Die Gödel'schen Sätze

Serie 5

formale Beweise, Modelle, Kompaktheitssatz

Musterlösung

22. Sei "e" ein Konstantensymbol und "$\circ$" ein binäres Funktionssymbol.

Zeige: $\big\{\forall x \forall y \big(y \circ x = \mathsf{e} \to x \circ y = \mathsf{e}\big),\ \forall x \exists y \big(y \circ x = \mathsf{e}\big)\big\} \vdash \forall x \exists y \big(x \circ y = \mathsf{e}\big)$

Hinweis: Zeige zuerst allgemein (*z.B.* mit einem Widerspruchsbeweis) dass gilt:

$$\big\{\forall y \big(\varphi(y) \to \psi(y)\big),\ \exists y\, \varphi(y)\big\} \vdash \exists y\, \psi(y)$$

Lösung:

$\mathsf{T} \ni$	$\forall y \big(\varphi(y) \to \psi(y)\big)$
$\mathsf{L}_{10} + \mathsf{MP}$	$\varphi(y) \to \psi(y)$
Aufgabe 6	$\neg\psi(y) \to \neg\varphi(y)$
Annahme	$\neg\exists y\, \psi(y)$
$(\mathsf{S.1}) + \mathsf{MP}$	$\forall y\, \neg\psi(y)$
$\mathsf{L}_{10} + \mathsf{MP}$	$\neg\psi(y)$
MP	$\neg\varphi(y)$
$(\forall)$	$\forall y\, \neg\varphi(y)$
$(\mathsf{T}) + \ldots$	$\neg\exists y\, \neg\neg\varphi(y)$
$(\mathsf{R.2}) + \ldots$	$\neg\exists y\, \varphi(y)$
$\mathsf{T} \ni$	$\exists y\, \varphi(y)$
	Widerspruch.

Für den ursprünglichen Beweis verwende zusätzlich Verallgemeinerung und L_{10}.

23. DLO bezeichne die Theorie der *dichten linearen Ordnungen*: Die Sprache $\mathscr{L}_{\mathsf{DLO}}$ besteht aus der 2-stelligen Relation "$<$", und die nicht-logischen Axiome von DLO sind:

DLO_1	$\forall x \neg(x < x)$
DLO_2	$\forall x \forall y \forall z\, \big((x < y \wedge y < z) \to x < z\big)$
DLO_3	$\forall x \forall y\, (x < y \vee x = y \vee y < x)$
DLO_4	$\forall x \forall y \exists z\, \big(x < y \to (x < z \wedge z < y)\big)$
DLO_5	$\forall x \exists y \exists z\, (y < x \wedge x < z)$

(a) Konstruiere ein Modell für DLO mit dem Bereich $\mathbb{N} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Q}$.

(b) Zeige, dass zwei abzählbare Modelle von DLO immer isomorph sind.

Lösung:

(a) Für $\langle x_0, x_1, x_2\rangle, \langle y_0, y_1, y_2\rangle \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Q}$ setze zum Beispiel:

$$\langle x_0, x_1, x_2\rangle < \langle y_0, y_1, y_2\rangle :\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 <_{\mathbb{N}} y_0 \\ x_0 =_{\mathbb{N}} y_0 \wedge x_1 <_{\mathbb{Z}} y_1 \\ x_0 =_{\mathbb{N}} y_0 \wedge x_1 =_{\mathbb{Z}} y_1 \wedge x_2 <_{\mathbb{Q}} y_2 \end{cases}$$

(b) Ohne Einschränkung (bzw. bis auf Bijektion von Mengen) können wir zwei Modelle mit Bereich $\mathbb{N}$ und (potentiell) verschiedenen Ordnungen betrachten, also $(\mathbb{N}, <_a)$ und $(\mathbb{N}, <_b)$.
Wir definieren den Isomorphismus f induktiv: $f(0) := 0$.
Für $i > 0$ gilt nach DLO_4 und DLO_5

$$\exists n_i \in \mathbb{N} : \forall j < i : \quad j <_a i \Rightarrow f(j) <_b n_i \quad \wedge \quad i <_a j \Rightarrow n_i <_b f(j) \tag{1}$$

Setze $f(i) := \min_{\mathbb{N}} \big\{ n \in \mathbb{N} \setminus \{f(0), \ldots, f(i-1)\} \ : \ n \text{ erfüllt } (1) \big\}$.
Dabei garantiert der Ausschluss von $\{f(0), \ldots, f(i-1)\}$, dass f injektiv wird, und $\min_{\mathbb{N}}$ sowie die Dichtheit von $(\mathbb{N}, <_a)$, dass f surjektiv wird.

24. Sei $\mathscr{L}$ eine abzählbare Signatur und T eine Menge von $\mathscr{L}$-Sätzen. Für jede konsistente Menge $\mathsf{T}' \subseteq \mathsf{T}$ von $\mathscr{L}$-Sätzen sei $\mathbf{M}_{\mathsf{T}'}$ ein Modell für T', also $\mathbf{M}_{\mathsf{T}'} \models \mathsf{T}'$. Ferner sei

$$\Sigma := \big\{ \mathbf{M}_{\mathsf{T}'} : \mathsf{T}' \subseteq \mathsf{T} \textit{ und } \mathrm{Con}(\mathsf{T}') \big\}$$

und für jeden $\mathscr{L}$-Satz σ sei

$$X_\sigma := \{\mathbf{M} \in \Sigma : \mathbf{M} \models \sigma\}.$$

(a) Zeige, dass die Mengen X_σ die Basis einer Topologie auf Σ bilden.

(b) Zeige, dass jede Menge X_σ abgeschlossen ist.

(c) Zeige mit dem Kompaktheitssatz, dass jede offene Überdeckung von Σ eine endliche Teilüberdeckung enthält (*d.h.* der topologische Raum Σ ist kompakt).

Beweis:

(a) Zwei Dinge sind zu zeigen:

- Die X_σ überdecken ganz Σ.
- Für beliebige X_σ, X_τ sowie beliebiges $\mathbf{M} \in X_\sigma \cap X_\tau$ gibt es X_ρ so, dass $\mathbf{M} \in X_\rho$.

Die erste Aussage folgt aus $X_\sigma \cup X_{\neg\sigma} = \Sigma$ für einen beliebigen $\mathscr{L}$-Satz σ. Die zweite Aussage folgt aus $X_\sigma \cap X_\tau = X_{\sigma\wedge\tau}$.

(b) Es gilt für einen beliebigen $\mathscr{L}$-Satz σ:

$$X_\sigma = \Sigma \setminus X_{\neg\sigma}$$

(c) Sei $\bigcup_{i\in I} A_i = \Sigma$ eine beliebige offene Überdeckung. Wir führen einen Widerspruchsbeweise: Angenommen, es gibt keine endliche Teilmenge $J \subseteq I$ so, dass $\bigcup_{j\in J} A_j = \Sigma$.

$$\begin{aligned} \forall J \subseteq I \text{ endlich: } & \bigcup_{j\in J} A_j \neq \Sigma \\ \forall J \subseteq I \text{ endlich: } & \bigcap_{j\in J} \Sigma \setminus A_j \neq \varnothing \end{aligned} \tag{2}$$

Da die $\Sigma \setminus A_j$ abgeschlossen sind und da die X_σ auch eine Basis der abgeschlossenen Mengen bilden, gibt es eine Menge von $\mathscr{L}$-Sätzen Φ_j so, dass $\Sigma \setminus A_j = \bigcap_{\varphi\in\Phi_j} X_\varphi$. Sei $\Phi = \bigcup_{i\in I} \Phi_i$. Dann folgt aus (2) insbesondere:

$$\begin{aligned} \forall \Phi' \subseteq \Phi \text{ endlich: } & \bigcap_{\varphi\in\Phi'} X_\varphi \neq \varnothing \\ \forall \Phi' \subseteq \Phi \text{ endlich: } & \exists\, \mathbf{M}' \in \bigcap_{\varphi\in\Phi'} X_\varphi \\ \forall \Phi' \subseteq \Phi \text{ endlich: } & \exists\, \mathbf{M}' \models \Phi' \end{aligned}$$

Daraus folgt aber, mit dem semantischen Kompaktheitssatz, dass es ein Model $\mathbf{M}$ für Φ gibt. Dies bedeutet wiederum, dass $\bigcap_{i\in I} \Sigma \setminus A_i = \bigcap_{\varphi\in\Phi} X_\varphi \neq \varnothing$, im Widerspruch zu $\bigcup_{i\in I} A_i = \Sigma$.