Die Gödel'schen Sätze

Serie 4

Modelle & formale Beweise — Besprechung am 17. Oktober

18. Beweise formal die folgende Tautologie:

$$\vdash \exists x\varphi \to \neg\forall x\neg\varphi$$

Hinweise: Mit L_{10} haben wir $\forall x\neg\varphi \to \neg\varphi$. Ferner wurde in Aufgabe 6.(c) gezeigt:

$$\vdash (\varphi \to \neg\psi) \to (\psi \to \neg\varphi)$$

19. Die $\mathscr{L}$-Formeln φ_{11} und φ_{13} seien Instantiierungen der logischen Axiome L_{11} *bzw.* L_{13}. Weiter sei $\mathbf{M}$ ein Modell einer $\mathscr{L}$-Theorie.

Zeige, dass gilt:

$$\mathbf{M} \models \varphi_{11} \quad \text{und} \quad \mathbf{M} \models \varphi_{13}$$

20. Es sei T eine Menge von $\mathscr{L}$-Sätzen. Für jede konsistente Menge $\Phi \subseteq \mathsf{T}$ von $\mathscr{L}$-Sätzen sei $\mathbf{M}_\Phi$ ein Modell mit $\mathbf{M}_\Phi \models \Phi$ (später wird gezeigt, dass es solche Modelle gibt). Weiter sei

$$\Sigma := \big\{ \mathbf{M}_\Phi : \Phi \subseteq \mathsf{T} \ \textit{und} \ \mathrm{Con}(\Phi) \big\},$$

und für jeden $\mathscr{L}$-Satz φ sei $X_\varphi := \{\mathbf{M} \in \Sigma : \mathbf{M} \models \varphi\}$.

(a) Zeige, dass die Menge $\{X_\varphi : \varphi \text{ ein } \mathscr{L}\text{-Satz}\}$ die Basis einer Topologie auf Σ bildet, *d.h.* ein System von offenen Mengen.

(b) Zeige, dass jede Menge X_φ abgeschlossen ist.

(c) Zeige mit dem topologischen Kompaktheitssatz, dass jede offene Überdeckung von Σ eine endliche Teilüberdeckung enthält, *d.h.* Σ ist kompakt.

21. Sei $\mathscr{L} = \{\mathsf{e}, \circ\}$ die Sprache der Gruppentheorie. Die $\mathscr{L}$-Theorie T bestehe aus folgenden drei $\mathscr{L}$-Sätzen:

- $\forall x\forall y\forall z\big(x\circ(y\circ z) = (x\circ y)\circ z\big)$
- $\forall x\big(\mathsf{e}\circ x = x\big)$
- $\forall x\exists y\big(x\circ y = \mathsf{e}\big)$

Zeige: $\quad \mathsf{T} \nvdash \forall x\big(x\circ\mathsf{e} = x\big) \ \vee \ \forall x\exists y\big(y\circ x = \mathsf{e}\big)$