

28. Sei $\mathcal{F}$ der Fréchet-Filter.

Bestimme $\mathcal{F}^+ \setminus \mathcal{F}$.

Lösung:

Für alle $x \subseteq \omega$ schreibe x^c für $(\omega \setminus x)$.

Es gilt $\mathcal{F}^+ \setminus \mathcal{F} = \{x \in [\omega]^\omega \mid x^c \in [\omega]^\omega\}$.

29. Sei $\mathcal{F} \subseteq [\omega]^\omega$ ein freier Filter.

Zeige: Enthält $\mathcal{F}^+$ die Menge $x \cup y$ (für $x, y \subseteq \omega$), dann enthält $\mathcal{F}^+$ mindestens eine der beiden Mengen x, y .

Beweis:

$$x \cup y \in \mathcal{F}^+ \Rightarrow x^c \cap y^c \notin \mathcal{F} \Rightarrow x^c \notin \mathcal{F} \vee y^c \notin \mathcal{F} \Rightarrow x \in \mathcal{F}^+ \vee y \in \mathcal{F}^+$$

30. Sei $\mathcal{A} \subseteq [\omega]^\omega$ eine unendliche maximale fast disjunkte Familie und sei

$$\mathcal{F}_{\mathcal{A}} := \{y \in [\omega]^\omega : \exists x_0 \cdots x_n \in \mathcal{A} (\omega \setminus (x_0 \cup \dots \cup x_n) \subseteq^* y)\}.$$

- (a) Zeige, dass $\mathcal{F}_{\mathcal{A}}$ ein freier Filter ist.
- (b) Konstruiere ein Element aus $\mathcal{F}_{\mathcal{A}}^+ \setminus \mathcal{F}_{\mathcal{A}}$.

Beweis:

(a) Für alle $x, y \in \mathcal{F}$ gilt:

$$\exists x_0, \dots, x_m, y_0, \dots, y_n \in \mathcal{A} (\omega \setminus (x_0 \cup \dots \cup x_m) \subseteq^* x \wedge \omega \setminus (y_0 \cup \dots \cup y_n) \subseteq^* y).$$

Also gilt $\omega \setminus (x_0 \cup \dots \cup x_m \cup y_0 \cup \dots \cup y_n) \subseteq^* x \cap y$ und somit $x \cap y \in \mathcal{F}_{\mathcal{A}}$.

Für alle $x, y \in [\omega]^\omega$ gilt: Wenn $x \in \mathcal{F}$, dann gilt (mit derselben Notation wie soeben), dass $\omega \setminus (x_0 \cup \dots \cup x_m) \subseteq^* x \cup y$, also $x \cup y \in \mathcal{F}_{\mathcal{A}}$.

Sei y co-endlich. Dann gibt es $n \in \omega$ so, dass $\omega \setminus n \subseteq y$. Also gilt $\omega \subseteq^* y$ und somit $y \in \mathcal{F}_{\mathcal{A}}$.

(b) Sei $\{x_n\}_{n \in \omega} \in [\mathcal{A}]^\omega$. Für alle $n \in \omega$ seien $y_n, z_n \in [x_n]^\omega$ mit $x_n = y_n \dot{\cup} z_n$. Sei $Y = \bigcup_{n \in \omega} y_n$.

Dann gilt $Y \notin \mathcal{F}_{\mathcal{A}}$, da sich $\bigcup_{n \in \omega} z_n$ nicht mit endlich vielen Elementen aus $\mathcal{A}$ überdecken lässt.

Da sich genauso Y selbst nicht mit endlich vielen Elementen aus $\mathcal{A}$ überdecken lässt, gilt $Y^c \notin \mathcal{F}_{\mathcal{A}}$ und somit $Y \in \mathcal{F}_{\mathcal{A}}^+$, also insgesamt $Y \in \mathcal{F}_{\mathcal{A}}^+ \setminus \mathcal{F}_{\mathcal{A}}$.

31. Sei $\mathcal{F} \subseteq [\omega]^\omega$ die Familie aller Mengen mit Dichte 1.

- (a) Zeige, dass $\mathcal{F}$ ein freier Filter ist.
- (b) Bestimme $\mathcal{F}^+$.

Beweis:

- (a) Für alle $x, y \in \mathcal{F}$ gilt:

$$\begin{aligned} d(x^c) = 0 = d(y^c) &\Rightarrow d(x^c \cup y^c) \leq d(x^c) + d(y^c) = 0 \\ &\Rightarrow d(x \cap y) = 1 \Rightarrow x \cap y \in \mathcal{F} \end{aligned}$$

Für alle $x, y \in [\omega]^\omega$ gilt: Wenn $x \in \mathcal{F}$, dann $d(x \cup y) \geq d(x) = 1$, also $x \cup y \in \mathcal{F}$.

Sei y co-endlich. Dann gibt es $n \in \omega$ so, dass $\omega \setminus n \subseteq y$. Also gilt $\check{d}(y) \geq \check{d}(\omega \setminus n) = 1$, und somit $y \in \mathcal{F}$.

- (b) Es gilt $\mathcal{F}^+ = \{x \in [\omega]^\omega \mid d(x) \neq 0\}$, wobei “ $d(x) \neq 0$ ” bedeutet, dass x keine Dichte besitzt oder dass $d(x) > 0$ gilt.

32. Sei $x_0 \in [\omega]^\omega$ eine Menge mit Dichte $\frac{1}{2}$ und sei

$$\mathcal{F}_0 := \{y \in [\omega]^\omega : d(x_0 \setminus y) = 0\}.$$

- (a) Zeige, dass $\mathcal{F}_0$ ein freier Filter ist.
- (b) Bestimme $\mathcal{F}_0^+$.

Beweis:

- (a) Für alle $x, y \in \mathcal{F}_0$ gilt: $d(x_0 \setminus (x \cap y)) \leq d(x_0 \setminus x) + d(x_0 \setminus y) = 0$.

Für alle $x, y \in [\omega]^\omega$ gilt: Wenn $x \in \mathcal{F}_0$, dann $d(x_0 \setminus (x \cup y)) \leq d(x_0 \setminus x) = 0$.

Sei y co-endlich. Dann gibt es $n \in \omega$ so, dass $\omega \setminus n \subseteq y$. Also gilt $d(x_0 \setminus y) \leq d(n) = 0$.

- (b) Es gilt $\mathcal{F}_0^+ = \{y \in [\omega]^\omega \mid d(x_0 \setminus y^c) \neq 0\} = \{y \in [\omega]^\omega \mid d(x_0 \cap y) \neq 0\}$.