

8. Beweise formal die Transitivität der Gleichheitsrelation:

$$\vdash \forall x \forall y \forall z ((x = y \wedge y = z) \rightarrow x = z)$$

Lösung:

Wir zeigen zuerst $\{x = y \wedge y = z\} \vdash x = z$:

$$\begin{array}{ll} \top \ni & x = y \wedge y = z \\ \text{L}_4 & (x = y \wedge y = z) \rightarrow y = z \\ \text{MP} & y = z \\ \text{L}_5 & y = z \rightarrow (x = x \rightarrow (x = x \wedge y = z)) \\ \text{MP} & x = x \rightarrow (x = x \wedge y = z) \\ \text{L}_{14} & x = x \\ \text{MP} & x = x \wedge y = z \\ \text{L}_{15} & (x = x \wedge y = z) \rightarrow (x = y \rightarrow x = z) \\ \text{MP} & x = y \rightarrow x = z \\ \text{L}_3 & (x = y \wedge y = z) \rightarrow x = y \\ \text{MP} & x = y \\ \text{MP} & x = z \end{array}$$

Mit dem DEDUKTIONSTHEOREM folgt also

$$\vdash (x = y \wedge y = z) \rightarrow x = z.$$

Nach drei Anwendungen der VERALLGEMEINERUNGSREGEL haben wir schliesslich

$$\vdash \forall x \forall y \forall z ((x = y \wedge y = z) \rightarrow x = z),$$

was zu beweisen war.

9. (a) Schreibe die Gruppenaxiome mit der Signatur $\mathcal{L}_{GT'} = \{\circ\}$, wobei “ $\circ$ ” ein binäres Funktionssymbol ist.
- (b) Schreibe in der Sprache $\mathcal{L}_{GT'}$ den folgenden Satz auf:

Es gibt ein x , so dass $x \circ x$ das Neutralelement ist.

Lösung:

- (a) $\forall x \forall y \forall z (x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z)$
 $\exists e (\forall x (e \circ x = x \wedge \exists y: y \circ x = e))$
- (b) $\exists x \forall y ((x \circ x) \circ y = y)$

10. In dieser Aufgabe soll gezeigt werden, dass die Bedingung bezüglich der freien Variablen in der Verallgemeinerungsregel ($\forall$) notwendig ist, da sonst zum Beispiel das DEDUKTIONSTHEOREM (DT) nicht mehr allgemein gilt. Um dies zu zeigen, wählen wir für T die Theorie PA , für ψ die Formel $\exists y(\mathbf{s}(y) = x)$, und für φ die Formel $\forall x \psi$.

- (a) Zeige, dass gilt: $\mathsf{PA} \cup \{\psi\} \vdash \varphi$.
- (b) Zeige, dass $\mathsf{PA} \vdash \psi \rightarrow \varphi$ nur dann gilt, wenn PA inkonsistent ist. Das heisst:

$$\text{Con}(\mathsf{PA}) \implies \left(\mathsf{PA} \cup \{\psi\} \vdash \varphi \not\Rightarrow \mathsf{PA} \vdash \psi \rightarrow \varphi \right)$$

Lösung:

- (a) $\mathsf{T} \ni \exists y(\mathbf{s}(y) = x)$
 $(\forall) \quad \forall x \exists y(\mathbf{s}(y) = x)$
- (b) Annahme $\exists y(\mathbf{s}(y) = x) \rightarrow \forall x \exists y(\mathbf{s}(y) = x)$
 $(\forall) \quad \forall x (\exists y(\mathbf{s}(y) = x) \rightarrow \forall x \exists y(\mathbf{s}(y) = x))$
 $\mathsf{L}_{10} + \mathsf{MP} \quad \exists y(\mathbf{s}(y) = \mathbf{s}0) \rightarrow \forall x \exists y(\mathbf{s}(y) = x)$
 $\mathsf{L}_{14} \quad \mathbf{s}0 = \mathbf{s}0$
 $\mathsf{L}_{11} + \mathsf{MP} \quad \exists y(\mathbf{s}(y) = \mathbf{s}0)$
 $\mathsf{MP} \quad \forall x \exists y(\mathbf{s}(y) = x)$
 $\mathsf{L}_{10} + \mathsf{MP} \quad \exists y(\mathbf{s}(y) = 0)$
 $\mathsf{PA}_0 \quad \neg \exists y(\mathbf{s}(y) = 0),$
woraus sich ein Widerspruch ableiten lässt.

11. Sei T eine konsistente Menge von $\mathcal{L}$ -Formeln und φ ein $\mathcal{L}$ -Satz; dann gilt:

- (a) φ ist konsistent mit T genau dann wenn $\mathsf{T} \not\vdash \neg\varphi$.
- (b) φ ist unabhängig von T genau dann wenn $\mathsf{T} \not\vdash \varphi$ & $\mathsf{T} \not\vdash \neg\varphi$.

Lösung:

- (a) Wir zeigen beide Richtungen der Äquivalenz mittels Kontraposition.
Angenommen $\mathsf{T} \vdash \neg\varphi$. Dann lässt sich zeigen, dass gilt: $\mathsf{T} \cup \{\varphi\} \vdash \varphi \wedge \neg\varphi$, also $\neg \text{Con}(\mathsf{T} \cup \{\varphi\})$.
Gilt umgekehrt $\neg \text{Con}(\mathsf{T} \cup \{\varphi\})$, können wir jede Aussage aus $\mathsf{T} \cup \{\varphi\}$ beweisen, zum Beispiel $\neg\varphi$. Da φ ein $\mathcal{L}$ -Satz ist, folgt aus $\mathsf{T} \cup \{\varphi\} \vdash \neg\varphi$, dass $\mathsf{T} \vdash \varphi \rightarrow \neg\varphi$. Damit können wir $\mathsf{T} \vdash \neg\varphi$ zeigen, zum Beispiel mithilfe von Aufgabe 12.
- (b) Mithilfe von 11a und mit der Tautologie $\neg\neg\varphi \leftrightarrow \varphi$ können wir zeigen, dass $\mathsf{T} \not\vdash \varphi$ & $\mathsf{T} \not\vdash \neg\varphi$ äquivalent zu $\text{Con}(\mathsf{T} \cup \{\neg\varphi\})$ & $\text{Con}(\mathsf{T} \cup \{\varphi\})$ ist, was zu beweisen war.

12. Zeige, zum Beispiel mit L_0 , L_1 , L_8 , L_{10} , (MP) und (DT), dass gilt:

$$\vdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow \neg\varphi)$$

Lösung:

Betrachte $\mathsf{T} = \{\varphi \rightarrow \psi, \varphi \rightarrow \neg\psi, \varphi\}$ und den folgenden formalen Beweis:

$\mathsf{T} \ni \varphi$
 $\mathsf{T} \ni \varphi \rightarrow \psi$
MP ψ
 $\mathsf{T} \ni \varphi \rightarrow \neg\psi$
MP $\neg\psi$
 $\mathsf{L}_9 \quad \neg\psi \rightarrow (\psi \rightarrow \neg\varphi)$
MP $\psi \rightarrow \neg\varphi$
MP $\neg\varphi$

Nach zweimaliger Anwendung des DEDUKTIONSTHEOREMS erhalten wir also

$$\{\varphi\} \vdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow \neg\varphi).$$

Mithilfe von L_1 und MODUS PONENS erhalten wir leicht

$$\{\neg\varphi\} \vdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow \neg\varphi).$$

Schreibe $\chi := (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow \neg\varphi)$. Mit dem DEDUKTIONSTHEOREM sehen wir also, dass $\varphi \rightarrow \chi$ und $\neg\varphi \rightarrow \chi$ Tautologien sind. Nun können wir zeigen:

$\mathsf{L}_8 \quad (\varphi \rightarrow \chi) \rightarrow ((\neg\varphi \rightarrow \chi) \rightarrow ((\varphi \vee \neg\varphi) \rightarrow \chi))$
 $\vdash \varphi \rightarrow \chi$
MP $(\neg\varphi \rightarrow \chi) \rightarrow ((\varphi \vee \neg\varphi) \rightarrow \chi)$

$$\begin{array}{l} \vdash \neg\varphi \rightarrow \chi \\ \text{MP} \quad (\varphi \vee \neg\varphi) \rightarrow \chi \\ \text{L}_0 \quad \varphi \vee \neg\varphi \\ \text{MP} \quad \chi, \end{array}$$

was zu beweisen war.