Gödels β-Funktion

Codieren von Sequenzen

Bevor wir mit dem Codieren von Sequenzen beginnen, formulieren wir den folgenden Satz aus der Peano-Arithmetik.

Chinesischer Restsatz: Sind $\langle a_0, \ldots, a_n\rangle$ und $\langle m_0, \ldots, m_n\rangle$ zwei Sequenzen natürlicher Zahlen mit $\max\{a_0, \ldots, a_n\} < \min\{m_0, \ldots, m_n\}$, und sind die m_i's paarweise teilerfremd, so existiert eine natürliche Zahl k für die gilt:

$$\begin{array}{rcll} k & \equiv & a_0 & \mod m_0 \\ k & \equiv & a_1 & \mod m_1 \\ & & \vdots & \\ k & \equiv & a_n & \mod m_n \end{array}$$

Der Chinesische Restsatz kann in PA bewiesen werden. Der Beweis, mit Induktion nach n, beruht im Wesentlichen auf dem *Euklid'schen Algorithmus*.

Das Ziel ist nun, mit Hilfe des chinesischen Restsatzes beliebige endliche Sequenzen $\langle a_0, \ldots, a_n\rangle$ natürlicher Zahlen zu codieren. Dazu definieren wir in PA eine binäre Funktion β, so dass für den Code der Sequenz c gilt: $\beta(c, i) = a_i$ (für alle i mit $0 \leq i \leq n$). Bevor wir die Funktion β definieren können, definieren wir in PA die binäre Funktion *paar*:

$$paar(k, m) = \begin{cases} \big(\max\{k, m\}\big)^2 + m & \text{für } k \geq m, \\ \big(\max\{k, m\}\big)^2 + m + k + 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

In PA kann bewiesen werden, dass die binäre Funktion *paar* bijektiv ist, *d.h.*

$$\mathsf{PA} \vdash \forall k \forall k' \forall m \forall m' \big(paar(k, m) = paar(k', m') \to (k = k') \wedge (m = m')\big)$$

und

$$\mathsf{PA} \vdash \forall c\, \exists k\, \exists m \big(paar(k, m) = c\big)$$

Aufgaben: Berechne $paar(4, 7)$ und $paar(8, 6)$, und bestimme natürliche Zahlen k und m, so dass gilt $paar(k, m) = 58$.

In den nächsten beiden Schritten konstruieren wir beliebig lange Sequenzen $\langle m_0, \ldots, m_n\rangle$ natürlicher Zahlen mit der Eigenschaft, dass $\min\{m_0, \ldots, m_n\}$ beliebig gross ist und die m_i's paarweise teilerfremd sind.

HILFSSATZ: $\forall n \forall a \exists m > a \, \forall i \leq n \big((i+1) \mid m \big)$

Beweis. Induktion nach n:

Ist $n = 0$, so wählen wir $m = a + 1$.

Annahme: Es existiert ein $m > a$, so dass für alle $i \leq n$ gilt $(i+1) \mid m$.

Wählen wir nun $m' = (n+2) \cdot m$, so gilt $m' > a$ und für alle $i \leq n+1$ haben wir $(i+1) \mid m'$. ⊣

SATZ: $\forall n \forall a \exists m > a \, \forall i \leq n \forall j < i \big(ggT((j+1) \cdot m + 1, (i+1) \cdot m + 1) = 1 \big)$

Beweis. Sei m wie im HILFSSATZ, das heisst $\forall i \leq n \big((i+1) \mid m \big)$.

Wir führen die Annahme $ggT((j+1) \cdot m + 1, (i+1) \cdot m + 1) > 1$ für i und j mit $0 \leq j < i \leq n$ zu einem Widerspruch:

Ist $ggT((j+1) \cdot m + 1, (i+1) \cdot m + 1) > 1$, so existiert eine Primzahl p mit

$$p \mid (j+1) \cdot m + 1 \ \wedge \ p \mid (i+1) \cdot m + 1 \, .$$

Daraus folgt $p \mid (i-j) \cdot m$, und weil p prim ist, folgt

$$p \mid (i-j) \ \vee \ p \mid m \, .$$

Nun ist $p \mid m$ ausgeschlossen, weil sonst $p \nmid (i+1) \cdot m + 1$ folgen würde, im Widerspruch zur Wahl von p. Weil nun $(i-j) \leq n$, folgt aus der Konstruktion von m, dass $(i-j) \mid m$, und aus $p \mid (i-j)$ folgt $p \mid m$, was aber nicht sein kann. ⊣

Die binäre **Gödel'sche β-Funktion** ist nun wie folgt definiert:

$$\beta(c,i) = a_i \iff \exists k \, \exists m \big(c = paar(k,m) \ \wedge \ k \equiv a_i \mod (i+1) \cdot m + 1 \big)$$

Weil sowohl der CHINESISCHE RESTSATZ wie auch die beiden vorigen Resultate in PA beweisbar sind, lässt sich in PA zeigen, dass es für jede endliche Sequenz $\langle a_0, \ldots, a_n \rangle$ natürlicher Zahlen ein c gibt, so dass für alle $i \leq n$ gilt:

$$\beta(c,i) = a_i$$

Beispiel: Um die Sequenz $\langle 5, 0, 1 \rangle$ zu codieren, gehen wir wie folgt vor: Mit dem HILFSSATZ, für $n = 2$ und $a = \max\{5, 0, 1\}$ (also $a = 5$), erhalten wir $m = 3 \cdot 2 \cdot (a+1) = 36$, und mit dem SATZ erhalten wir die drei teilerfremden Zahlen $m_0 = m+1 = 37$, $m_1 = 2 \cdot m + 1 = 73$, und $m_2 = 3 \cdot m + 1 = 109$. Aus dem chinesischen Restsatz folgt nun, dass es ein k gibt mit $k \equiv 5 \mod 37$, $k \equiv 0 \mod 73$, und $k \equiv 1 \mod 109$. Das kleinste solche k ist $k = 32047$. Setzen wir nun $c = paar(32047, 36)$, also $c = 1027010245$, so gilt $\beta(c,0) = 5$, $\beta(c,1) = 0$, und $\beta(c,2) = 1$.

Aufgaben: (a) Berechne c, so dass gilt $\beta(c,0) = 1$ und $\beta(c,1) = 2$.
(b) Sei $c = 35951247220973835808$. Bestimme $\beta(c,i)$ für $0 \leq i \leq 3$.
Hinweis: $c = paar(5995935892, 144)$

Potenzen: Es lässt sich zeigen, dass sich die Axiome PA_5 & PA_6 nicht aus den restlichen Axiomen der Peano-Arithmetik beweisen lassen. Mit anderen Worten, die Multiplikation lässt sich in PA nicht mit Hilfe der Addition und dem Induktionsaxiom definieren. Hingegen lässt sich die Potenzfunktion a^n leicht mit Hilfe der Gödel'schen β-Funktion in PA definieren:

$$a^n = l \iff \exists c \Big(\beta(c,n) = l \wedge \beta(c,0) = 1 \wedge \forall i < n \big(\beta(c,i+1) = a \cdot \beta(c,i) \big) \Big)$$

In Worten ausgedrückt: Es gilt $a^n = l$ genau dann, wenn eine Zahl c existiert welche die Sequenz $\langle 1, a, a^2, \ldots, a^n \rangle$ codiert und die letzte Zahl a^n dieser Sequenz gleich l ist.

Aufgaben: (a) Definiere mit Hilfe der β-Funktion die Funktion $n!$.
(b) Definiere mit Hilfe der β-Funktion die unitäre Relation $R(n)$ für die gilt:

$$R(n) \iff \exists k \exists l \, (n = 2^k \cdot 3^l)$$

Gödelisierung der Peano-Arithmetik I

Codieren von Term- & Formelaufbau

In einem ersten Schritt codieren wir Terme und Formeln als natürliche Zahlen, und in einem zweiten Schritt codieren wir mit Hilfe der Gödel'schen β-Funktion den Aufbau von Termen und Formeln. Das Ziel ist, in PA zwei einstellige Relationen *term* und *formel* zu definieren, so dass gilt:

$$\mathbb{N} \vDash \mathit{term}(n) \iff n \text{ ist der Code eines Terms},$$

$$\mathbb{N} \vDash \mathit{formel}(n) \iff n \text{ ist der Code einer Formel}.$$

Gödelzahlen des Alphabets: Jedem logischen Symbol, sowie jedem nichtlogischen Zeichen der Sprache $\mathscr{L}_{\mathsf{PA}}$ ordnen wir eine natürliche Zahl zu, die sogenannte *Gödelzahl des Zeichens*. Ist $*$ irgend ein logisches oder nichtlogisches Symbol, so ist $\ulcorner * \urcorner$ die Gödelzahl dieses Symbols.

Symbol $*$	Gödelzahl $\ulcorner * \urcorner$
$\mathtt{0}$	2
$\mathtt{s}$	4
$+$	6
$\cdot$	8
$=$	10
$\neg$	12
$\wedge$	14
$\exists$	16
$\vee$	18
$\forall$	20
$\rightarrow$	22
x_n	$2n+1$

Gödelzahlen von Termen:

Term τ	Gödelzahl $\ulcorner \tau \urcorner$
$\mathtt{0}$	2
x_n	$2n+1$
$\mathtt{s}\tau$	$2^{\ulcorner \mathtt{s} \urcorner} \cdot 3^{\ulcorner \tau \urcorner}$
$\tau_1 + \tau_2$	$2^{\ulcorner + \urcorner} \cdot 3^{\ulcorner \tau_1 \urcorner} \cdot 5^{\ulcorner \tau_2 \urcorner}$
$\tau_1 \cdot \tau_2$	$2^{\ulcorner \cdot \urcorner} \cdot 3^{\ulcorner \tau_1 \urcorner} \cdot 5^{\ulcorner \tau_2 \urcorner}$

Beispiele: $\ulcorner \mathtt{s0} \urcorner = 2^4 \cdot 3^2 = 144$, $\ulcorner \mathtt{0} + \mathtt{s0} \urcorner = 2^6 \cdot 3^2 \cdot 5^{144}$

Gödelzahlen von Formeln:

Formel φ	Gödelzahl $\ulcorner\varphi\urcorner$
$\tau_1 = \tau_2$	$2^{\ulcorner=\urcorner} \cdot 3^{\ulcorner\tau_1\urcorner} \cdot 5^{\ulcorner\tau_2\urcorner}$
$\neg\psi$	$2^{\ulcorner\neg\urcorner} \cdot 3^{\ulcorner\psi\urcorner}$
$\psi_1 \wedge \psi_2$	$2^{\ulcorner\wedge\urcorner} \cdot 3^{\ulcorner\psi_1\urcorner} \cdot 5^{\ulcorner\psi_2\urcorner}$
$\exists x\psi$	$2^{\ulcorner\exists\urcorner} \cdot 3^{\ulcorner x\urcorner} \cdot 5^{\ulcorner\psi\urcorner}$
$\psi_1 \vee \psi_2$	$2^{\ulcorner\vee\urcorner} \cdot 3^{\ulcorner\psi_1\urcorner} \cdot 5^{\ulcorner\psi_2\urcorner}$
$\forall x\psi$	$2^{\ulcorner\forall\urcorner} \cdot 3^{\ulcorner x\urcorner} \cdot 5^{\ulcorner\psi\urcorner}$
$\psi_1 \to \psi_2$	$2^{\ulcorner\to\urcorner} \cdot 3^{\ulcorner\psi_1\urcorner} \cdot 5^{\ulcorner\psi_2\urcorner}$

Beispiel: $x_0 \leq x_1$ ist logisch äquivalent zu $\exists x_2(x_0 + x_2 = x_1)$; dies ist in polnischer Notation $\exists x_2{=}{+}x_0x_2x_1$ und wir erhalten:

$$\ulcorner\exists x_2(x_0 + x_2 = x_1)\urcorner = 2^{16} \cdot 3^5 \cdot 5^{(2^{10} \cdot 3^{(2^6 \cdot 3^1 \cdot 5^5)} \cdot 5^3)}$$

Aufgaben:

1. Schreibe die folgenden Gödelzahlen im Dezimalsystem (natürlich als Produkt von Potenzen von Produkten von Potenzen *et cetera* der Zahlen 2, 3, und 5).

   (a) $\ulcorner\mathtt{0} + x_0\urcorner$ (c) $\ulcorner\ulcorner\mathtt{s0}\urcorner\urcorner$ (e) $\ulcorner\forall x_3(x_3 \cdot \mathtt{0} = \mathtt{0})\urcorner$

   (b) $\ulcorner\mathtt{s0} \cdot (\mathtt{0} + \mathtt{s0})\urcorner$ (d) $\ulcorner\mathtt{0} = \mathtt{0}\urcorner$ (f) $\ulcorner\ulcorner\mathtt{0} = \mathtt{0}\urcorner\urcorner$

2. Finde den Term t mit:

   $$\ulcorner t\urcorner = 8120460576902649611516066555867141710539876003066622196218039073838096$$

   Hinweis: Diese Zahl lässt sich schreiben als $16 \cdot 3^{144}$.

3. Finde die Formel φ mit:

   $$\ulcorner\varphi\urcorner = 27698935853357207342276792287490500313545841160169536105306837139208910\backslash$$
   $$5708433577885342757769371123092750850380007348123028576593326975129760907\backslash$$
   $$9874029171818734957741692445852330993679790383401458842302069512564468\backslash$$
   $$5134435862867609358903845289192109741720042304091720097858342342078685760\backslash$$
   $$4980468750000000000$$

   Hinweis: Diese Zahl lässt sich schreiben als $1024 \cdot 3 \cdot 5^{(16 \cdot 27)}$.

Im Folgenden werden wir — in der Peano-Arithmetik — die einstelligen Relationen *term* & *formel*.

Obwohl wir bloss für die Variablen $x_0, x_1, \ldots$ Gödelzahlen definiert haben, und eigentlich bloss diese Variablen brauchen dürfen, werden wir — für die bessere Lesbarkeit — auch andere Variablen benutzen. Wir vereinbaren die folgende Zuordnung: $a \mapsto x_1$, $b \mapsto x_2$, $\ldots$ $z \mapsto x_{26}$. Weiter benutzen wir die übliche Schreibweise für das Rechnen mit Zahlen. Zum Beispiel schreiben wir $2n+1$ an Stelle von $\mathtt{s}(\mathtt{ss0} \cdot n)$.

Zuerst definieren wir die einstellige Relation *var*:

$$\mathit{var}(v) \iff \exists n(v = 2n+1)$$

Es ist leicht einzusehen, dass gilt:

$$\mathbb{N} \vDash \mathit{var}(v) \iff v \text{ ist die Gödelzahl einer Variablen}$$

Nun codieren wir mit Hilfe der Gödel'schen β-Funktion den Aufbau von Termen:

$$\begin{aligned}\mathit{codiert\_term}(c,n,t) \iff \beta(c,n) = t \wedge \forall i \leq n\Big(&\mathit{var}(\beta(c,i)) \vee \beta(c,i) = 2 \\ \vee \exists j_1 < i\, \exists j_2 < i\big(&\beta(c,i) = 2^{\ulcorner \mathtt{s} \urcorner} \cdot 3^{\beta(c,j_1)} \vee \beta(c,i) = 2^{\ulcorner + \urcorner} \cdot 3^{\beta(c,j_1)} \cdot 5^{\beta(c,j_2)} \\ &\vee \beta(c,i) = 2^{\ulcorner \cdot \urcorner} \cdot 3^{\beta(c,j_1)} \cdot 5^{\beta(c,j_2)}\big)\Big)\end{aligned}$$

Wir definieren

$$\mathit{term}(t) \iff \exists c\, \exists n\, \mathit{codiert\_term}(c,n,t)\,,$$

und wegen den Regeln, wie Terme aufgebaut sind, gilt:

$$\mathbb{N} \vDash \mathit{term}(t) \iff t \text{ ist die Gödelzahl eines Terms}$$

Analog definieren wir die Relation $\mathit{codiert\_formel}(c,n,f)$ und definieren

$$\mathit{formel}(f) \iff \exists c\, \exists n\, \mathit{codiert\_formel}(c,n,f)\,,$$

wobei wieder gilt:

$$\mathbb{N} \vDash \mathit{formel}(f) \iff f \text{ ist die Gödelzahl einer Formel}$$

Substitution

Im Folgenden wollen wir die Substitution gödelisieren. Dazu müssen wir zuerst — in der Peano-Arithmetik — entscheiden, ob eine Variable in einem Term oder einer Formel vorkommt.

$$\mathit{var\_in\_term}(v,t) \iff \mathit{var}(v) \wedge \exists c\, \exists n \Big(\mathit{codiert\_term}(c,n,t) \wedge \exists i \leq n (\beta(c,i) = v) \Big)$$

$$\begin{aligned} \mathit{var\_in\_formel}(v,f) \iff \exists c\, \exists n \Big(& \mathit{codiert\_formel}(c,n,f) \wedge \\ & \exists i \leq n\, \exists t_1\, \exists t_2 \big(\beta(c,i) = 2^{\ulcorner = \urcorner} \cdot 3^{t_1} \cdot 5^{t_2} \wedge \\ & (\mathit{var\_in\_term}(v,t_1) \vee \mathit{var\_in\_term}(v,t_2)) \big) \Big) \end{aligned}$$

Weiter müssen wir — wieder in der Peano-Arithmetik — entscheiden, ob eine Variable frei oder gebunden in einer Formel vorkommt:

$$\begin{aligned} \mathit{geb\_in\_formel}(v,f) \iff \exists c\, \exists n \Big(& \mathit{codiert\_formel}(c,n,f) \wedge \\ & \exists i \leq n\, \exists f' \big(\mathit{var\_in\_formel}(v,f') \wedge \big(\beta(c,i) = 2^{\ulcorner \exists \urcorner} \cdot 3^{v} \cdot 5^{f'} \vee \\ & \beta(c,i) = 2^{\ulcorner \forall \urcorner} \cdot 3^{v} \cdot 5^{f'} \big) \big) \Big) \end{aligned}$$

Um die Substitution etwas einfacher zu machen, erlauben wir die Substitution $\varphi(x/\tau)$ nur in Formeln φ, in denen sowohl x wie auch die Variablen in τ *nur frei* vorkommen:

$$\begin{aligned} \mathit{sub\_erlaubt}(v,t_0,f) \iff & \\ & \mathit{var\_in\_formel}(v,f) \wedge \neg \mathit{geb\_in\_formel}(v,f) \wedge \\ & \forall v' \big(\mathit{var\_in\_term}(v',t_0) \to \neg \mathit{geb\_in\_formel}(v',f) \big) \end{aligned}$$

Nun definieren wir die Substitution v/t_0 in Termen:

$$\begin{aligned} \mathit{sub\_in\_term}(v,t_0,t) = t' \iff & \mathit{var}(v) \wedge \\ \exists c\, \exists c'\, \exists c''\, \exists n\, \exists m \Big(& \mathit{codiert\_term}(c,n,t) \wedge \mathit{codiert\_term}(c'',m,t_0) \wedge \\ & \mathit{codiert\_term}(c',n+m,t') \wedge \forall i < m \big(\beta(c',i) = \beta(c'',i) \big) \wedge \\ & \forall i \leq n \Big(\beta(c,i) = v \to \beta(c',m+i) = t_0 \wedge \\ & \forall j < i \big(\beta(c,i) = 2^{\ulcorner \mathtt{s} \urcorner} \cdot 3^{\beta(c,j)} \to \beta(c',m+i) = 2^{\ulcorner \mathtt{s} \urcorner} \cdot 3^{\beta(c',m+j)} \big) \wedge \\ & \forall k\, \forall j < i\, \forall j' < i \big(\beta(c,i) = 2^{k} \cdot 3^{\beta(c,j)} \cdot 5^{\beta(c,j')} \to \\ & \beta(c',m+i) = 2^{k} \cdot 3^{\beta(c',m+j)} \cdot 5^{\beta(c',m+j')} \big) \Big) \Big) \end{aligned}$$

Analog wird die Substitution in Formeln definiert:

$$
\begin{aligned}
&\mathit{sub\_in\_formel}(v, t_0, f) = f' \iff \\
&\qquad \mathit{var}(v) \wedge \mathit{sub\_erlaubt}(v, t_0, f) \wedge \mathit{term}(t_0) \wedge \\
&\quad \exists c\, \exists c'\, \exists n \Big(\mathit{codiert\_formel}(c, n, f) \wedge \mathit{codiert\_formel}(c', n, f') \wedge \\
&\quad \forall i \leq n \Big(\forall t \big(\beta(c, i) = 2^{\ulcorner = \urcorner} \cdot 3^v \cdot 5^t \rightarrow \beta(c', i) = 2^{\ulcorner = \urcorner} \cdot 3^{t_0} \cdot 5^t \big) \wedge \\
&\qquad \ldots \wedge \forall k\, \forall j < i\, \forall j' < i \big(\beta(c, i) = 2^k \cdot 3^{\beta(c,j)} \cdot 5^{\beta(c,j')} \rightarrow \\
&\qquad\qquad \beta(c', i) = 2^k \cdot 3^{\beta(c',j)} \cdot 5^{\beta(c',j')} \big) \wedge \qquad \ldots \Big) \Big)
\end{aligned}
$$

In $\mathbb{N}$ gilt nun:

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{N} \vDash \mathit{sub\_in\_formel}(v, t_0, f) = f' \iff \\
&\qquad \text{es existiert eine Variable } x, \text{ ein Term } \tau, \text{ sowie eine Formel } \varphi, \\
&\qquad\qquad \text{so dass gilt: die Substitution } \varphi(x/\tau) \text{ ist erlaubt,} \\
&\qquad\qquad\qquad v = \ulcorner x \urcorner,\ t_0 = \ulcorner \tau \urcorner,\ f = \ulcorner \varphi \urcorner, \text{ und } f' = \ulcorner \varphi(x/\tau) \urcorner.
\end{aligned}
$$

$$\mathbb{N} \vDash \sigma \iff \mathsf{PA} \nvdash \sigma$$

Im Folgenden formulieren wir einen $\mathscr{L}_{\mathsf{PA}}$-Satz σ, der im standard Modell $\mathbb{N}$ genau dann wahr ist, wenn er in der Peano-Arithmetik nicht beweisbar ist. Dazu codieren wir zuerst formale Beweise in PA.

Ein Beweis ist eine Sequenz von Formeln, welche nach bestimmten Regeln gebildet wurde:

- ***Logisches Axiom***: Die Formel mit Gödelzahl f ist ein logisches Axiom; zwei Beispiele:

$$L_1(f) \iff \mathit{formel}(f) \wedge \exists f' \exists f'' \big(\mathit{formel}(f') \wedge \mathit{formel}(f'') \wedge f = 2^{\ulcorner\to\urcorner} \cdot 3^{f'} \cdot 5^{2^{\ulcorner\to\urcorner}\cdot 3^{f''}\cdot 5^{f'}}\big)$$

$$L_{12}(f) \iff \mathit{formel}(f) \wedge \exists f' \exists v \exists t \big(\mathit{formel}(f') \wedge \mathit{var}(v) \wedge \mathit{term}(t) \wedge \mathit{sub\_erlaubt}(v,t,f') \wedge f = 2^{\ulcorner\to\urcorner} \cdot 3^{2^{\ulcorner\forall\urcorner}\cdot 3^v \cdot 5^{f'}} \cdot 5^{\ulcorner \mathit{sub\_in\_formel}(v,t,f')\urcorner}\big)$$

  Allgemein sei:

$$\mathit{Log\_Axiom}(f) \iff L_1(f) \vee \cdots \vee L_{18}(f)$$

- ***Axiom der Peano-Arithmetik***: Die Formel mit Gödelzahl f ist ein Axiom der Peano-Arithmetik; zwei Beispiele:

$$PA_1(f) \iff f = \ulcorner \forall x \neg(\mathsf{s}x = \mathsf{0})\urcorner$$

$$PA_7(f) \iff \exists f' \exists v \big(\mathit{formel}(f') \wedge \neg \mathit{geb\_in\_formel}(v,f') \wedge f = 2^{\ulcorner\to\urcorner} \cdot 3^{2^{\ulcorner\wedge\urcorner}\cdot 3^{\mathit{sub\_in\_formel}(v,\ulcorner 0\urcorner,f')}\cdot 5^{2^{\ulcorner\forall\urcorner}\cdot 3^v \cdot 5^r}} \cdot 5^{2^{\ulcorner\forall\urcorner}\cdot 3^v \cdot 5^{f'}}\big)$$
$$\text{mit } r = 2^{\ulcorner\to\urcorner} \cdot 3^{f'} \cdot 5^{\mathit{sub\_in\_formel}(v,2^{\ulcorner \mathsf{s}\urcorner}\cdot 3^v, f')}$$

  Allgemein sei:

$$\mathit{PA\_Axiom}(f) \iff PA_1(f) \vee \cdots \vee PA_7(f)$$

- ***Modus Ponens***: Die Formel mit Gödelzahl f entsteht durch Modus Ponens aus den Formeln mit Gödelzahlen f' *bzw.* f''.

$$MP(f',f'',f) \iff \mathit{formel}(f) \wedge \mathit{formel}(f') \wedge \mathit{formel}(f'') \wedge f'' = 2^{\ulcorner\to\urcorner} \cdot 3^{f'} \cdot 5^{f}$$

- ***Verallgemeinerungsregel***: Die Formel mit Gödelzahl f entsteht durch die Verallgemeinerungsregel aus der Formel mit Gödelzahl f'.

$$VR(f,v,f') \iff \mathit{formel}(f) \wedge \mathit{var}(v) \wedge \mathit{formel}(f') \wedge f = 2^{\ulcorner\forall\urcorner} \cdot 3^{v} \cdot 5^{f'}$$

Nun sind wir in der Lage formale Beweise in PA zu codieren:

$$\begin{aligned} &\mathit{codiert\_bew}(c,n,f) \iff \beta(c,n)=f \wedge \\ &\quad \forall i \le n\Big(\mathit{Log\_Axiom}\big(\beta(c,i)\big) \vee \mathit{PA\_Axiom}(\beta(c,i)) \vee \\ &\qquad \exists j<i\,\exists j'<i\Big(\mathit{MP}\big(\beta(c,j),\beta(c,j'),\beta(c,i)\big) \vee \mathit{VR}\big(\beta(c,j),\beta(c,i)\big)\Big)\Big) \end{aligned}$$

Die Formel $\mathit{codiert\_bew}(c,n,f)$ besagt, dass c einen PA-Beweis von f der Länge n codiert. Definieren wir

$$\mathit{bew}(f) \iff \exists c\,\exists n\,\mathit{codiert\_bew}(c,n,f)\,,$$

so erhalten wir für alle $\mathscr{L}_{\mathsf{PA}}$-Sätze φ:

$$\mathbb{N} \vDash \mathit{bew}(\ulcorner\varphi\urcorner) \iff \mathsf{PA} \vdash \varphi$$

Im nächsten Schritt betrachten wir Formeln $\varphi(x_0)$, in denen x_0 die einzige freie Variable ist, und ersetzen x_0 durch die Gödelzahl $\ulcorner\varphi(x_0)\urcorner$. Dadurch wird die Formel $\varphi(x_0)$ zum $\mathscr{L}_{\mathsf{PA}}$-Satz $\varphi\big(\ulcorner\varphi(x_0)\urcorner\big)$. Dazu definieren wir zuerst die Funktion *Gödelzahl goez*, welche die Gödelzahl (als Term) einer natürlichen Zahl berechnet:

$$\begin{aligned} &\mathit{goez}(n)=k \iff \\ &\qquad \exists c\,\big(\beta(c,0)=2 \wedge \forall i<n\big(\beta(c,i+1)=2^{\ulcorner \mathtt{s} \urcorner}\cdot 3^{\beta(c,i)}\big) \wedge k=\beta(c,n)\big) \end{aligned}$$

Nun definieren wir eine Formel $\chi(x_0)$, in der x_0 die einzige freie Variable ist, und für die gilt $\neg\mathit{bew}\big(\chi\big(\ulcorner\chi(x_0)\urcorner\big)\big)$; beachte, dass $\ulcorner x_0\urcorner = \mathtt{s0}$ *bzw.* $\ulcorner x_0\urcorner = 1$.

$$\begin{aligned} &\chi(x_0) \iff \mathit{formel}(x_0) \wedge \mathit{var\_in\_formel}(1,x_0) \wedge \\ &\quad \forall v\big(\mathit{var\_in\_formel}(v,x_0) \to (v=1 \vee \mathit{geb\_in\_formel}(v,x_0))\big) \wedge \\ &\qquad\qquad \neg\mathit{bew}\big(\mathit{sub\_in\_formel}(1,\mathit{goez}(x_0),x_0)\big) \end{aligned}$$

Setzen wir σ an Stelle von $\chi\big(\ulcorner\chi(x_0)\urcorner\big)$, so ist σ ein $\mathscr{L}_{\mathsf{PA}}$-Satz für den gilt:

$$\mathbb{N} \vDash \sigma \iff \mathsf{PA} \nvdash \sigma$$

Der Satz σ ist genau dann wahr in $\mathbb{N}$, wenn σ in PA nicht beweisbar ist. Somit ist σ genau dann falsch in $\mathbb{N}$, also $\mathbb{N} \vDash \neg\sigma$, wenn σ in PA beweisbar ist. Wenn aber gilt $\mathsf{PA} \vdash \sigma$, dann muss auch gelten $\mathbb{N} \vDash \sigma$. Somit kann σ nur dann falsch sein in $\mathbb{N}$, wenn PA inkonsistent ist; in diesem Fall hat aber PA gar kein Modell. Das heisst, falls PA konsistent ist, so gibt es einen $\mathscr{L}_{\mathsf{PA}}$-Satz σ, der in $\mathbb{N}$ wahr ist, in PA aber nicht beweisbar ist, und mit dem Vollständigkeitssatz gibt es also auch ein Modell $\mathcal{N} \vDash \mathsf{PA}$, in dem σ falsch ist, also $\mathcal{N} \vDash \neg\sigma$. Der Satz σ sagt in einem solchen Modell $\mathcal{N}$ etwas ganz anderes als im Modell $\mathbb{N}$.