Die Gödel'schen Sätze — Serie 7

Vollständigkeit, Ultrafilter und Ideale — Besprechung am 17. November

28. Zeige mit Aufgabe 23.(b), dass die Theorie der dichten linearen Ordnungen vollständig ist; *d.h.* für alle $\mathscr{L}_{\mathsf{DLO}}$-Sätze σ gilt:

$$\textit{entweder} \quad \mathsf{DLO} \vdash \sigma \quad \textit{oder} \quad \mathsf{DLO} \vdash \neg\sigma$$

29. Sei S eine unendliche Menge und sei $\mathscr{U} \subseteq \mathscr{P}(S)$ ein Ultrafilter welcher alle co-endlichen Teilmengen von S enthält.

Zeige, dass $\mathscr{U}$ keine endlichen Mengen enthält.

30. Sei S eine Menge und sei $\mathscr{U} \subseteq \mathscr{P}(S)$ ein Ultrafilter.

(a) Zeige: Enthält $\mathscr{U}$ eine endliche Menge, so ist $\mathscr{U}$ ein Hauptultrafilter.

(b) Zeige, dass für alle Mengen $x, y \in \mathscr{P}(S)$ mit $y \subseteq x \in \mathscr{U}$ gilt:

$$\textit{entweder} \quad y \in \mathscr{U} \quad \textit{oder} \quad (x \setminus y) \in \mathscr{U}$$

31. Sei S eine nicht-leere Menge. Auf $\mathscr{P}(S)$ definieren wir zwei binäre Operationen wie folgt:

$$x \cdot y := x \cap y \qquad \text{und} \qquad x + y := (x \setminus y) \cup (y \setminus x)$$

(a) Zeige, dass $\big(\mathscr{P}(S), +, \cdot\big)$ ein kommutativer Ring ist.

(b) Welche Menge ist die 0, und welche Menge ist die 1 im Ring $\big(\mathscr{P}(S), +, \cdot\big)$?

(c) Wie lassen sich Ideale im Ring $\big(\mathscr{P}(S), +, \cdot\big)$ charakterisieren?

(d) Ein Ideal I in einem Ring R heisst *Primideal*, falls für alle $r, s \in R$ mit $r \cdot s \in I$ gilt $r \in I$ oder $s \in I$.
Wie sehen Primideale aus im Ring $\big(\mathscr{P}(S), +, \cdot\big)$?

(e) Sei $I \subseteq \mathscr{P}(S)$ ein Primideal im Ring $\big(\mathscr{P}(S), +, \cdot\big)$ mit $S \notin I$.
Zeige, dass $\mathscr{U} = \{x \subseteq S : (S \setminus x) \in I\}$ ein Ultrafilter über S ist.