

0. Sei $\mathbb{P} = (P, \leq)$ eine Forcingpartialordnung. Zeige, dass folgendes gilt:

- (a) Ist $D \subseteq P$ offen dicht und $A \subseteq D$ eine maximale Antikette in D (d.h. für alle $p \in D$ existiert ein $q \in A$, so dass p und q kompatibel sind), dann ist A eine *maximale* Antikette in P .
- (b) Ist $A \subseteq P$ eine maximale Antikette in P , dann ist $D = \{q \in P : \exists r \in A (q \geq r)\}$ eine offen dichte Teilmenge von P .

Beweis:

- (a) Es ist klar, dass A eine Antikette ist. Wie zeigen Maximalität:
Für alle $p \in P$ gibt es $r \in D$ mit $r \geq p$. Also gibt es $q \in A$ so, dass q kompatibel mit r ist, d.h. es gibt $s \in P$ so, dass $q \leq s \geq r$, also $q \leq s \geq p$, d.h. q ist kompatibel mit p .
Da p beliebig war, folgt Maximalität von A .
- (b) D ist offen, denn ist $q \in D$, so gibt es $r \in A$ mit $q \geq r$. Ist weiter $p \in P$ mit $p \geq q$, dann folgt $p \geq r$ und somit $p \in D$.
 D ist dicht, denn ist $q \in P$, dann gibt es ein $r \in A$ kompatibel mit r , d.h. es gibt $s \in P$ so, dass $q \leq s \geq r$. Also ist $s \in D$ mit $s \geq q$.

1. Eine Menge $\mathcal{B} \subseteq [\omega]^\omega$ ist eine Basis eines nicht-trivialen Ultrafilters $\mathcal{U} \subseteq [\omega]^\omega$, falls gilt:

$$\mathcal{U} = \{x \in [\omega]^\omega : \exists y \in \mathcal{B} (y \subseteq x)\}$$

Die **Ultrafilter-Zahl** $\mathfrak{u}$ ist die kleinste Kardinalität einer Ultrafilterbasis. Das heisst:

$$\mathfrak{u} = \min\{|\mathcal{B}| : \mathcal{B} \subseteq [\omega]^\omega \text{ ist eine Basis eines nicht-trivialen Ultrafilters}\}$$

Zeige:

$$\text{MA} \implies \mathfrak{u} = \mathfrak{c}$$

Hinweis: Verwende die Partialordnung mit den Bedingungen (s, x) , wobei $s \in \text{fin}(\omega)$ und $x \in \mathcal{B}$, wobei $\mathcal{B} \subseteq [\omega]^\omega$ eine Filterbasis der Kardinalität $< \mathfrak{c}$ ist, und definiere:

$$(s, x) \leq (t, y) : \iff s \subseteq t \wedge x \supseteq y \wedge t \setminus s \subseteq x$$

Beweis:

Wir zeigen, dass die Filterbasis $\mathcal{B}$ keine Ultrafilterbasis ist.

Sei $\mathbb{P} = (P, \leq)$ die besagte Partialordnung. Dann erfüllt $\mathbb{P}$ die countable chain condition, denn $\text{fin}(\omega)$ ist abzählbar und es gilt:

$$\forall x, y \in \mathcal{B} : \exists z \in \mathcal{B} : z \subseteq x \cap y, \quad \text{also} \quad (s, x) \leq (s, z) \geq (s, y).$$

(Entsprechend ist $\mathbb{P}$ sogar σ -centred.)

Definiere die folgenden Mengen:

$$\forall y \in \mathcal{B} : E_y := \{(s, x) \in P \mid x \subseteq y\} \quad \text{und} \quad \forall n \in \omega : D_n := \{(s, x) \in P \mid |s| \geq n\}$$

Es ist leicht zu sehen, dass $\mathcal{D} := \{D_n\}_{n \in \omega} \cup \{E_y\}_{y \in \mathcal{B}}$ eine Familie der Kardinalität $< \mathfrak{c}$ von offen-dichten Mengen ist. Das heisst, nach MA gibt es einen $\mathcal{D}$ -generischen Filter G . Definiere

$$x_G := \bigcup \{s \in \text{fin}(\omega) \mid \exists x \in \mathcal{B} : (s, x) \in G\}$$

Zunächst gilt, dass $x_G \in [\omega]^\omega$, denn für jedes $n \in \omega$ schneidet G die offen-dichte Menge D_n . Weiter gilt für alle $y \in \mathcal{B}$, dass $x_G \subseteq^* y$.

Beweis. (von LISA RICCI)

Sei $y \in \mathcal{B}$ beliebig, $(s_0, x_0) \in G \cap E_y$, also $x_0 \subseteq y$. Da G ein Filter ist, gilt:

$$\forall (s, x) \in G : \exists (s', x') \in G : (s, x) \leq (s', x') \geq (s_0, x_0)$$

Somit haben wir $s \setminus s_0 \subseteq s' \setminus s_0 \subseteq x_0 \subseteq y$. Nach Definition von x_G folgt also: $x_G \setminus s_0 \subseteq y$, was zu beweisen war. $\dashv$

Seien $z_1, z_2 \in [x_G]^\omega$ mit $z_1 \cap z_2 = \emptyset$. Weder z_1 noch $\omega \setminus z_1$ können im von $\mathcal{B}$ erzeugten Filter sein. Also erzeugt $\mathcal{B}$ keinen Ultrafilter, was zu zeigen war.