Die Gödel'schen Sätze

Serie 7

Vollständigkeit, Ultrafilter und Ideale

Musterlösung

---

28. Zeige mit Aufgabe 23.(b), dass die Theorie der dichten linearen Ordnungen vollständig ist; *d.h.* für alle $\mathscr{L}_{\mathsf{DLO}}$-Sätze σ gilt:

$$\mathsf{DLO} \vdash \sigma \quad \textit{oder} \quad \mathsf{DLO} \vdash \neg\sigma$$

Beweis:

Angenommen, es gäbe einen $\mathscr{L}_{\mathsf{DLO}}$-Satz σ mit

$$\mathsf{DLO} \nvdash \sigma \quad \textit{und} \quad \mathsf{DLO} \nvdash \neg\sigma.$$

Dann existierten abzählbare Modelle $\mathbf{M} \vDash \mathsf{DLO} + \neg\sigma$ und $\mathbf{N} \vDash \mathsf{DLO} + \sigma$. Da $\mathbf{M} \vDash \neg\sigma$, während $\mathbf{N} \vDash \sigma$, wären $\mathbf{M}$ und $\mathbf{N}$ nicht elementar äquivalent, also insbesondere nicht isomorph. Dies wäre jedoch ein Widerspruch zu Aufgabe 23.(b).

29. Sei S eine unendliche Menge und sei $\mathscr{U} \subseteq \mathscr{P}(S)$ ein Ultrafilter welcher alle co-endlichen Teilmengen von S enthält.

Zeige, dass $\mathscr{U}$ keine endlichen Mengen enthält.

Beweis:

Angenommen, $\mathscr{U}$ enthielte die endliche Menge x. Dann ist $S \setminus x \in \mathscr{U}$ nach Voraussetzung und $\varnothing = x \cap (S \setminus x) \in \mathscr{U}$ nach Filtereigenschaft. Dies wäre allerdings ein Widerspruch zur Definition eines Filters.

30. Sei S eine Menge und sei $\mathscr{U} \subseteq \mathscr{P}(S)$ ein Ultrafilter.

(a) Zeige: Enthält $\mathscr{U}$ eine endliche Menge, so ist $\mathscr{U}$ ein Hauptultrafilter.

(b) Zeige, dass für alle Mengen $x, y \in \mathscr{P}(S)$ mit $y \subseteq x \in \mathscr{U}$ gilt:

$$\textit{entweder} \quad y \in \mathscr{U} \quad \textit{oder} \quad (x \setminus y) \in \mathscr{U}$$

Beweis:

(b) Enweder $y \in \mathscr{U}$ und es folgt $(x \setminus y) \notin \mathscr{U}$ analog zur vorherigen Aufgabe. Oder $y \notin \mathscr{U}$, dann folgt $(S \setminus y) \in \mathscr{U}$, da $\mathscr{U}$ ein Ultrafilter ist. Also gilt auch $(x \setminus y) = x \cap (S \setminus y) \in \mathscr{U}$ wegen der Durchschnittseigenschaft von Filtern.

(a) Sei $x \in \mathscr{U}$ endlich. Entweder $|x| = 1$ oder es existiert y mit $\varnothing \subsetneq y \subsetneq x$ und somit auch $\varnothing \subsetneq (x \setminus y) \subsetneq x$. Dann gilt nach (b), dass entweder $y \in \mathscr{U}$ oder $(x \setminus y) \in \mathscr{U}$. Es gibt also $x_1 \subsetneq x$ mit $x_1 \in \mathscr{U}$.
Nach endlich vielen Schritten erhalten wir $x_n \in \mathscr{U}$ mit $|x_n| = 1$. Dieses x_n erzeugt $\mathscr{U}$.

31. Sei S eine nicht-leere Menge. Auf $\mathscr{P}(S)$ definieren wir zwei binäre Operationen wie folgt:

$$x \cdot y := x \cap y \qquad \text{und} \qquad x + y := (x \setminus y) \cup (y \setminus x)$$

(a) Zeige, dass $\big(\mathscr{P}(S), +, \cdot\big)$ ein kommutativer Ring ist.

(b) Welche Menge ist die 0, und welche Menge ist die 1 im Ring $\big(\mathscr{P}(S), +, \cdot\big)$?

(c) Wie lassen sich Ideale im Ring $\big(\mathscr{P}(S), +, \cdot\big)$ charakterisieren?

(d) Ein Ideal I in einem Ring R heisst *Primideal*, falls für alle $r, s \in R$ mit $r \cdot s \in I$ gilt $r \in I$ oder $s \in I$.
Wie sehen Primideale aus im Ring $\big(\mathscr{P}(S), +, \cdot\big)$?

(e) Sei $I \subseteq \mathscr{P}(S)$ ein Primideal im Ring $\big(\mathscr{P}(S), +, \cdot\big)$ mit $S \notin I$.
Zeige, dass $\mathscr{U} = \{x \subseteq S : (S \setminus x) \in I\}$ ein Ultrafilter über S ist.

Beweis:

(a) Sei $\mathbb{F}_2$ der Körper mit zwei Elementen. Schreibe $\triangle$ und $\cap$ für die Operationen auf $\mathscr{P}(S)$. Dann ist $\big(\mathscr{P}(S), \triangle, \cap\big)$ isomorph zum direkten Produkt $\big(\mathbb{F}_2^S, +, \cdot\big)$. Betrachte

$$\begin{aligned} j\colon \mathscr{P}(S) &\longrightarrow \mathbb{F}_2^S \\ A &\longmapsto \mathbb{1}_A \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \mathbb{1}_A\colon S &\longrightarrow \mathbb{F}_2 \\ s &\longmapsto \mathbb{1}_A(s) = \begin{cases} 1 & s \in A \\ 0 & s \notin A. \end{cases} \end{aligned}$$

Mit Wertetafeln lässt sich nun zeigen, dass $\mathbb{1}_{A \triangle B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B$ und $\mathbb{1}_{A \cap B} = \mathbb{1}_A \cdot \mathbb{1}_B$ allgemein gilt. Somit ist j ein Homomorphismus. Die Zuordnung $\mathbb{F}_2^S \ni f \mapsto f^{-1}(\{1\}) \in \mathscr{P}(S)$ definiert die Umkehrfunktion von j. Somit ist j sogar ein Isomorphismus.

(b) Durch Anwendung von j^{-1} (oder direkt in $\mathscr{P}(S)$) lässt sich sehen, dass $\varnothing$ die 0 und S die 1 ist.

(c) Ein (algebraisches) Ideal $I \subseteq \mathscr{P}(S)$ ist entweder ganz $\mathscr{P}(S)$ oder ein (mengentheoretisches) Ideal, d. h. I ist nicht trivial ($\varnothing \neq I \neq \mathscr{P}(S)$) und es gilt:

$$\forall A, B \in I\colon\ \forall D \subseteq A\colon\ (A \cup B \in I \quad \text{sowie} \quad D \in I). \tag{1}$$

Der Fall $I = \mathscr{P}(S)$ ist klar. Sei also $I \neq \mathscr{P}(S)$. Für ein algebraisches Ideal gilt $I \neq \varnothing$ und:

$$\forall A, B \in I\colon\ \forall C \in \mathscr{P}(S)\colon\ (A \triangle B \in I \quad \text{sowie} \quad C \cap A \in I). \tag{2}$$

Nun sind (**??**) und (**??**) äquivalent, denn einerseits gilt

$$A \triangle B \subseteq A \cup B \quad \text{sowie} \quad C \cap A \subseteq A,$$

und anderseits

$$A \cup B = A \triangle B \triangle (A \cap B) \quad \text{sowie} \quad D = D \cap A,$$

für alle Mengen quantifiziert wie in (**??**) und (**??**).

(d) Wir zeigen, dass ein Primideal $I \subseteq \mathscr{P}(S)$ entweder ganz $\mathscr{P}(S)$ ist oder ein maximales (Mengen-)Ideal. Der Fall $I = \mathscr{P}(S)$ ist klar. Wir wissen also bereits, dass I ein (Mengen-)Ideal ist. Weiter gilt für beliebige $A \subseteq S$, dass

$$A \cap (S \setminus A) = \varnothing \in I,$$

und somit ist entweder $A \in I$ oder $S \setminus A \in I$.
Ist I umgekehrt ein maximales (Mengen-)Ideal, $A, B \subseteq S$ beliebig mit $A \cap B \in I$. Dann gilt entweder $A \in I$ oder $(S \setminus A) \in I$ und somit

$$B \subseteq S \cap (B \cup (S \setminus A)) = (A \cap B) \cup (S \setminus A) \in I,$$

also $B \in I$.

(e) Mithilfe von (c) lassen sich aus den Idealeigenschaften von I die Filtereigenschaften von $\mathscr{U}$ zeigen. Mit (d) folgt aus der Maximalität des Ideals die Maximalität des Filters.