Die Gödel'schen Sätze

Serie 0

Terme & Formeln

Musterlösung

---

0. Es sei F_1 ein 1-stelliges, F_2 ein 2-stelliges, und F_3 ein 3-stelliges Funktionssymbol. Weiter sei R_2 ein 2-stelliges Relationssymbol, c sei ein Konstantensymbol, und x, y, z seien Variablen.

(a) Welche der folgenden Zeichenketten sind Terme, welche Formeln, und welche Zeichenketten sind syntaktisch inkorrekt?

i. $F_3xF_3yF_3zF_2xF_1zz\mathsf{c}\mathsf{c}$

ii. $\neg\neg\neg\exists x\neg\big((y = F_3xF_1y) \vee (x = x)\big)$

iii. $\forall x\neg(\mathsf{c} = x) \vee \exists\mathsf{c}(\mathsf{c} = x)$

iv. $\neg\neg\forall yR_2F_3F_2F_1\mathsf{c}xxxx \vee \forall y(x = \mathsf{c})$

v. $\forall x\neg\exists x\forall x\neg\big(F_2yF_3xF_1\mathsf{c}z = \mathsf{c} \wedge \exists xR_2zy\big)$

vi. $\forall x\neg\forall x\exists x\big(\neg R_2F_1xx \vee \neg(F_2F_3F_2F_2xxxxx = y)\big)$

(b) Wie sind die obigen, syntaktisch korrekten, Terme und Formeln aufgebaut?

Lösung:

(a) i. Term $F_3(x, F_3(y, F_3(z, F_2(x, F_1(z)), z), \mathsf{c}), \mathsf{c})$

ii. inkorrekt (Das Funktionssymbol F_3 erhält nur 2 Argumente.)

iii. inkorrekt (Der Quantor $\exists$ steht vor dem Konstantensymbol c.)

iv. Formel $\neg\neg\forall yR_2(F_3(F_2(F_1(\mathsf{c}), x), x, x), x) \vee \forall y(x = \mathsf{c})$

v. Formel $\forall x\neg\exists x\forall x\neg\big(F_2(y, F_3(x, F_1(\mathsf{c}), z)) = \mathsf{c} \wedge \exists xR_2(z, y)\big)$

vi. inkorrekt (Die erste Instanz des Funktionssymbols F_2 erhält nur 1 Argument.)

(b) Mit (T0) sind x, y, und z Terme. Mit (T1) ist c ein Term. Nun können wir wiederholt (T2) anwenden.

Die Terme in den Formeln werden wiederum analog gebildet. Mit (F0) sind $F_2yF_3xF_1\mathsf{c}z = \mathsf{c}$ und $x = \mathsf{c}$ Formeln. Mit (F1) sind $R_2F_3F_2F_1\mathsf{c}xxxx$ und R_2zy Formeln. Nun können wir wiederholt (F2), (F3) bzw. (F4) anwenden.

1. Bei der folgenden Zeichenkette (mit F_2, R_2, c wie in Aufgabe 0) fehlen die Klammern:

$$\forall z\forall x\neg F_2xx = y \wedge \forall y\neg R_2z\mathsf{c} \vee y = x \wedge \forall xR_1F_2\mathsf{c}x$$

(a) Setze auf zwei verschiedene Arten Klammern in die Zeichenkette, und zwar so, dass zwei Formeln φ & ψ entstehen bei denen die Menge der *freien* Variablen unterschiedlich sind.

Definition: Eine Variable heisst *frei* in einer Formel, wenn sie nicht im Wirkungsbereich eines Quantors ist; wobei eine Variable in einer Formel sowohl *frei* als auch *gebunden* vorkommen kann.

(b) Schreibe diese beiden Formeln φ & ψ in polnischer Notation.

Beispiel-Lösung:

(a) Zum Beispiel:

$$\varphi :\equiv ((\forall z \forall x \neg F_2 xx = y) \wedge (\forall y (\neg R_2 z \mathtt{c} \vee y = x))) \wedge (\forall x R_1 F_2 \mathtt{c} x)$$
$$\psi :\equiv \forall z \forall x (((\neg F_2 xx = y \wedge \forall y \neg R_2 z \mathtt{c}) \vee y = x) \wedge \forall x R_1 F_2 \mathtt{c} x)$$

Dann kommt x frei in φ vor, aber nicht in ψ.

(b) Es gilt:

$$\varphi \equiv \wedge \wedge \forall z \forall x \neg = F_2 xxy \forall y \vee \neg R_2 z \mathtt{c} = yx \forall x R_1 F_2 \mathtt{c} x$$
$$\psi \equiv \forall z \forall x \wedge \vee \wedge \neg = F_2 xxy \forall y \neg R_2 z \mathtt{c} = yx \forall x R_1 F_2 \mathtt{c} x$$

2. Finde eine Signatur der folgenden Theorien *bzw.* algebraischen Strukturen.

(a) Ringtheorie

(b) Boole'sche Algebren

(c) Vektorräume

Beispiel-Lösung:

(a) Zum Beispiel $\{+, \cdot\}$, beides zweistellige Funktionssymbole. (Die Existenz der Konstanten `0` und `1` kann durch Axiome garantiert werden.)

(b) Zum Beispiel $\{$`nand`$\}$ oder $\{$`nor`$\}$, jeweils ein zweistelliges Funktionssymbol.

(c) Zum Beispiel $\{V, R_+, R_\circ\}$, ein einstelliges und zwei dreistellige Relationssymbole, wie folgt definiert:

   i. Die Relation $V(a)$ ist genau dann erfüllt, wenn a ein Vektor ist. Ansonsten is a ein Körperelement/Skalar.

   ii. Die Relation $R_+(a, b, c)$ ist genau dann erfüllt, wenn a, b und c entweder alles Skalare oder alles Vektoren sind und c die Summe von a und b ist.

   iii. Die Relation $R_\circ(a, b, c)$ ist genau dann erfüllt, wenn a, b und c entweder alles Skalare oder a ein Skalar, hingegen b und c Vektoren sind und c das Produkt von a und b ist.