Forcing Serie 8

zur Gleichung $\kappa^\omega = \kappa$ Musterlösung

23. Zeige, dass gilt: $\omega_1^\omega = \mathfrak{c}$

Beweis:

$$\mathfrak{c} = 2^\omega \leq \omega_1^\omega \leq \mathfrak{c}^\omega = (2^\omega)^\omega = 2^{(\omega\cdot\omega)} = 2^\omega = \mathfrak{c}$$

24. (a) Zeige, dass für jede unendliche Kardinalzahl μ eine Kardinalzahl $\kappa > \mu$ existiert mit $\kappa^\omega = \kappa$.

(b) Zeige, dass für jede unendliche Kardinalzahl λ eine Kardinalzahl $\kappa > \lambda$ existiert mit $\kappa^\lambda = \kappa$.

(c) Zeige, dass für jede unendliche Kardinalzahl μ eine Kardinalzahl $\kappa > \mu$ existiert mit $\kappa^\omega > \kappa$.

Beweis:

(a) Beispielsweise $\kappa := 2^\mu$ hat diese Eigenschaften, denn $(2^\mu)^\omega = 2^{(\mu\cdot\omega)} = 2^\mu$.

(b) Die Kardinalzahl $\kappa := 2^\lambda$ ist die kleinste mit diesen Eigenschaften.

(c) Sei $\alpha \in \Omega$ so, dass $\mu = \omega_\alpha$. Dann hat $\kappa := \omega_{\alpha+\omega}$ die gewünschten Eigenschaften, denn $\mathrm{cf}(\kappa) = \omega$ und allgemein gilt $\kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)} > \kappa$.

25. Zeige, dass für alle $n \in \omega$ gilt: $\omega_n^\omega = \mathfrak{c} \cdot \omega_n$

Beweis:

Allgemein gilt:

$$\omega_n^\omega = \omega_n^\omega \cdot \omega_n \geq 2^\omega \cdot \omega_n = \mathfrak{c} \cdot \omega_n$$

Für die umgekehrte Ungleichung unterscheiden wir zwei Fälle:

Entweder $\mathfrak{c} \geq \omega_n$:
Dann gilt $\omega_n^\omega \leq \mathfrak{c}^\omega = \mathfrak{c} = \mathfrak{c} \cdot \omega_n$.

Oder $\mathfrak{c} < \omega_n$:
Dann gibt es $m < n$ so, dass $\mathfrak{c} = \omega_m$, und für alle $l \leq m$: $\omega_l^\omega = \mathfrak{c} \cdot \omega_l \leq \omega_m$. Wenden wir nun Aufgabe 27 an, so erhalten wir $\omega_{m+1}^\omega = \omega_{m+1} = \mathfrak{c} \cdot \omega_{m+1}$. Sei $k := n - m$. Nach k-maliger Anwendung erhalten wir also $\omega_n^\omega = \omega_n = \mathfrak{c} \cdot \omega_n$.

26. Zeige: Ist λ eine unendliche Kardinalzahl und $\kappa = \lambda^+$, dann gilt

$$\sum_{\mu\in\kappa} \kappa^\mu = 2^\lambda\,.$$

Beweis:

$$\sum_{\mu\in\lambda^+}(\lambda^+)^\mu \geq (\lambda^+)^\lambda \geq 2^\lambda = 2^{\lambda\cdot\lambda} = (2^\lambda)^\lambda \geq (\lambda^+)^\lambda = \lambda^+ \cdot (\lambda^+)^\lambda \geq \sum_{\mu\in\lambda^+}(\lambda^+)^\mu$$

27. Zeige: Ist κ eine Kardinalzahl mit $\mathrm{cf}(\kappa) > \omega$ und gilt $\forall\lambda < \kappa(\lambda^\omega \leq \kappa)$, so gilt:

$$\kappa^\omega = \kappa$$

Beweis:

Sei $f \in {}^\omega\kappa$. Da $\mathrm{cf}(\kappa) > \omega$, folgt $\bigcup_{n\in\omega} f(n) =: \lambda_f \in \kappa$. Das heisst $f \in {}^\omega(\lambda_f + 1)$. Somit gilt ${}^\omega\kappa = \bigcup_{\lambda\in\kappa} {}^\omega\lambda$, also

$$\kappa^\omega = |{}^\omega\kappa| = \left|\bigcup_{\lambda\in\kappa} {}^\omega\lambda\right| = \sum_{\lambda\in\kappa} |{}^\omega\lambda| = \sum_{\lambda\in\kappa} \lambda^\omega \leq \sum_{\lambda\in\kappa} \kappa = \kappa\cdot\kappa = \kappa.$$