Die Gödel'schen Sätze

Serie 6

Modelle: Löwenheim-Skolem & Kompaktheitssatz

Musterlösung

25. Es lässt sich zeigen, dass die Peano Arithmetik ein überabzählbares Modell hat. Warum ist das kein Widerspruch zur Abzählbarkeit der natürlichen Zahlen?

Antwort:

Die Abzählbarkeit des Standard-Modells der natürlichen Zahlen schliesst nicht aus, dass ein überabzählbares Modell existiert. Zwar formalisieren die natürlichen Zahlen in einem gewissen Sinne Abzählbarkeit, die Überabzählbarkeit eines Modells ist jedoch eine Aussage auf der Meta-Ebene.

26. Es lässt sich zeigen, dass der Körper der reellen Zahlen ein abzählbares Modell hat. Warum ist das kein Widerspruch zur Überabzählbarkeit der reellen Zahlen $\mathbb{R}$?

Antwort:

Die Begründung ist analog zu derjenigen in der obigen Aufgabe.

27. Sei T das Axiomensystem der rationalen Zahlen. Wenn wir, wie dies üblich ist, das Modell einer Theorie mit dem Bereich des Modells identifizieren, so können wir schreiben $\mathbb{Q} \models \mathsf{T}$. Wir erweitern nun T zu T^* wie folgt: $\mathscr{L}_{\mathsf{T}^*} = \mathscr{L}_{\mathsf{T}} \cup \{\delta\}$, wobei δ ein Konstantensymbol ist, und es sei $\mathsf{T}^* = \mathsf{T} \cup \{\varphi_n : n \in \mathbb{N}\}$, wobei φ_n die Formel $0 < \delta \wedge \delta < \frac{1}{n}$ ist.

Aus dem Kompaktheitssatz folgt $\mathrm{Con}(\mathsf{T}) \Rightarrow \mathrm{Con}(\mathsf{T}^*)$, und mit dem Vollständigkeitssatz erhalten wir: Existiert ein Modell $\mathbb{Q}$ für die Theorie der rationalen Zahlen, so exisitert auch ein Modell $\mathbb{Q}^*$ für die erweiterte Theorie T^*.

(a) Gibt es einen $\mathscr{L}_{\mathsf{T}}$-Satz φ der in einer der beiden Theorien T oder T^* beweisbar ist, in der anderen aber nicht?

(b) Zeige, dass $\delta^{\mathbb{Q}^*}$ kleiner ist als jede positive rationale Zahl aus $\mathbb{Q}$.

(c) Entscheide, ob im Modell $\mathbb{Q}^*$ ein $x \in \mathbb{Q}$ existiert, so dass für alle $y \in \mathbb{Q}$ gilt:

$$\left(|x - \delta^{\mathbb{Q}^*}| < |y - \delta^{\mathbb{Q}^*}|\right) \vee x = y$$

(d) Die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ bilden einen sogenannten *archimedischen Körper*; das heisst, für jedes $x \in \mathbb{Q}$, $x \neq 0$ existiert eine natürliche Zahl n, so dass gilt:

$$n \cdot |x| > 1$$

Ist $\mathbb{Q}^*$ ebenfalls ein archimedischer Körper?

Lösung:

(a) Nein. Alle Axiome in $\mathsf{T}^* \setminus \mathsf{T}$ sind Aussagen über δ, aber wir können keine $\mathscr{L}_{\mathsf{T}}$-Sätze über δ formulieren. Ausserdem finden wir bereits in $\mathbb{Q}$ Zeugen für die Kojunktion endlich vieler Aussagen der Form $\exists x(0 < x \wedge x < \frac{1}{n})$.

(b) Sei $x \in \mathbb{Q}_{>0}$. Dann gilt $\frac{1}{x} \in \mathbb{Q}_{>0}$ und es gibt $n \in \mathbb{N}$ so, dass $n > \frac{1}{x}$. Da beide Zahlen positiv sind, folgt daraus $\frac{1}{n} < x$ und (mit φ_n) $\delta < x$.

(c) Ja, $x = 0$. Denn $|x - \delta^{\mathbb{Q}^*}| = |-\delta^{\mathbb{Q}^*}| = \delta^{\mathbb{Q}^*}$ und $|y - \delta^{\mathbb{Q}^*}| \geq |y| - \delta^{\mathbb{Q}^*}$. Nun gilt entweder $y = 0$ oder $|y| > 2\delta^{\mathbb{Q}^*}$ nach (27b), also $|y| - \delta^{\mathbb{Q}^*} > \delta^{\mathbb{Q}^*}$, was die Ungleichung vervollständigt.

(d) Um sicher zu sein, dass bereits $\mathbb{Q}$ ein archimedischer Körper ist, muss dies aus den Axiomen folgen. Also ist $\mathbb{Q}^*$ ebenfalls ein archimedischer Körper, allerdings mit anderen natürlichen Zahlen.