Forcing - Serie 12 - Musterlösung

Aufgabe 32

Sei $\mathcal{U}$ ein R-UF in V und sei $\hat{\mathcal{U}}$ der durch $\mathcal{U}$ generierte Ultrafilter in $V[G]$.

Für diese Behauptung brauchen wir nur $\mathbb{P}$ erhält P-points und $\mathbb{P}$ ist proper.

Beh 1: $\hat{\mathcal{U}}$ ist ein P-point in $V[G]$.

Nach Fact 11.12(b) reicht es zu zeigen, dass für jede abzählbare Menge $\{x_n \mid n\in\omega\} \subseteq \hat{\mathcal{U}}$ ein $y \in \hat{\mathcal{U}}$ existiert mit

$$\forall n\in\omega \, (y \subseteq^* x_n).$$

Sei $f: \mathcal{U} \to \mathfrak{c}$ eine Bijektion in V und sei

$$\{x_n \mid n\in\omega\} \subseteq \hat{\mathcal{U}} \cap V[G]$$

eine abzählbare Menge. Für jedes $n\in\omega$ wähle ein $y_n \in \mathcal{U}$ mit

$$y_n \subseteq x_n.$$

Die Menge

$$A := \{f(y_n) \mid n\in\omega\} \subseteq \mathfrak{c}$$

ist abzählbar. Daher gibt es nach Theorem 21.3(b) eine abzählbare Teilmenge $B \subseteq \mathfrak{c}$, $B \in V$ mit $A \subseteq B$. Sei

$$\overline{B} := \{f^{-1}(\beta) \mid \beta \in B\}$$

Es gilt $\overline{B} \in V$, $\overline{B} \subseteq \mathcal{U}$ und $|\overline{B}| \leq \omega$. Da $\mathcal{U}$ ein P-point in V ist, gibt es ein $y \in \mathcal{U} \cap V$ mit

$$\forall x \in \overline{B} \, (y \subseteq^* x).$$

Nach Konstruktion gilt also

$$\forall n\in\omega \, (y \subseteq^* y_n \subseteq x_n).$$

Daher ist $\hat{\mathcal{U}}$ ein P-point in $V[G]$.

Beh 2: $\hat{\mathcal{U}}$ ist ein Q-point in $V[G]$.

Sei $\{I_n \subseteq \omega \mid n\in\omega\}$ eine Intervallpartition von ω in $V[G]$. Für jedes $n\in\omega$ sei

$$h(n) := \max(I_n).$$

Es gilt $h \in {}^\omega\omega \cap V[G]$. Da $\mathbb{P}$ nach Voraussetzung ${}^\omega\omega$-bounding ist, gibt es eine Funktion $f \in {}^\omega\omega \cap V$ mit

$$\forall n\in\omega \, (f(n) > h(n)).$$

OBdA können wir annehmen, dass f streng monoton wachsend ist.
Sei $k_0 := f(0)$ und für jedes $n \in \omega$ sei $k_{n+1} := f(k_n)$. Weiter sei $J_0 := [0, k_0[$ und für jedes $n \in \omega$ sei $J_{n+1} := [k_n, k_{n+1}[$. Die Menge

$$\{ J_n \mid n \in \omega \}$$

ist eine Intervallpartition von ω in V. Da f die Funktion h dominiert, gibt es höchstens zwei aufeinanderfolgende Zahlen m und $m+1$ mit

$$I_n \cap J_m \neq \emptyset \neq I_n \cap J_{m+1}.$$

Da $\mathcal{U}$ ein Q-point in V ist, gibt es ein $x \in \mathcal{U} \cap V$, sodass

$$\forall n \in \omega \; (|x \cap J_n| \leq 1).$$

Seien

$$x_0 := \{ x \cap J_{2n} \mid n \in \omega \} \quad \text{und} \quad x_1 := \{ x \cap J_{2n+1} \mid n \in \omega \}.$$

Da $\mathcal{U}$ ein Ultrafilter in V ist, gilt $x_0 \in \mathcal{U}$ oder $x_1 \in \mathcal{U}$. OBdA sei $x_0 \in \mathcal{U}$. In $V[G]$ gilt

$$|x_0 \cap I_n| \leq 1.$$

Da $x_0 \in \hat{\mathcal{U}}$ ist und $\{ I_n \mid n \in \omega \}$ eine beliebige Intervallpartition in $V[G]$ ist, folgt mit Fact 11.10, dass $\hat{\mathcal{U}}$ ein Q-point in $V[G]$ ist.

Aufgabe 33

Für jedes Ultrafilter $\mathcal{W} \subseteq [\omega]^\omega$ sei
$$\hat{\mathcal{W}} := \{x \in [\omega]^\omega \mid \exists y \in \mathcal{W}\, (y \subseteq x)\}.$$
Wir zeigen: Sei $\mathbb{P}$ ${}^\omega\omega$-bounding und seien $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2$ zwei Q-points in V, welche Ultrafilter in $V[G]$ generieren. Dann gilt
$$V[G] \models \hat{\mathcal{U}}_1 \equiv_{RK} \hat{\mathcal{U}}_2 \quad \Rightarrow V \models \mathcal{U}_1 \equiv_{RK} \mathcal{U}_2.$$

Da $\hat{\mathcal{U}}_1 \equiv_{RK} \hat{\mathcal{U}}_2$ ist, gibt es eine Bijektion $f \in {}^\omega\omega \cap V[G]$ mit
$$f(\hat{\mathcal{U}}_2) = \hat{\mathcal{U}}_1.$$
Da $\mathbb{P}$ ${}^\omega\omega$-bounding ist, gibt es eine streng monoton wachsende Funktion $g \in {}^\omega\omega \cap V$ mit
$$g > f \text{ und } g > f^{-1}.$$
Seien $k_0 := g(0)$ und $I_0 := [0, g(0)[$. Für jedes $n \in \omega \setminus \{0\}$ seien
$$k_n = g(k_{n-1}) \text{ und } I_n := [k_{n-1}, k_n[.$$
Da $\mathcal{U}_1$ und $\mathcal{U}_2$ Q-points in V sind, gibt es ein $u_1 \in \mathcal{U}_1 \subseteq \hat{\mathcal{U}}_1$ und ein $u_2 \in \mathcal{U}_2 \subseteq \hat{\mathcal{U}}_2$ mit
$$u_1 \cap I_n = \{a_n\} \text{ und } u_2 \cap I_n = \{b_n\}$$
für jedes $n \in \omega$. Es gilt
$$f(b_n) \in I_{n-1} \cup I_n \cup I_{n+1} \qquad (*)$$
für jedes $n \in \omega$.

Warum? Wir haben $g > f$. Also gilt
$$I_{n+1} \ni g(b_n) > f(b_n).$$
Das heisst, $f(b_n) < k_{n+1}$. Ausserdem gilt $g > f^{-1}$. Das heisst,
$$b_n = f^{-1}(f(b_n)) < g(f(b_n)).$$
Wäre $f(b_n) < k_{n-2}$, so hätten wir $g(f(b_n)) < g(k_{n-2}) = k_{n-1}$, also $b_n < k_{n-1} \Rightarrow b_n \in I_n$ $\lightning$

Da $f(\hat{\mathcal{U}}_2) = \hat{\mathcal{U}}_1$ ist, gilt $f[u_2] \in \hat{\mathcal{U}}_1$. Da $\hat{\mathcal{U}}_1$ ein Filter ist, gilt also $u := f[u_2] \cap u_1 \in \hat{\mathcal{U}}_1$. Weiter gilt $v := f^{-1}[u] \in \hat{\mathcal{U}}_2$. Das heisst, es gibt ein $v' \subseteq v$ mit $v' \in \mathcal{U}_2$. Wegen $(*)$ gilt für jedes $b_n \in v'$
$$f(b_n) \in \{a_{n-1}, a_n, a_{n+1}\}.$$

Wir definieren

$$V_- := \{ b_n \in V' \mid f(b_n) = a_{n-1} \}$$

$$V_0 := \{ b_n \in V' \mid f_n(b_n) = a_n \}$$

$$V_+ := \{ b_n \in V' \mid f(b_n) = a_{n+1} \}.$$

Da $\hat{\mathcal{U}}_2$ ein Ultrafilter ist, ist genau eine dieser Mengen in $\mathcal{U}_2$. Nehmen wir an, es sei $V_- \in \hat{\mathcal{U}}_2$. Wir definieren (in V) die Funktion

$$g_- : V' \longrightarrow u_1$$
$$b_n \longmapsto a_{n-1}$$

Erweitere diese Funktion zu einer Bijektion $g_-^* \in {}^{\omega}\omega \cap V$. Dann gilt

$$g_-^*(\mathcal{U}_2) = \mathcal{U}_1.$$

Warum? "$\subseteq$" Sei $x \in g_-^*(\mathcal{U}_2)$. D.h. $g_-^{*-1}[x] \cap V' \in \mathcal{U}_2$. Da $f(\hat{\mathcal{U}}_2) = \hat{\mathcal{U}}_1$ ist, gilt $f[g_-^{*-1}[x] \cap V'] \in \hat{\mathcal{U}}_1$. Nach Definition von $\mathcal{U}_1$ gibt es ein $z \in \mathcal{U}_1$ mit

$$z \subseteq f[g_-^{*-1}[x] \cap V'] = g_-^*[g_-^{*-1}[x] \cap V'] \subseteq g_-^*[g_-^{*-1}[x]] = x.$$

Also ist $x \in \mathcal{U}_1$.

"$\supseteq$" Sei $y \in \mathcal{U}_1$. Es gilt

$$g_-^{*-1}[y] \supseteq g_-^{*-1}[\overbrace{y \cap f[V_-]}^{\in \hat{\mathcal{U}}_1}] =: *$$

Es gilt $f[V_-] \subseteq g[V']$. Also gilt

$$* = f^{-1}[\underbrace{y \cap f[V_-]}_{\in \hat{\mathcal{U}}_1}] \in \mathcal{U}_2.$$

Das heisst, es gibt ein $z \in \mathcal{U}_2$ mit

$$g_-^{*-1}[y] \supseteq f^{-1}[y \cap f[V_-]] \supseteq z.$$

Also ist $g_-^{*-1}[y] \in \mathcal{U}_2$.