

Für $n \in \omega$ bezeichnet ${}^n\omega$ die Menge aller Funktionen $s : n \rightarrow \omega$, und ${}^\omega\omega$ bezeichnet die Menge aller Funktionen $f : \omega \rightarrow \omega$. Für $s, t \in \bigcup_{n \in \omega} {}^n\omega$ definieren wir

$$s \preceq t : \Longleftrightarrow t|_{\text{dom}(s)} = s.$$

Für eine Funktion $g : A \rightarrow B$ ist $\text{rng}(g) := g[A]$.

Für $m, n \in \omega$ und $t \in {}^n\omega$ sei $t \frown m := t \cup \{\langle n, m \rangle\}$, das heisst $t \frown m \in {}^{n+1}\omega$ und $t \frown m(n) = m$.

Eine Menge $T \subseteq \bigcup_{n \in \omega} {}^n\omega$ ist ein **Baum**, falls für alle $s, t \in \bigcup_{n \in \omega} {}^n\omega$ gilt:

$$s \preceq t \wedge t \in T \rightarrow s \in T$$

Für einen Baum $T \subseteq \bigcup_{n \in \omega} {}^n\omega$ bezeichnet

$$[T] := \{f \in {}^\omega\omega : \forall n \in \omega (f|_n \in T)\}$$

die Menge aller unendlichen Äste durch T .

2. Sei $\mathcal{U} \subseteq [\omega]^\omega$ ein Ultrafilter. Wir definieren die folgende Partialordnung $\mathbb{P} = (P, \leq)$: Bedingungen aus P sind Paare (s, T_s) , wobei $s \in {}^n\omega$ (für ein $n \in \omega$) und T_s ein Baum mit $s \in T_s$, wobei für alle $t \in T_s$ gilt: $s \preceq t$ oder $t \preceq s$; und für alle $t \in T_s$ mit $s \preceq t$ gilt:

$$\{m \in \omega : t \frown m \in T_s\} \in \mathcal{U}.$$

Schliesslich definieren wir

$$(s, T_s) \leq (t, T_t) : \Longleftrightarrow s \preceq t \wedge t \in T_s \wedge T_s \supseteq T_t.$$

Zeige: Für jede Färbung $\pi : [\omega]^2 \rightarrow 2$ ist die Menge

$$D_\pi = \{(s, T_s) \in P : \forall f \in [T_s] (\pi|_{[\text{rng}(f) \setminus \text{rng}(s)]^2} \text{ ist konstant})\}$$

offen dicht in P .

3. Zeige mit der Partialordnung aus Aufgabe 2:

$$\text{MA} \implies \text{par} = \mathfrak{c}$$