

18. Zeige, dass $M = (\{\omega_1\}, \in)$ ein Mengenmodell für das Axiom der leeren Menge ist.

Beweis:

$$\forall x \in M : x \neq \omega_1, \quad \text{also gilt} \quad M \models \exists x : \forall y : y \neq x.$$

19. Konstruiere ein endliches Mengenmodell, das nicht extensional ist.

Mögliche Lösung:

$$M = (\{x, y\}, \in) \quad \text{mit} \quad x \neq y, \quad x \notin y \quad \text{und} \quad y \notin x.$$

Dann gilt $\forall x \in M : z \in x \leftrightarrow z \in y$, aber $x \neq y$.

20. Konstruiere ein unendliches Mengenmodell, welches extensional ist, aber das Paar-menaxiom nicht erfüllt.

Mögliche Lösung:

$$M = (\omega, \in).$$

Seien $m, n \in \omega$ mit $m \neq n$. Ohne Einschränkung gilt $m \in n$, aber $m \notin m$, also ist M extensional. Andererseits gilt $1, 2 \in \omega$, aber $\{1, 2\}$ ist nicht transitiv, also gilt insbesondere $\{1, 2\} \notin \omega$.

21. Konstruiere ein abzählbares Mengenmodell, welches die Menge ω enthält und das Potenzmengenaxiom erfüllt.

Mögliche Lösung:

Sei $x_0 := \omega, x_1 := \{\omega\}$ und für alle $n \geq 1 : x_{n+1} := \mathcal{P}(x_n)$.

Weiter sei $M := \bigcup_{n \in \omega} \{x_n\}$ und $M := (M, \in)$. Dann gilt $\emptyset^M = \omega$ und somit für alle $n \in \omega$:

$$\mathcal{P}^M(x_n) = x_{n+1}.$$

22. Sei $M = \{\omega + n + 1 : n \in \omega\}$ und $\mathbf{M} = (M, \in)$ das zugehörige Mengenmodell. Welche der folgenden Axiome sind in $\mathbf{M}$ gültig?

- Axiom der leeren Menge
- Extensionalitätsaxiom
- Vereinigungsaxiom
- Unendlichkeitsaxiom

Mögliche Lösung:

Das angegebene Modell ist isomorph zu unserem Modell in der Lösung von Aufgabe 20. Betrachte den Isomorphismus

$$f : M_{20} \rightarrow M_{22}, \quad n \mapsto \omega + n + 1.$$

Damit lässt sich leicht zeigen:

- Das Modell $\mathbf{M}_{22}$ besitzt die leere Menge $f(\emptyset) = \omega + 1$.
- Da $\mathbf{M}_{20}$ extensional ist, gilt dies auch für $\mathbf{M}_{22}$.
- Für $n \geq 1$ gilt wie in $\mathbf{V}$: $\bigcup(\omega + n + 1) = \omega + n$.
Da $\omega + 1$ aus Sicht von $\mathbf{M}_{22}$ leer ist, ist seine Vereinigung wieder $\omega + 1$.
- Da $\mathbf{M}_{20}$ keine unendliche Menge enthält, gilt auch in $\mathbf{M}_{22}$ das Unendlichkeitsaxiom nicht.