau dann demselben logischen Typus an, wenn es für jede gegebene Tatsache, der *A* als Bestandteil angehört, eine entsprechende Tatsache gibt, der *B* als Bestandteil angehört und die sich entweder aus der Ersetzung von *A* durch *B* ergibt oder die die Negation dieses Ergebnisses ist (Russell, 1924, S. 153).

Grob gesprochen umfaßt ein logischer Typus alle Gegenstände, für die Behauptung und Verneinung derselben Aussagenfunktionen sinnvoll sind. Ist zwei Typen ein Element gemeinsam, so fallen sie zusammen; verschiedene Typen enthalten keine gemeinsamen Elemente. Der Inhalt jedes Typus ist einheitlich, d. h. es gibt keine »Mischtypen«. Obwohl es auf den ersten Blick sinnvoll wirkt, sowohl von Fifi als auch von der Gattung Hund zu sagen, sie seien intelligent, kann es demnach keinen Typus geben, der sowohl Fifi als auch die Klasse der Hunde enthält. Innerhalb jedes Typus gibt es eine Allklasse und eine Nullklasse.

Die Typen sind hierarchisch geordnet, und zwar etwa wie folgt: Der unterste Typus ist der Typus 0, den die Verfasser der PM mit dem Typus der Individuen gleichsetzen (wobei ein Individuum etwas unabhängig Existierendes ist). Der Typus 1 umfaßt Eigenschaften von Individuen, der Typus 2 Eigenschaften von Individueneigenschaften, der Typus 3 Eigenschaften von Eigenschaftseigenschaften usw. Ein Satz der Form »$x \in y$« ist sinnlos, wenn anstelle der Zeichen »x« und »y« Ausdrücke eingesetzt werden, die demselben Typus angehören. Steht »x« für ein Individuum, muß »y« eine Klasse bezeichnen; ist »x« ein Klassenausdruck, muß »y« ein Ausdruck für Klassen von Klassen sein, usw. Damit ist der Aufbau der einfachen Typentheorie angedeutet, die in den PM allerdings zusammen mit der Theorie der Ordnungen entwickelt wird und so zur »verzweigten Hierarchie« hinführt.

Dieser Gedanke des Sinn-Habens liefert, wie Gödel anmerkt, eine Rechtfertigung der Typentheorie, die von der offiziellen

abweicht, die in den PM durch Hinweis auf das Zirkelfehlerprinzip gegeben wird:

> »Die Einteilung der Gegenstände in Typen wird nötig aufgrund der Trugschlüsse vom Typ des Zirkelfehlers [...]. Diese Trugschlüsse zeigen, daß es keine Gesamtheiten geben darf, die, wenn sie zulässig wären, Elemente enthalten würden, die durch sie selbst definiert sind. Folglich darf kein Ausdruck, der eine scheinbare Variable enthält, zum Bereich dieser Variablen gehören, d. h. er muß einem anderen Typus angehören. Daher sind die scheinbaren Variablen, die in einem Ausdruck enthalten sind oder von ihm vorausgesetzt werden, dasjenige, wodurch der Typus des Ausdrucks bestimmt wird« (*12).

Um diese Rechtfertigung zu verstehen, wird es nützlich sein, eine weitere Facette des Begriffs der Aussagenfunktion in Betracht zu ziehen. Aussagen, die als *Werte* von Aussagenfunktionen aufgefaßt werden, sollen *vor den Aussagenfunktionen gegeben sein*, die zu ihrer Angabe benutzt werden. Mit anderen Worten, es sollte möglich sein, die Aussagen »Sokrates ist sterblich«, »Platon ist sterblich« usw. zu erfassen, *ohne* sie als Werte der Aussagenfunktion »x ist sterblich« zu betrachten. Es kann keine Werte der Funktion »x ist sterblich« geben, die die Funktion voraussetzen, denn »eine Funktion ist nur dann eine wohldefinierte Funktion, wenn alle ihre Werte schon wohldefiniert sind. Daraus folgt, daß unter den Werten einer Funktion keiner sein kann, der die Funktion voraussetzt [...]. Dies ist ein spezieller, aber vielleicht der fundamentalste Fall des Zirkelfehlerprinzips« (58/39). Ausdrücke wie »$\varphi(\varphi x)$« sind deshalb sinnlos, weil es keinen Satz der Form »φx« geben kann, in dem x einen Wert hat, der seinerseits φx beinhaltet. Verhielte es sich doch so, wären die Werte der betreffenden Funktion nicht bestimmt, und folglich wäre die Funktion selbst unbestimmt. An dieser Stelle können wir allerdings nicht näher auf die vielen Probleme eingehen, die durch imprädikative Definitionen – d. h. Defi-

nitionen, die gegen das Zirkelfehlerprinzip verstoßen – aufgeworfen werden, und müssen uns auf den knappen Hinweis beschränken, daß solche imprädikativen Prinzipien in der Theorie der reellen Zahlen ständig vorkommen.
Eine zutreffendere Schilderung der in der Formulierung des Zirkelfehlerprinzips angedeuteten Schwierigkeit findet sich in einem früheren Aufsatz Russells (1906, S. 144), in dem die unmanierlichen Normen, die keine Klassen bestimmen, wie folgt charakterisiert werden:

> »Die bisherigen Überlegungen verweisen auf die Schlußfolgerung, daß sich die Widersprüche aus der Tatsache ergeben, daß es den geläufigen logischen Annahmen entsprechend sogenannte *selbstreproduzierende* Prozesse und Klassen gibt. D. h. manche Eigenschaften sind derart, daß wir immer, wenn eine beliebige Klasse von Termini mit einer solchen Eigenschaft gegeben ist, einen neuen Terminus definieren können, der die fragliche Eigenschaft ebenfalls besitzt. Daher sind wir nicht imstande, *alle* Termini, die die besagte Eigenschaft haben, in einer Gesamtheit zusammenzufassen, denn immer, wenn wir sie alle zusammenzuhaben hoffen, erzeugt die Zusammenfassung, über die wir verfügen, sogleich einen neuen Terminus, der auch wieder die betreffende Eigenschaft besitzt.«

Als mögliche Auswege aus dieser Sackgasse schlägt Russell drei Lösungen vor: die Zickzacktheorie, die Theorie der Größenbegrenzung und die klassenfreie Theorie. Die heute geläufige (Zermelo-Fraenkelsche) axiomatische Mengenlehre ist der zweiten Alternative verwandt, während die erste Alternative von Quine weiterentwickelt worden ist.

6. Identitätsbegriff und Reduzibilitätsaxiom

Um mit Paradoxien (wie etwa der Lügnerparadoxie) fertig zu werden, bei denen die Quantifikation – und daher auch die Bezugnahme auf möglicherweise Argwohn erregende Gesamtheiten – keine offensichtliche Rolle spielt, wird innerhalb jedes Typus eine weitere Unterteilung eingeführt, die sich nach der *Ordnung* der betreffenden Aussagenfunktionen richtet. Das Resultat dieser zusätzlichen Unterteilung ist die verzweigte Typenhierarchie (*12). Dem Zirkelfehlerprinzip zufolge ist es unzulässig, Ausdrücke wie »alle Aussagen« oder »alle Eigenschaften« ohne Rücksicht auf die Ordnung zu verwenden, der die zur jeweiligen Angabe der Aussagen oder Eigenschaften benutzten Funktionen angehören. Eine Bezugnahme auf solche unzulässigen Gesamtheiten scheint jedoch in dem Leibnizschen Prinzip der Identität der Ununterscheidbaren zu stecken, welches besagt, daß diejenigen Wesenheiten als ein und dieselben gelten, denen sämtliche Eigenschaften gemeinsam sind. Da die Identität in den PM nicht als Grundbegriff aufgefaßt, sondern mit Hilfe des Leibnizschen Prinzips definiert wird, stellt sich folgendes Problem: Was gewährleistet, daß den Individuen, die im Hinblick auf alle prädikativen Funktionen übereinstimmen, sämtliche *Eigenschaften* gemeinsam sind (wobei unter einer »Eigenschaft« eine nichtprädikative Funktion zu verstehen ist)? So sind z. B. »in Korsika geboren sein«, »mindestens einmal besiegt worden sein« und »in Korsika geboren sein oder mindestens einmal besiegt worden sein« prädikative Eigenschaften Napoleons, während die Eigenschaft »alle Eigenschaften eines großen Feldherrn haben« nicht auf der gleichen Stufe steht wie die übrigen Eigenschaften Napoleons – auf jeden Fall gehört sie nicht zu seinen prädikativen Eigenschaften. Russell argumentiert nun so:

> »Daraus folgt jedoch keineswegs, daß es nicht *ein* den großen Feldherrn gemeinsames und eigentümliches Prädikat gibt. In der Tat ist es sogar gewiß, daß es ein solches Prädikat gibt: Denn die Zahl großer Feldherrn ist endlich, und jeder von ihnen besaß sicher ein Prädikat, das kein anderes menschliches Wesen besitzt – z. B. den genauen Augenblick seiner Geburt. Die Disjunktion solcher Prädikate wird ein Prädikat bilden, das allen großen Feldherrn gemeinsam und eigentümlich ist. [...] Das Reduzibilitätsaxiom besagt, daß es ein solches Prädikat immer gibt, d. h. daß jede Eigenschaft eines Gegenstandes ebender Menge von Gegenständen zukommt, welche ein gewisses Prädikat haben. [...] Wir können aber ohne die Hilfe eines Axioms nicht umgekehrt schließen, daß dann, wenn alle Prädikate von *x* dem *y* zukommen, auch alle Eigenschaften zweiter Ordnung von *x* dem *y* zukommen müssen. So können wir ohne die Hilfe eines Axioms nicht sicher sein, daß *x* und *y* identisch sind, wenn sie dieselben Prädikate haben« (82 f. / 56 f.).

Mit Hilfe des Reduzibilitätsaxioms ist es dann möglich, »=« durch eine Definition einzuführen:

$x = y \,.=:\, (\varphi) : \varphi \,!\, x \,.\supset.\, \varphi \,!\, y$ Df. (*13.01).

Das Reduzibilitätsaxiom ist geradezu ein Paradebeispiel für einen Satz, der sich nicht durch seine Selbstverständlichkeit auszeichnet. Ja die Gründe für die Anerkennung dieses Axioms sind »großenteils induktiv«, wie Russell schreibt. Sie liegen »nämlich darin, daß viele Behauptungen, die nahezu unbezweifelbar sind, davon abgeleitet werden können und daß kein gleich plausibles Verfahren bekannt ist, dem zufolge diese Behauptungen wahr sein könnten, wenn das Axiom falsch wäre, sowie darin, daß nichts, was wahrscheinlich falsch ist, davon abgeleitet werden kann« (86/59). Dennoch kann man sich nicht des Gefühls erwehren, daß die Annahme des Reduzibilitätsaxioms nicht aufgrund der Erfordernisse der Mathematik zwingend erscheint, sondern

aufgrund der spezifischen Bedürfnisse der PM. Damit wird geradewegs postuliert, daß die erforderlichen Prädikate stets existieren.

7. Ontologie und Erkenntnistheorie

Die »Übersetzung« der normalen mathematischen Ausdrucksweise in die Notation der Logik ist ein Musterbeispiel für logische Analyse. Die logische Analyse ist allerdings kein Selbstzweck, sondern eine notwendige Vorstufe, um einen Überblick zu gewinnen über das Implikationsnetz, in dem die Aussagen ihren Ort haben, und um herauszubekommen, ob und wo auf erschlossene Entitäten Bezug genommen wird, welche sich dann eventuell durch eine logische Konstruktion ersetzen lassen. Sobald die betreffenden Sätze vollständig analysiert sind, ist das Ergebnis längst nicht so klar und übersichtlich wie die entsprechenden idiomatischen Formulierungen. Ist die Analyse jedoch geglückt, wird jeglicher Bezug auf erschlossene Entitäten verschwunden sein, und alles, was mit ihrer Hilfe widerspruchsfrei hat gesagt werden können, läßt sich nun ohne sie artikulieren. Dieses Prinzip der »Konstruktionen statt Schlüsse« wird von den Autoren der PM als Variante von Occams Rasiermesser gekennzeichnet, und sobald man es beherrscht, kann man die sprachlichen Ausdrücke, die sich auf die erschlossenen Wesenheiten beziehen sollen, als harmlose Façon de parler beibehalten und zugleich den praktischen Vorteil einer knappen und übersichtlichen Notation genießen.

Auf erschlossene Entitäten sollten wir deshalb verzichten, weil sie uns auf subtile Weise in die Irre führen können. Durch die grammatische Struktur der natürlichen Sprache drängen sie sich auf, und verlockend wirken sie aufgrund der beträchtlichen Vereinfachungen des deduktiven Schließens, die durch sie ermöglicht werden. Die wirksamste Kur zur Beseitigung der Denkgewohnheiten, die erschlossene Entitäten einbeziehen, ist eine Reform der sprachlichen Ausdrucksmittel. Obwohl wir meistens nicht in die Irre geführt werden, sollten wir diesen heroischen Weg dennoch einschlagen, weil Irrtümer sonst immer möglich sind (und tatsächlich vorkommen).

Dennoch, so mag man einwenden, besteht ein Unterschied zwischen dem Ummodeln der Grammatik und einer Reform der Ontologie: Wir können uns zwar der Klassenbezeichnungen und der Zahlwörter entledigen, doch daraus allein geht nicht hervor, daß wir Klassen und Zahlen losgeworden sind, es sei denn, das sprachlich bedingte Vorhandensein gewisser grammatischer Gegebenheiten wäre unser *einziger* Grund für die Annahme, daß es Klassen oder Zahlen gibt. Und dies scheint, wie Russell schreibt, tatsächlich die Schlußfolgerung der Autoren der PM zu sein:

> »Wenn eine Menge vermuteter Entitäten adrette logische Eigenschaften aufweist, stellt sich vielfach heraus, daß sich diese vermeintlichen Wesenheiten durch rein logische Strukturen ersetzen lassen, die aus Entitäten zusammengesetzt sind, die keine derart adretten Eigenschaften besitzen. In diesem Fall können wir bei der Interpretation einer Aussagenmenge, die nach bisheriger Überzeugung von den vermeintlichen Wesenheiten handelt, die logischen Strukturen durch andere ersetzen, ohne an den Details der betreffenden Aussagenmenge irgend etwas zu verändern. Dadurch wird einiges gespart, denn Entitäten mit adretten logischen Eigenschaften sind immer erschlossen« (Russell, 1924, S. 146).

Dies ist keine behagliche Auffassung, denn nun sieht es so aus, als wüßten wir im Grunde erst nach Anwendung von Occams Rasiermesser, wovon die bisher als unantastbar geltenden und für »Tatsachen« erachteten Aussagen eigentlich handeln. Denn solange es im Hinblick auf die geglaubte Aussage nicht egal ist, ob sie von denselben oder von verschiedenen Dingen »handelt«, sollte die Einsicht, daß unsere Anerkennung von Aussagen wie »2 + 2 = 4« als »Tatsachen« auf einem Mißverständnis dessen beruht, wovon derartige Aussagen eigentlich handeln, unser Selbstvertrauen hinsichtlich unserer vermeintlichen Fähigkeit zur »Tatsachen«-Erkenntnis erheblich erschüttern. Ein Philosoph, der die These vertritt, daß das Erfassen der Bedeutung eines Satzes nicht unmittelbar verknüpft ist mit dem, wovon der Satz handelt, würde auch die Schlußfolgerung nicht beunruhigend finden, daß unsere Aussagen nur Sinn haben, wenn man sie als Aussagen über Entitäten interpretiert, auf die wir gar nicht Bezug nehmen wollten – solange nur die ursprünglichen Sätze und ihre analysierten Gegenstücke jeweils denselben Wahrheitswert erhalten. Einen solchen Philosophen würde man heute einen »Holisten« nennen. Und Quine hat aus Russells Theorie tatsächlich diesen Schluß gezogen. Doch für die Autoren der PM war der Holismus weder 1910 noch 1925 eine mögliche Alternative. Russells ganze Theorie des Bezeichnens (*denotation*) beruht auf den beiden Voraussetzungen, (a) daß wir Sätze eigentlich nur dann verstehen, wenn wir wissen, wovon sie handeln, und (b) daß wir nur die Sätze verstehen, deren Bestandteile wir durch unmittelbare Bekanntschaft (*acquaintance*) kennen. Diese Voraussetzungen lassen sich mit dem Holismus nicht in Einklang bringen. Kein Wunder also, daß in Quines Philosophie kein Platz ist für den Begriff des logischen Eigennamens. Wichtiger ist, daß der Satz nach holistischer Auffassung die kleinste Bedeutung tragende Einheit nur vor dem Hintergrund der ganzen Sprache ist, zu der er gehört. Welche »Denotation« den einzelnen Wörtern des Satzes zuzuordnen ist, wird demnach zu einer innertheoretischen Frage.

Selbst wenn wir den Verfassern der PM die Unterscheidung zwischen »reiner« und »angewandter« Logik zugestehen und der letzteren die Aufgabe überlassen, darzulegen, was eigentlich »gewußt« oder »gekannt« wird, ist doch die Frage, wie die Devise »Konstruktionen statt Schlüsse« *in* der Logik anzuwenden ist, immer noch unbeantwortet. Welches sind die »bekannten Wesenheiten«, die sich unserer logischen Erfahrung darbieten – sofern es dergleichen überhaupt gibt?

Wittgensteins Auffassung, daß die Sätze der Logik Tautologien sind, konnte Russell nicht ohne Zögern übernehmen, denn durch sie wird die Frage nach dem Erkenntnisgegenstand der Logik nichtig. Alle Tautologien sagen das gleiche, nämlich nichts; sie *zeigen* gewisse allgemeine Merkmale von Wahrheitswert-Systemen. Verfährt man so überaus streng mit dem Begriff »Sinn« wie der Verfasser des *Tractatus*, gerät der wichtigste Begriff, auf dem die Typentheorie beruht – nämlich ebender Begriff des »Sinn-Habens« – in Gefahr. Es ist traurig und ironisch zugleich, daß Russell seine eigene Logik durch einen Begriff fundiert, dem er selbst bestenfalls psychologische Bedeutung zugesteht. Doch ohne eine Vorstellung davon, was es heißt, daß ein Wort Sinn habe, sind wir buchstäblich außerstande, die Typentheorie auch nur zu formulieren. Die Auffassung, wonach die Logik ein mit Hilfe von Wahrheitstafeln betriebener Tautologienkalkül ist, trägt nicht dazu bei, die durch Russells Devise aufgeworfene Frage zu beantworten.

Aus den bisherigen Ausführungen sollte klar geworden sein, daß der größte Teil der durch die »erschlossenen Wesenheiten« aufgebürdeten Last vom Begriff der *Aussagenfunktion* und von der Beziehung zu ihren Werten – also den Aussagen – getragen werden muß. Viele Verständnisschwierigkeiten, die sich für den Leser der PM ergeben, schreiben sich von den zwischen 1918 und 1924 erfolgten beträchtlichen Änderungen in Russells philosophischer Einstellung her, die vor allem auf Wittgensteins Einfluß zurückgehen. Während die Aussagenfunktionen in der ersten Auflage der PM offenbar auf »Entitäten« verweisen, die – ähnlich wie Freges Begriffe und Funktionen – den Bereich der Variablen der Quantifikation bilden, ist in der zweiten Auflage eine nominalistische Interpretation vorherrschend, die sich aus dem in der zweiten Einleitung aufgestellten Grundprinzip ergibt, wonach *eine Funktion nur vermöge ihrer Werte erscheinen kann* (144/XXIX). Bildet man Aussagen wie »Es gibt eine Eigenschaft, die Sokrates und Platon gemeinsam ist« oder spricht man von »allen Eigenschaften des Sokrates«, dann ist »die durch die Variable φ eingeführte Neuheit eine Neuheit der Klassenbildung, nicht des klassifizierten Materials«. Aussagen des eben genannten Typs gehören nicht zu den Elementaraussagen; doch solange ihre Werte Elementaraussagen sind, brauchen wir uns um variable »Funktionen« nicht zu kümmern (147 f. / XXXI). Im Rahmen der neuen Darstellung bilden Gruppen von Elementaraussagen (Atom- und Molekularaussagen) die Bausteine der Gesamtkonstruktion. Diese Auffassung paßt übrigens nicht ganz zu der früheren Konzeption, wonach Aussagen »unvollständige Symbole« sind. Unter dem Eindruck von Wittgensteins Kritik stellt Russell seine bisherige Urteilstheorie in Frage. (Vgl. Pears, 1967, 1989; Iglesias, 1984; Griffin, 1980; Russell, 1984; Cocchiarella, 1986.)

Die Interpretationsprobleme, die durch den Begriff der Aussagenfunktion aufgeworfen werden, hängen womöglich mit einem Problem zusammen, das Russell nie zufriedenstellend gelöst hat. Dies betrifft die Frage, wie seine These, daß es externe Relationen gibt, zu formulieren ist, ohne die Relationen zugleich in Dinge zu verwandeln und sie zusammen mit ihren Bezugsgegenständen und Relata als Bestandteile der Realität aufzufassen. Der Ausweg aus diesen Schwierigkeiten führt erneut über die Theorie der logischen Typen und nimmt 1924 eine deutlich sprachbezogene Gestalt an:

> »Es mag zwar sein, daß sich Attribute und Relationen nicht analysieren lassen, doch sie unterscheiden sich von Substanzen dadurch, daß sie eine Struktur andeuten und daß es kein sinnvolles Zeichen gibt, das allein dazu imstande wäre, sie zu bezeichnen. Alle Aussagen, in denen ein Attribut bzw. eine Relation das Subjekt zu sein *scheint*, sind nur dann sinnvoll, wenn sie in eine Form gebracht werden kön-

> nen, in der das Attribut von etwas ausgesagt wird bzw. in der die Relation als Relation fungiert. Wäre dies nicht der Fall, gäbe es sinnvolle Aussagen, in denen ein Attribut oder eine Relation die einer Substanz angemessene Position einnimmt, was im Widerspruch zur Typenlehre stünde [...] Das angemessene Zeichen für ›gelb‹ [...] ist daher nicht das einzelne Wort ›gelb‹, sondern die Aussagenfunktion ›x ist gelb‹, wobei die Struktur des Zeichens die Position anzeigt, die das Wort ›gelb‹ haben muß, um sinnvoll zu sein« (Russell, 1924, S. 158 f.).

Die Auffassung, daß das Zeichen vermöge seiner Struktur *zeigen* soll, welcher *Typus* von Argument zulässig ist, erinnert stark an den *Tractatus*. Aus dieser neuen Perspektive gesehen, wirkt die Typentheorie nicht so sehr wie eine Theorie über die klassifizierten Dinge, sondern eher wie eine Theorie der Zeichen, und diese Umdeutung der Theorie der logischen Typen harmoniert besser mit der sprachbezogenen oder nominalistischen Einstellung, die die Einleitung zur zweiten Auflage der PM prägt.
Kein Wunder, daß man womöglich die Orientierung verliert, wenn man unter Berücksichtigung der vorangehenden Überlegungen auf die Frage zurückkommt, welcher Art die »bekannten Entitäten« sein sollen, auf die in der Devise »Konstruktionen statt Schlüsse« angespielt wird. Sind die »bekannten Entitäten« sprachliche Konstruktionen? Sind sie intensional gefaßte Begriffe und Relationen? Sind sie Elementaraussagen und ihre Bedeutungen?
Die Quelle dieser Desorientierung hat Quine in der in den PM grassierenden Verwechslung von Gebrauch und Erwähnung sprachlicher Ausdrücke ausgemacht. Tatsächlich ist nicht zu bestreiten, daß man häufig unsicher ist, ob die Verfasser der PM über das Zeichen oder über seine Bedeutung reden bzw. über das, worauf es verweist oder was es bezeichnet. Unter dem Einfluß von Quines Theorie der ontologischen Festlegung sind viele Autoren zu der Auffassung

gelangt, die »bekannten Entitäten« seien mit denjenigen gleichzusetzen, auf die man durch die jeweilige Theorie ontologisch festgelegt wird, was wiederum daran abzulesen ist, welche Variablen gebunden vorkommen. Doch meines Erachtens wäre es unbefriedigend, wollte man sich mit dieser Antwort abfinden.
Einerseits sind die PM ausdrücklich nur auf eine Gesamtheit von Individuen festgelegt, doch darüber, was unter einem »Individuum« zu verstehen ist, wird nichts gesagt; ohnehin geht es der Logik nicht um die Eigenarten der Individuen. Russells erkenntnistheoretische These, wonach Individuen und Ereignisse nichts weiter sind als Konstruktionen aus Sinnesdaten oder aus Sinneserfahrungen, ist für die Logik belanglos. In der Einleitung von 1925 heißt es, daß Atomaussagen Bestandteile (*constituents*) und Bausteine (*components*) aufweisen. Die ersteren werden durch Variablen – und in der Sprache durch »logische Eigennamen«, d. h. durch Indikatoren wie »dies« und »jenes« – angedeutet, die letzteren durch Großbuchstaben, z. B. »R_1 (x)« (d. h. x hat das Prädikat R_1), »R_2 (x, y)« d. h. x steht in der – intensional gefaßten – Beziehung R_2 zu y) usw. ad infinitum bzw. so weit wie möglich. »Die Logik weiß nicht, ob es in der Tat n-adische Relationen (im intensionalen Sinn) gibt [...]. Die Logik interessiert sich aber für diese Tatsache nicht; sie hat es nur mit der *Hypothese* zu tun, daß es Aussagen von dieser und jener Form gibt« (126/XV).
Andererseits betrachten die Autoren der PM weder die Quantifikation über Aussagen noch die Auffassung, Aussagen seien Werte von Aussagenvariablen, als Symptom einer ontologischen Festlegung auf Aussagen als Entitäten. Ähnliches gilt auch für Aussagenfunktionen, wenn man sie von ihren Argumenten »getrennt« betrachtet. In der zweiten Einleitung der PM wird betont, es sei unzulässig, Attribute und Relationen zusammen mit den Individuen als »Bestandteile« der Tatsachen aufzufassen. Dies wird nun ebenfalls als Folge-

satz der Devise angesehen, daß *Aussagenfunktionen nur vermöge ihrer Werte vorkommen.*

Welches sind nun die »bekannten Entitäten«, auf die in dem oben genannten Prinzip Bezug genommen wird? Hat die Logik ihre eigenen »bekannten Entitäten«? Bisher sind wir auf Aussagenfunktionen und Aussagen gestoßen, auf Grundbegriffe, Grundaussagen und Kriterien der Sinnhaftigkeit – und alle diese Dinge kann man als bekannt, vertraut und für den Verstand erkennbar ansehen. Doch eine der philosophischen Pointen der PM liegt in dem Versuch zu zeigen, daß keine der eben genannten Ideen für eine selbständige *Entität* steht bzw. auf sie verweist oder sie bedeutet. Es fragt sich allerdings, ob die Verfasser der PM nicht selber der Tyrannei der Umgangssprache erlegen sind, indem sie der Formulierung ihres heuristischen Prinzips eine ontologische Wendung geben.

Bibliographische Hinweise

Alfred North Whitehead / Bertrand Russell: Principia Mathematica. Cambridge: Cambridge University Press. Bd. 1: 1910. (^{2}1925.) Bd. 2: 1912. (^{2}1927.) Bd. 3: 1913. (^{2}1927.) [Zit. als: PM.]

Die deutschen Zitate folgen (mit gelegentlichen stillschweigenden Modifikationen) der Übersetzung von Hans Mokre (Frankfurt a. M.: Suhrkamp, 1986). Seitenangaben vor dem Schrägstrich beziehen sich auf diese Übersetzung, nach dem Schrägstrich auf die einbändige Auswahlausgabe der PM (Cambridge: Cambridge University Press, 1962 [u. ö.]). Die einzelnen Kapitel und die entsprechenden Lehrsätze sind in den PM durch * gekennzeichnet.

Cocchiarella, Nino: Logical Studies in Early Analytic Philosophy. Columbus (Ohio) 1986.

Dummett, Michael: The Interpretation of Frege's Philosophy. London 1981.

Gödel, Kurt: Russell's Mathematical Logic (1944). In: David Pears (Hrsg.): Russell's Logical Atomism. London 1972. S. 192–226. – Dt.: Russells mathematische Logik. Übers. von Hans-Joachim Metzger. In: Alfred North Whitehead / Bertrand Russell: Principia Mathematica. Übers. von Hans Mokre. Frankfurt a. M. 1986. S. V–XXXIV.

Grattan-Guinness, Ivor: Dear Russell – Dear Jourdain. London 1977.

Griffin, Nicholas: Russell on the Nature of Logic. In: Synthese 45,1 (1980) S. 117–188.

Iglesias, Teresa: Russell's Theory of Knowledge and Wittgenstein's Earliest Writings. In: Synthese 60,3 (1984) S. 285–332.

Hylton, Peter: Russell's Substitutional Theory. In: Synthese 45,1 (1980) S. 1–31.

Kreisel, Georg: Bertrand Russell's Logic. In: David Pears (Hrsg.): Bertrand Russell. A Collection of Critical Essays. New York 1972. S. 168–174.

Pears, David: Bertrand Russell and the British Tradition of Philosophy. London 1967.

– (Hrsg.): Bertrand Russell. A Collection of Critical Essays. New York 1972.