

$\circ$	α	β	γ	δ		$\circ$	α	β	γ	δ
α	α	β	γ	δ		α	α	β	γ	δ
β	β	γ	δ	α	versus	β	β	α	δ	γ
γ	γ	δ	α	β		γ	γ	δ	α	β
δ	δ	α	β	δ		δ	δ	γ	β	α

15. Sei $\mathcal{L} = \{c, f\}$, wobei c ein Konstantensymbol und f ein 1-stelliges Funktionssymbol ist. Weiter seien φ_1 und φ_2 die $\mathcal{L}$ -Formeln

$$\underbrace{\forall x(x = c \vee x = f(c))}_{\varphi_1} \quad \text{bzw.} \quad \underbrace{\exists x(x \neq c)}_{\varphi_2}.$$

Konstruiere zwei Modelle $\mathbf{M}_1$ & $\mathbf{M}_2$ so dass gilt: $\mathbf{M}_1 \models \varphi_1 \wedge \varphi_2$ und $\mathbf{M}_2 \models \varphi_1 \wedge \neg\varphi_2$.

Beispiel-Lösung:

Seien $B_1 := \{0, 1\}$, $B_2 := \{0\}$ und gelte:

$$c^{\mathbf{M}_1} = 0, \quad f^{\mathbf{M}_1}(0) = 1, \quad f^{\mathbf{M}_1}(1) = 0,$$

sowie:

$$c^{\mathbf{M}_2} = 0, \quad f^{\mathbf{M}_2}(0) = 0.$$

16. Sei R ein 2-stelliges Relationssymbol. Weiter sei:

$$\varphi_1: \forall x(xRx)$$

$$\varphi_2: \forall x\forall y(xRy \rightarrow yRx)$$

$$\varphi_3: \forall x\forall y\forall z((xRy \wedge yRz) \rightarrow xRz)$$

Finde drei Modelle $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, \mathbf{M}_3$ mit möglichst kleinen Bereichen für die gilt:

$$\mathbf{M}_1 \models \neg\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3 \quad \mathbf{M}_2 \models \varphi_1 \wedge \neg\varphi_2 \wedge \varphi_3 \quad \mathbf{M}_3 \models \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \neg\varphi_3$$

Lösung:

Seien $B_1 := \{a\}$, $B_2 := \{a, b\}$, $B_3 := \{a, b, c\}$ und gelte:

$$R^{\mathbf{M}_1} = \emptyset, \quad R^{\mathbf{M}_2} = B_2^2 \setminus \{\langle b, a \rangle\}, \quad R^{\mathbf{M}_3} = B_3^2 \setminus \{\langle a, c \rangle, \langle c, a \rangle\}$$

17. Sei $\mathbf{LO}$ die Theorie der *linearen Ordnung*. Die Sprache $\mathcal{L}_{\mathbf{LO}}$ besteht aus der 2-stelligen Relation “ $<$ ”, und $\mathbf{LO}$ besteht aus den folgenden Axiomen:

$$\mathbf{LO}_1 \quad \forall x \neg(x < x)$$

$$\mathbf{LO}_2 \quad \forall x\forall y\forall z((x < y \wedge y < z) \rightarrow x < z)$$

$$\mathbf{LO}_3 \quad \forall x\forall y(x < y \vee x = y \vee y < x)$$

Die Theorie $\mathbf{T}$ sei nun wie folgt definiert: $\mathcal{L}_{\mathbf{T}} = \mathcal{L}_{\mathbf{LO}} \cup \{c_n : n \in \mathbb{N}\}$, wobei die c_n 's Konstantensymbole sind, und $\mathbf{T} = \mathbf{LO} \cup \{c_n < c_{n+1} : n \in \mathbb{N}\}$, wobei $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$.

Wir definieren vier Modelle $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, \mathbf{M}_3, \mathbf{M}_4$ von $\mathbf{T}$ mit den Bereichen B_1, B_2, B_3, B_4 wie folgt: $B_1 = B_3 = \mathbb{R}$, $B_2 = B_4 = (0, 2)$ (offenes Intervall), wobei die 2-stellige Relation “ $<$ ” in allen vier Modellen als die natürliche Ordnungsrelation auf den reellen

Zahlen interpretiert wird. Weiter sei für alle $n \in \mathbb{N}$: $c_n^{\mathbf{M}_1} = n$, $c_n^{\mathbf{M}_2} = c_n^{\mathbf{M}_3} = 2 - \frac{1}{n+1}$,
und $c_n^{\mathbf{M}_4} = 1 - \frac{1}{n+2}$.

Welche dieser vier Modelle sind zueinander isomorph?

Lösung:

Es gilt: $\mathbf{M}_1 \cong \mathbf{M}_2 \not\cong \mathbf{M}_3 \cong \mathbf{M}_4$.

Beweis:

$\mathbf{M}_1 \cong \mathbf{M}_2$: Die monoton wachsende Bijektion $f : \mathbb{R} \rightarrow (0, 2)$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} \exp(x) & x \leq 0 \\ 2 - \frac{1}{x+1} & x \geq 0 \end{cases}$$

ist ein Isomorphismus.

$\mathbf{M}_3 \cong \mathbf{M}_4$: Die monoton wachsende Bijektion $f : \mathbb{R} \rightarrow (0, 2)$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\exp(x-1)}{2} & x \leq 1 \\ \frac{1}{3-x} & 1 \leq x \leq 2 \\ 2 - \exp(2-x) & 2 \leq x \end{cases}$$

ist ein Isomorphismus.

$\mathbf{M}_1 \not\cong \mathbf{M}_3$: Angenommen doch, dann gäbe es einen Ordnungsisomorphismus $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ so, dass gilt:

$$\forall n \in \mathbb{N} : f(n) = f(c_n^{\mathbf{M}_1}) = c_n^{\mathbf{M}_3} = 2 - \frac{1}{n+1} < 2.$$

Somit kann f nicht surjektiv sein, insbesondere kein Isomorphismus, denn es gilt:

$$\forall x \in \mathbb{R} : f(x) \leq f(\max\{0, \lceil x \rceil\}) < 2,$$

im Widerspruch zu unserer Annahme.