Forcing

Serie 6

Modelle von Fragmenten von ZFC — Besprechung am 12. April

14. Sei $\mathsf{ZFC}-\mathsf{I} := \mathsf{ZFC} - $ Unendlichkeitsaxiom.

Zeige, dass gilt: $\mathbf{V}_\omega \models \mathsf{ZFC}-\mathsf{I}$

15. Sei $\mathbf{V}$ ein Modell von ZFC.

Zeige, dass für jedes endliche Fragment $\mathsf{ZFC}^* \subseteq \mathsf{ZFC}$ ein Modell $\mathbf{N} \models \mathsf{ZFC}^*$ und eine Ordinalzahl $\alpha_0 \in \mathbf{V}$ existieren, so dass gilt:

$$\mathbf{V} \models \alpha_0 \in \omega_1 \quad \text{und} \quad \mathbf{N} \models \text{“}\alpha_0 \text{ ist überabzählbar”}$$

16. (a) Eine Kardinalzahl κ heisst **unerreichbar** wenn folgendes gilt:

(1) κ ist Limeskardinalzahl,

(2) κ ist regulär,

(3) für alle Kardinalzahlen $\lambda < \kappa$ ist $2^\lambda < \kappa$.

Zeige: Ist κ unerreichbar, so gilt $\mathbf{V}_\kappa \models \mathsf{ZFC}$.

(b) Eine Kardinalzahl κ heisst **worldly** wenn gilt $\mathbf{V}_\kappa \models \mathsf{ZFC}$.

Zeige: Ist κ worldly, so gilt (1) und (3).

Bemerkung: Ist κ worldly, so muss κ nicht notwendigerweise regulär sein.

17. Der Satz von Löwenhein-Skolem (für ZFC) besagt, dass ZFC ein abzählbares Modell besitzt.

Zeige, dass der Satz von Löwenhein-Skolem (für ZFC) in ZFC nicht beweisbar ist.

Hinweis: Wäre der Satz von Löwenhein-Skolem (für ZFC) in ZFC beweisbar, so gäbe es in jedem Modell $\mathbf{V} \models \mathsf{ZFC}$ eine abzählbare Menge $M \in \mathbf{V}$ mit $M \models \mathsf{ZFC}$.