Die Gödel'schen Sätze

Serie 9

Nichtstandard-Modelle der Peano Arithmetik — Besprechung am 21. November

Im Folgenden bezeichnet $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ die Menge der natürlichen Zahlen und $\mathbb{N}$ das standard-Modell der Peano Arithmetik mit Bereich $\mathbb{N}$; das heisst $\mathbb{N} = \{\mathbb{N}, 0^{\mathbb{N}}, +^{\mathbb{N}}, \cdot^{\mathbb{N}}\}$.

36. Sei $\mathscr{U} \subseteq \mathscr{P}(\mathbb{N})$ ein Ultrafilter über $\mathbb{N}$ welcher den Fréchet-Filter enthält. Weiter sei $\mathbb{N}^\star$ das Ultraprodukt (*bzw.* die Ultrapotenz) bezüglich $\mathscr{U}$ der $\mathscr{L}_{\mathsf{PA}}$-Struktur $\mathbb{N}$.

(a) Zeige, dass $\mathbb{N}^\star$ ein überabzählbares Modell von PA ist.

(b) Zeige, dass die Modelle $\mathbb{N}^\star$ und $\mathbb{N}$ elementar äquivalent sind.

37. Sei $\mathscr{L}_{\mathsf{PA}^*} := \mathscr{L}_{\mathsf{PA}} \cup \{\mathtt{c}\}$ und für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei φ_n der $\mathscr{L}_{\mathsf{PA}^*}$-Satz

$$\underbrace{\mathtt{s} \ldots \mathtt{s}}_{n\text{-mal}} 0 < \mathtt{c}\,.$$

Weiter sei $\mathsf{PA}^* := \mathsf{PA} \cup \{\varphi_n : n \in \mathbb{N}\}$.

(a) Zeige, dass die $\mathscr{L}_{\mathsf{PA}^*}$-Theorie PA^* konsistent ist.

(b) Da die Signatur $\mathscr{L}_{\mathsf{PA}^*}$ abzählbar ist, hat PA^* ein abzählbares Modell $\mathbb{N}^*$.
Beschreibe die Ordnungsstruktur dieses Modells $\mathbb{N}^*$.

38. Seien $\mathscr{L}_{\mathsf{PA}^*}$ und PA^* wie in Aufgabe 37. Zu PA^* fügen wir nun alle $\mathscr{L}_{\mathsf{PA}}$-Sätze σ hinzu, für die gilt: $\mathbb{N} \models \sigma$. Die so erhaltene Theorie sei PA^{**}

(a) Zeige, dass die $\mathscr{L}_{\mathsf{PA}^*}$-Theorie PA^{**} konsistent ist.

(b) Sei $\mathbb{N}^{**}$ ein abzählbares Modell von PA^{**}.
Sind die Modelle $\mathbb{N}^{**}$ und $\mathbb{N}$ als Modelle von PA isomorph oder zumindest elementar äquivalent?

39. Zeige, dass es überabzählbar viele paarweise nicht-isomorphe abzählbare Modelle von PA gibt, welche alle elementar äquivalent zu $\mathbb{N}$ sind.