Forcing

Serie 9

freie Familien und freie Filter

Abgabe am 24. November

---

28. Sei $\mathscr{F}$ der Fréchet-Filter.

Bestimme $\mathscr{F}^+ \setminus \mathscr{F}$.

29. Sei $\mathscr{F} \subseteq [\omega]^\omega$ ein freier Filter.

Zeige: Enthält $\mathscr{F}^+$ die Menge $x \cup y$ (für $x, y \subseteq \omega$), dann enthält $\mathscr{F}^+$ mindestens eine der beiden Mengen x, y.

30. Sei $\mathscr{A} \subseteq [\omega]^\omega$ eine unendliche maximale fast disjunkte Familie und sei

$$\mathscr{F}_{\mathscr{A}} := \big\{ y \in [\omega]^\omega : \exists x_0 \cdots x_n \in \mathscr{A} \big(\omega \setminus (x_0 \cup \ldots \cup x_n) \subseteq^* y \big) \big\} .$$

(a) Zeige, dass $\mathscr{F}_{\mathscr{A}}$ ein freier Filter ist.

(b) Konstruiere eine Element aus $\mathscr{F}_{\mathscr{A}}^+ \setminus \mathscr{F}_{\mathscr{A}}$.

31. Sei $\mathscr{F} \subseteq [\omega]^\omega$ die Familie aller Mengen mit Dichte 1.

(a) Zeige, dass $\mathscr{F}$ ein freier Filter ist.

(b) Bestimme $\mathscr{F}^+$.

32. Sei $x_0 \in [\omega]^\omega$ eine Menge mit Dichte $\frac{1}{2}$ und sei

$$\mathscr{F}_0 := \{ y \in [\omega]^\omega : \mathrm{d}(x_0 \setminus y) = 0 \} .$$

(a) Zeige, dass $\mathscr{F}_0$ ein freier Filter ist.

(b) Bestimme $\mathscr{F}_0^+$.