6. Sei $\mathbb{P} = (\text{Fn}(\omega, 2), \subseteq)$.

(a) Schreibe explizit die kanonischen $\mathbb{P}$ -Namen x, y, z folgender Mengen auf:

$$x = \{\emptyset\} \quad y = \{\{\emptyset\}\} \quad z = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$$

(b) Finde einen $\mathbb{P}$ -Namen u und drei $\mathbb{P}$ -Bedingungen p, q, r , so dass gilt:

$$p \Vdash_{\mathbb{P}} u = x \quad q \Vdash_{\mathbb{P}} u = y \quad r \Vdash_{\mathbb{P}} u = z$$

Lösung:

(a) $x = \{\langle \emptyset, \emptyset \rangle\} = \{\langle \emptyset, \emptyset \rangle\}$, $y = \{\langle x, \emptyset \rangle\} = \{\langle \{\langle \emptyset, \emptyset \rangle\}, \emptyset \rangle\}$,
 $z = \{\langle \emptyset, \emptyset \rangle, \langle x, \emptyset \rangle\} = \{\langle \emptyset, \emptyset \rangle, \langle \{\langle \emptyset, \emptyset \rangle\}, \emptyset \rangle\}$.

(b) Wegen FACT 14.9 (a) sind p, q und r inkompatibel. Wähle zum Beispiel

$$p = \text{id}_2, \quad q = 1 - \text{id}_2, \quad r = p + q = 1|_2.$$

Dann können wir schreiben:

$$u := \{\langle \emptyset, p \rangle, \langle \emptyset, r \rangle, \langle x, q \rangle, \langle x, r \rangle\}$$

7. Sei $\mathbb{P} = (\text{Fn}(\omega, 2), \subseteq)$.

(a) Konstruiere unendlich viele verschiedene endliche maximale Antiketten.

(b) Konstruiere unendlich viele verschiedene unendliche Antiketten.

Mögliche Lösung:

(a) Wir gestalten die Aufgabe etwas interessanter, indem wir nicht-isomorphe Antiketten konstruieren.

Für alle $n \in \omega$ betrachte die kanonische Einbettung $i_n : {}^n 2 \hookrightarrow \text{Fn}(\omega, 2)$. Dann ist $A_n := i_n[{}^n 2]$ eine maximale Antikette mit 2^n Elementen.

(b) Wir gestalten die Aufgabe etwas interessanter, indem wir wiederum *maximale* Antiketten konstruieren.

Für alle $x \in [\omega]^\omega$ betrachte $\pi_x \in {}^\omega \omega$ so, dass für alle $n \in \omega$ gilt: $\pi_x(n) = |x \cap n|$. Beispielsweise ist $\pi_\omega = \text{id}_\omega$. Weiter definiere für alle $n \in \omega$: $P_n(x) := \pi_x^{-1}(\{n\})$. Nun sei für alle $p \in \mathbb{P}$ und für alle $n \in \omega$

$$\varphi_x(p, n) \equiv \text{dom}(p) = \bigcup_{k=0}^n P_k(x)$$

$$\psi_x(p, n) \equiv \forall k \in n : p[P_k(x)] \neq \{0\} \wedge p[P_n(x)] = \{0\}.$$

Dann lässt sich zeigen, dass

$$A_x := \{p \in \mathbb{P} \mid \exists n \in \omega : \varphi_x(p, n) \wedge \psi_x(p, n)\}$$

für jedes $x \in [\omega]^\omega$ eine unendliche maximale Antikette ist.

8. Sei $\mathbb{P} = (P, \leq)$ eine Partialordnung und sei $\mathcal{G}$ der kanonische $\mathbb{P}$ -Name für einen $\mathbb{P}$ -generischen Filter.

(a) Zeige, dass für alle $p \in P$ gilt:

$$p \Vdash_{\mathbb{P}} p \in \mathcal{G}$$

(b) Zeige: Sind p und q inkompatibel, so gilt

$$q \Vdash_{\mathbb{P}} p \notin \mathcal{G}.$$

Beweis:

Wir verwenden jeweils FACT 14.8.

(a) Es gilt $p \Vdash_{\mathbb{P}} p \in \mathcal{G}$ genau dann, wenn die Menge

$$\{q \geq p \mid \exists \langle y, s \rangle \in \mathcal{G} : q \geq s \wedge q \Vdash_{\mathbb{P}} y = p\}$$

dicht über p ist. Nun sind alle Elemente von $\mathcal{G}$ von der Form $\langle r, r \rangle$ und $q \Vdash_{\mathbb{P}} r = p$ gilt (unabhängig von q) genau dann, wenn $r = p$. Die obige Menge vereinfacht sich also zu

$$\{q \geq p \mid \langle p, p \rangle \in \mathcal{G}\} = \{q \geq p \mid p \in P\} = \{q \geq p\},$$

was offensichtlich dicht über p ist.

(b) Wir haben

$$q \Vdash_{\mathbb{P}} p \notin \mathcal{G} \iff \forall r \geq q : r \not\Vdash_{\mathbb{P}} p \in \mathcal{G}.$$

Betrachte also für alle $r \geq q$ die Menge

$$\{s \geq r \mid \exists \langle y, t \rangle \in \mathcal{G} : s \geq t \wedge s \Vdash_{\mathbb{P}} y = p\}.$$

Formen wir analog zu oben um, so erhalten wir

$$\{s \geq r \mid s \geq p\} = \emptyset,$$

denn p und q sind inkompatibel, also insbesondere p und r . Die leere Menge ist natürlich nicht dicht über r , was den Beweis abschliesst.

9. Sei $\mathbb{P} = (\text{Fn}(\omega, 2), \subseteq)$, sei $\mathbf{V} \models \text{ZFC}$, sei $\mathcal{G}$ der kanonische $\mathbb{P}$ -Name für einen $\mathbb{P}$ -generischen Filter über $\mathbf{V}$, und sei $\mathcal{H} := \{\langle p, q \rangle : \text{“}p \text{ und } q \text{ sind inkompatibel”}\}.$

(a) Zeige, dass gilt:

$$\emptyset \Vdash_{\mathbb{P}} \tilde{H} \cap \tilde{G} = \emptyset$$

(b) Zeige, dass gilt:

$$\mathbf{V}[G] \models \text{“}\tilde{H}[G] \text{ ist offen dicht in } \text{Fn}(\omega, 2)\text{”}$$

Beweis:

(a) Sei G ein beliebiger $\mathbb{P}$ -generischer Filter über $\mathbf{V}$. Dann gilt $\tilde{G}[G] = G$ und

$$\tilde{H}[G] = \{p[G] \mid \langle p \rangle \in \tilde{H} \wedge q \in G\} = \{p \mid \exists q \in G : \text{“}p \text{ und } q \text{ inkompatibel”}\}.$$

Somit gilt $\mathbf{V}[G] \models \tilde{H}[G] \cap \tilde{G}[G] = \emptyset$, denn alle Elemente in G sind kompatibel.

Da G beliebig war, folgt $\emptyset \Vdash_{\mathbb{P}} \tilde{H} \cap \tilde{G} = \emptyset$.

(b) Für beliebiges G ist $\tilde{H}[G]$ offen in $\text{Fn}(\omega, 2)$.

Sei nun $r \in \text{Fn}(\omega, 2)$. Dann gibt es $n \in \omega$ mit $n \notin \text{dom}(r)$. Für $i \in 2$ sei $p_i := r \cup \{ \langle n, i \rangle \}$. Ohne Einschränkung gebe es $q \in G$ so, dass p_0 inkompatibel zu q . Dann haben wir $p_0 > r$ mit $\mathbf{V}[G] \models p[G] = p_0 \in \tilde{H}[G]$. Somit folgt auch Dichtheit.