

Im Folgenden bezeichnet $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ die Menge der natürlichen Zahlen und \mathbb{N} das standard-Modell der Peano Arithmetik mit Bereich \mathbb{N} ; das heisst $\mathbb{N} = \{\mathbb{N}, 0^{\mathbb{N}}, +^{\mathbb{N}}, \cdot^{\mathbb{N}}\}$.

32. Sei $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ ein Ultrafilter über \mathbb{N} welcher den Fréchet-Filter enthält. Weiter sei \mathbb{N}^* das Ultraprodukt (bzw. die Ultrapotenz) bezüglich \mathcal{U} der \mathcal{L}_{PA} -Struktur \mathbb{N} .

- (a) Zeige, dass \mathbb{N}^* ein überabzählbares Modell von PA ist.
- (b) Zeige, dass die Modelle \mathbb{N}^* und \mathbb{N} elementar äquivalent sind.

Beweis:

(a) Angenommen, \mathbb{N}^* wäre abzählbar. Sei $\mathbb{N}^* = \{\bar{a}_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ eine Abzählung. Für jedes $i \in \mathbb{N}$ sei $a_i: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ein Repräsentant von \bar{a}_i und definiere

$$a_\omega: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}, n \longmapsto \max\{a_i(n)\}_{i=0}^n + 1.$$

Dann gälte $\bar{a}_\omega \in \mathbb{N}^*$ nach Konstruktion, aber für alle $\bar{a} \in \mathbb{N}^*$ hätten wir $\bar{a}_\omega > \bar{a}$, insbesondere $\bar{a}_\omega > \bar{a}_\omega$, ein Widerspruch.

Also ist \mathbb{N}^* überabzählbar.

(b) Nach dem SATZ VON ŁOŚ gilt für jeden \mathcal{L}_{PA} -Satz σ :

$$\mathbb{N}^* \models \sigma \Leftrightarrow A_\sigma = \{n \in \mathbb{N} \mid \mathbb{N} \models \sigma\} \in \mathcal{U}.$$

Da aber \mathbb{N} nicht von $n \in \mathbb{N}$ abhängt, haben wir $A_\sigma \in \{\emptyset, \mathbb{N}\}$ und $A_\sigma \in \mathcal{U} \Leftrightarrow A_\sigma = \mathbb{N} \Leftrightarrow \mathbb{N} \models \sigma$. Das heisst $\mathbb{N}^* \models \sigma \Leftrightarrow \mathbb{N} \models \sigma$, was zu beweisen war.

33. Sei $\mathcal{L}_{PA^*} := \mathcal{L}_{PA} \cup \{c\}$ und für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei φ_n der \mathcal{L}_{PA^*} -Satz

$$\underbrace{s \dots s}_{n\text{-mal}} 0 < c.$$

Weiter sei $PA^* := PA \cup \{\varphi_n : n \in \mathbb{N}\}$.

- (a) Zeige, dass die \mathcal{L}_{PA^*} -Theorie PA^* konsistent ist.
- (b) Da die Signatur \mathcal{L}_{PA^*} abzählbar ist, hat PA^* ein abzählbares Modell \mathbb{N}^* . Beschreibe die Ordnungsstruktur dieses Modells \mathbb{N}^* .

Beweis:

- (a) Sei $T^* \subseteq PA^*$ eine endliche Teiltheorie. Sei $m := \max\{n \in \mathbb{N} \mid \varphi_n \in T^*\}$. Dann ist $\mathbb{N} \models T^*$ für $c^{\mathbb{N}} = m + 1$, beispielsweise. Da T^* beliebig war, haben wir $\text{Con}(PA) \Rightarrow \text{Con}(PA^*)$.
- (b) Wir zeigen, dass \mathbb{N}^* dieselbe Ordnungstruktur besitzt wie $\mathbb{N} \sqcup \bigsqcup_{q \in \mathbb{Q}} \mathbb{Z}$. Dazu identifizieren wir den Bereich von \mathbb{N} mit dem Anfangsabschnitt von \mathbb{N}^* . Für $m \in \mathbb{N}^* \setminus \mathbb{N}$ gibt es $sm, ssm, sssm$ usw. und da $m \neq 0$, besitzt es einen Vorgänger, da $m \neq 1$, besitzt dieser wiederum einen Vorgänger usw. Entsprechend befindet sich m in einer Kopie von \mathbb{Z} . Seien nun $m, n \in \mathbb{N}^* \setminus \mathbb{N}$ so, dass $\exists d(m + d = n)$. Wenn $d \in \mathbb{N}$, dann befinden sich m und n in derselben Kopie von \mathbb{Z} . Wenn nicht, dann befindet sich $\lceil \frac{m+n}{2} \rceil$ in einer Kopie von \mathbb{Z} , die zwischen dem \mathbb{Z} von m und dem \mathbb{Z} von n liegt. Mithilfe von $\lceil \frac{m}{2} \rceil$ und $2n$ können wir analog zeigen, dass die Kopien von \mathbb{Z} dicht linear angeordnet sind – wegen der Abzählbarkeit von \mathbb{N}^* also wie \mathbb{Q} .

34. Seien \mathcal{L}_{PA^*} und PA^* wie in Aufgabe 33. Zu PA^* fügen wir nun alle \mathcal{L}_{PA} -Sätze σ hinzu, für die gilt: $\mathbb{N} \models \sigma$. Die so erhaltene Theorie sei PA^{**}

- (a) Zeige, dass die \mathcal{L}_{PA^*} -Theorie PA^{**} konsistent ist.
- (b) Sei \mathbb{N}^{**} ein abzählbares Modell von PA^{**} . Sind die Modelle \mathbb{N}^{**} und \mathbb{N} als Modelle von PA isomorph oder zumindest elementar äquivalent?

Beweis:

- (a) Analog zur vorherigen Aufgabe ist \mathbb{N} ein Modell für jede endliche Teiltheorie von PA^{**} , woraus dessen Konsistenz folgt.
- (b) Die Modelle können nicht isomorph sein, da sie nicht-isomorphe Ordnungstypen haben. Sie sind allerdings elementar äquivalent, denn es gilt

$$\mathbb{N} \models \sigma \Rightarrow \sigma \in PA^{**} \Rightarrow \mathbb{N}^{**} \models \sigma$$

und

$$\mathbb{N} \not\models \sigma \Rightarrow \mathbb{N} \models \neg\sigma \Rightarrow \mathbb{N}^{**} \models \neg\sigma \Rightarrow \mathbb{N}^{**} \not\models \sigma.$$

35. Zeige, dass es überabzählbar viele paarweise nicht-isomorphe abzählbare Modelle von PA gibt, welche alle elementar äquivalent zu \mathbb{N} sind.

Beweis:

Sei $\mathbb{P} \subseteq \mathbb{N}$ die Menge aller (Standard-)Primzahlen. Für jedes $p \in \mathbb{P}$ sei ψ_p der $\mathcal{L}_{\text{PA}^*}$ -Satz $p \mid c$. Für jede Teilmenge $P \subseteq \mathbb{P}$ setze

$$\text{PA}_P^* := \text{PA}^* \cup \{\psi_p \mid p \in P\} \cup \{\neg\psi_p \mid p \notin P\},$$

sei $\text{PA}_P^{**} := \text{PA}_P^* \cup \text{PA}^{**}$ und sei $\mathbb{N}_P^{**} \models \text{PA}_P^{**}$ ein abzählbares Modell. Dann gilt insbesondere $\mathbb{N}_P^{**} \models \text{PA}$.

Gewisse dieser Modelle können isomorph zueinander sein. (Alle sind nach Konstruktion elementar äquivalent zu \mathbb{N} .)

Allerdings gibt es überabzählbar viele Isomorphieklassen. Sind nämlich $M_1, M_2 \in \{\mathbb{N}_P^{**} \mid P \subseteq \mathbb{P}\}$ isomorph, aber verschieden, so gilt für einen Isomorphismus

$$f: M_1 \longrightarrow M_2,$$

dass $f(c^{M_1}) \neq c^{M_2}$. Da alle betrachteten Modelle abzählbar sind, kann ein einzelnes also nur zu abzählbar vielen anderen Modellen isomorph sein.

Somit erhalten wir überabzählbar viele nicht-isomorphe Modelle von PA, die elementar äquivalent zu \mathbb{N} sind.