Forcing

Serie 4

Reelle Zahlen in Forcing Erweiterungen

Musterlösung

10. Sei $\mathbb{U} := ([\omega]^\omega, {}^*\!\supseteq)$ die Ultrafilter-Partialordnung, sei $\mathbf{V} \models$ ZFC, und sei G ein $\mathbb{U}$-generischer Filter über $\mathbf{V}$.

Zeige, dass G in $\mathbf{V}[G]$ ein Ramsey-Ultrafilter ist.

Lösung:

Wir haben in der Vorlesung gesehen, dass G ein Ultrafilter in $\mathbf{V}[G]$ ist.
Ausserdem ist $\mathbb{U}$ σ-closed, also addiert G unter anderem keine neuen Teilmengen von $[\omega]^2$.

Das heisst für alle $\pi : [\omega]^2 \to 2$ gilt: Die Färbung π liegt bereits in $\mathbf{V}$ und

$$D_\pi := \{x \in [\omega]^\omega \mid \exists n \in \omega : \ \pi|_{[x\setminus n]^2} \text{ ist konstant.}\}$$

ist offen und nach dem Satz von Ramsey auch dicht. Da nun G jedes D_π schneidet, ist G ein Ramsey-Ultrafilter, was zu beweisen war.

11. Sei $\mathbb{P} = (P, \leq)$ die Partialordnung aus Aufgabe 2 (bezüglich dem Ultrafilter $\mathscr{U}$), sei $\mathbf{V} \models$ ZFC, und sei G ein $\mathbb{P}$-generischer Filter über $\mathbf{V}$.

(a) Zeige, dass es in $\mathbf{V}[G]$ eine Funktion $f \in {}^\omega\omega$ gibt, so dass für alle Funktionen $g \in {}^\omega\omega$ welche in $\mathbf{V}$ liegen gilt: $g <^* f$, *d.h.*

$$\exists n_0 \forall k \geq n_0 \big(g(k) < f(k)\big)$$

(b) Zeige, dass es in $\mathbf{V}[G]$ eine monoton wachsende, divergente Funktion $h \in {}^\omega\omega$ gibt, so dass für alle monoton wachsenden, divergenten Funktionen $g \in {}^\omega\omega$ welche in $\mathbf{V}$ liegen gilt: $h <^* g$.

(c) Zeige, dass es in $\mathbf{V}[G]$ eine Menge $z \in [\omega]^\omega$ gibt, so dass für alle $x \in \mathscr{U}$ welche in $\mathbf{V}$ liegen gilt: $z \subseteq^* x$.

(d) Zeige, dass es in $\mathbf{V}[G]$ eine Menge $x \in [\omega]^\omega$ gibt, so dass für alle $y \in [\omega]^\omega$ welche in $\mathbf{V}$ liegen gilt:

$$x \subseteq^* y \quad \vee \quad x \subseteq^* (\omega \setminus y)$$

Lösung:

(a) Wir zeigen: Für alle g in ${}^\omega\omega \cap \mathbf{V}$ ist

$$D_g := \{(s, T_s) \in P \mid \forall f \in [T_s] : \ \forall n \in (\omega \setminus \mathrm{dom}(s)) : \ g(n) < f(n)\}$$

offen dicht.

Offenheit ist klar. Um Dichtheit zu zeigen, sei $(r, T_r) \in P$, setze $s := r$ und

$$T_s := \{t \in T_r \mid \forall n \in (\mathrm{dom}(t) \setminus \mathrm{dom}(s)) : \ g(n) < t(n)\}.$$

Dieser Baum ist nicht leer und für alle $t \in T_s$ mit $s \preceq t$ gilt:

$$\{m \in \omega \mid t^\frown m \in T_s\} = \{m \in \omega \mid t^\frown m \in T_r \wedge g(\mathrm{dom}(t)) < m\}$$

und für $n := g(\mathrm{dom}(t)) + 1$:

$$\{m \in \omega \mid t^\frown m \in T_r \wedge g(\mathrm{dom}(t)) < m\} = \{m \in \omega \mid t^\frown m \in T_r\} \setminus n \in \mathscr{U}.$$

Sei s_G definiert wie in Aufgabe (2). Da nun G jedes D_g schneidet, gilt:

$$\forall g \in {}^\omega\omega \cap \mathbf{V} : \ g <^* s_G =: f,$$

was zu zeigen war.

(b) Für alle g in ${}^\omega\omega$, die monoton und divergent sind, definiere

$$i_g : \ \omega \to \omega, n \mapsto \min\{m \in \omega \mid g(m) \geq n\}.$$

Seien f und g in ${}^\omega\omega$ monoton und divergent mit $g <^* f$. Das heisst es gibt n in ω so, dass gilt:

$$\begin{array}{lll} & \forall k > n : & g(k) < f(k) \\ \Rightarrow & \forall k \geq f(n) : & \{m \in \omega \mid g(m) \geq k\} \subseteq \{m \in \omega \mid f(m) \geq k\} \\ \Rightarrow & \forall k \geq f(n) : & \min\{m \in \omega \mid g(m) \geq k\} \geq \min\{m \in \omega \mid f(m) \geq k\} \end{array}$$

Also gilt $i_g \geq^* i_f$ und somit $i_g >^* \max\{i_f - 1, 0\}$.
Setze entsprechend für alle n in ω: $f(n) := \max\{s_G(k)\}_{k=0}^n$ (damit f monoton ist) und $h := \max\{i_f - 1, 0\}$.

(c) Für alle x in $\mathscr{U} \cap \mathbf{V}$ ist

$$D_x := \{(s, T_s) \in P \mid \forall f \in [T_s] : \ \mathrm{rng}(f) \setminus \mathrm{rng}(s) \subseteq x\}$$

offen dicht.
Offenheit ist klar. Um Dichtheit zu zeigen, sei $(r, T_r) \in P$, setze $s := r$ und

$$T_s := \{t \in T_r \mid \forall n \in (\mathrm{dom}(t) \setminus \mathrm{dom}(s)) : \ t(n) \in x\}.$$

Das heisst, um (s, T_s) aus (r, T_r) zu erhalten, schneiden wir jedes splitting level $\{m \in \omega \mid t^\frown m \in T_r\}$ von T_r mit x (und erhalten wiederum ein splitting level in $\mathscr{U}$).
Somit gilt für alle x in $\mathscr{U} \cap \mathbf{V}$: $s_G[\omega] \subseteq^* x$.

(d) Für alle y in $[\omega]^\omega \cap \mathbf{V}$ gilt entweder $y \in \mathscr{U}$ oder $\omega \setminus y \in \mathscr{U}$. Aus Aufgabe (11c) folgt dann: $s_G[\omega]$ reaps y.