

Sei  $\mathbb{P} = (P, \leq)$  die Partialordnung aus Aufgabe 2 (bezüglich einem Ultrafilter  $\mathcal{U} \in \mathbf{V}$ ), sei  $\mathbf{V} \models \text{ZFC}$ , und sei  $G$  ein  $\mathbb{P}$ -generischer Filter über  $\mathbf{V}$ .

**10.** Sei  $\mathbb{P} = (P, \leq)$  die Partialordnung aus Aufgabe 2 (bezüglich dem Ultrafilter  $\mathcal{U}$ ), sei  $\mathbf{V} \models \text{ZFC}$ , und sei  $G$  ein  $\mathbb{P}$ -generischer Filter über  $\mathbf{V}$ .

- (a) Zeige, dass es in  $\mathbf{V}[G]$  eine Funktion  $f \in {}^\omega\omega$  gibt, so dass für alle Funktionen  $g \in {}^\omega\omega$  welche in  $\mathbf{V}$  liegen gilt:  $g <^* f$ , d.h.

$$\exists n_0 \forall k \geq n_0 (g(k) < f(k))$$

- (b) Zeige, dass es in  $\mathbf{V}[G]$  eine monoton wachsende, divergente Funktion  $h \in {}^\omega\omega$  gibt, so dass für alle monoton wachsenden, divergenten Funktionen  $g \in {}^\omega\omega$  welche in  $\mathbf{V}$  liegen gilt:  $h <^* g$ .

- (c) Zeige, dass es in  $\mathbf{V}[G]$  eine Menge  $z \in [\omega]^\omega$  gibt, so dass für alle  $x \in \mathcal{U}$  welche in  $\mathbf{V}$  liegen gilt:  $z \subseteq^* x$ .

- (d) Zeige, dass es in  $\mathbf{V}[G]$  eine Menge  $x \in [\omega]^\omega$  gibt, so dass für alle  $y \in [\omega]^\omega$  welche in  $\mathbf{V}$  liegen gilt:

$$x \subseteq^* y \quad \vee \quad x \subseteq^* (\omega \setminus y)$$

**11.** Zeige, dass es in  $\mathbf{V}[G]$  ein  $x \in [\omega]^\omega$  gibt, so dass für alle 2-Färbungen  $\pi : [\omega]^2 \rightarrow 2$  welche in  $\mathbf{V}$  liegen gilt, dass  $x$  fast homogen für  $\pi$  ist (d.h. es existiert eine endliche Menge  $E \in \text{fin}(\omega)$ , sodass  $\pi|_{[x \setminus E]^2}$  konstant ist).

*Hinweis:* Vergleiche mit Aufgabe 2.