Die Gödel'schen Sätze

Serie 9

endliche Modelle & Modelle von PA

Musterlösung

---

36. (a) Zeige: Eine Theorie erster Stufe mit beliebig grossen endlichen Modellen hat beliebig grosse unendliche Modelle.

(b) Zeige: Hat eine Theorie erster Stufe nur endliche Modelle, so hat diese Theorie ein grösstes Modell.

(c) Begründe: Die Theorie der endlichen Körper lässt sich nicht in der Logik erster Stufe ausdrücken.

Lösung:

(a) Sei T die besagte Theorie. Dann gibt es für jedes n in $\mathbb{N}$ ein Modell $\mathbf{M}_n \models \mathsf{T}$ mit $|\mathbf{M}_n| \geq n$.
Sei weiter μ eine Kardinalzahl, $C := \{c_\lambda \,|\, \lambda \in \mu\}$ eine Menge von Konstantensymbolen, $\mathscr{L}_{\mathsf{T}_\mu}$ die Sprache $\mathscr{L}_{\mathsf{T}} \cup C$, sei $\varphi_{\kappa\lambda}$ der Satz $c_\kappa \neq c_\lambda$ und T_μ die $\mathscr{L}_{\mathsf{T}_\mu}$-Theorie $\mathsf{T} \cup \{\varphi_{\kappa\lambda}\}_{\kappa\neq\lambda}^{\kappa,\lambda\in\mu}$.
Für jedes $\mathsf{T}_n \subseteq \mathsf{T}_\mu$ mit $|\mathsf{T}_n| = n$ gilt nun $\mathbf{M}_n \models \mathsf{T}_n$. Nach dem Kompaktheitssatz auf Modellebene gibt es also ein Modell $\mathbf{M}_\mu \models \mathsf{T}_\mu$. Dessen Bereich muss mindestens Kardinalität μ haben, um alle Sätze in $\{\varphi_{\kappa\lambda}\}_{\kappa\neq\lambda}^{\kappa,\lambda\in\mu}$ wahr zu machen.

(b) Dies ist im Wesentlich die Kontraposition von (a).

(c) Dies ist eine Anwendung von (a). Gemäss (a) müsste es unendliche Modelle dieser Theorie geben, also "unendliche endliche Körper".

37. Sei $\mathscr{U} \subseteq \mathscr{P}(\mathbb{N})$ ein Ultrafilter über $\mathbb{N}$ welcher den Fréchet-Filter enthält. Weiter sei $\mathbb{N}^\star$ das Ultraprodukt (*bzw.* die Ultrapotenz) bezüglich $\mathscr{U}$ der $\mathscr{L}_{\mathsf{PA}}$-Struktur $\mathbb{N}$. Schliesslich sei $\mathbb{P}$ die Menge aller Primzahlen im standard-Modell $\mathbb{N}$.

(a) Zeige, dass es im Modell $\mathbb{N}^\star$ für jede Teilmenge $P \subseteq \mathbb{P}$ eine Zahl c_P gibt, so dass gilt:

$$p \mid c_P \quad \text{gdw.} \quad p \in P$$

(b) Zeige, dass der Bereich von $\mathbb{N}^\star$ die Kardinalität $2^{\aleph_0}$ hat, wobei $2^{\aleph_0} := |\mathscr{P}(\mathbb{N})|$ und $|\mathscr{P}(\mathbb{N})| = |\mathbb{R}|$.

Lösung:

(a) Für $P \subseteq \mathbb{P}$ endlich gibt es so ein c_P bereits im Grundmodell, z. B.

$$c_P = \prod_{p\in P} p.$$

Sei also $P \subseteq \mathbb{P}$ unendlich und $P = \{p_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ die eindeutige aufsteigende Abzählung von P. Betrachte die Folge $a_P \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}, n \mapsto \prod_{i=0}^{n} p_i$ und setze $c_P := \overline{a_P}$. Nun gilt:

$$p \in P \;\Leftrightarrow\; \exists i \in \mathbb{N} \colon\; p = p_i \;\Leftrightarrow\; \big\{n \in \mathbb{N} \;\big|\; p \mid a_P(n)\big\} \in \mathscr{U} \;\Leftrightarrow\; p \mid c_P.$$

(b) Für die eine Richtung der Ungleichung betrachte:

$$|\mathbb{N}^\star| \leq |\mathrm{Abb}(\mathbb{N})| \leq |\mathrm{Rel}(\mathbb{N})| = |\mathscr{P}(\mathbb{N}^2)| = 2^{|\mathbb{N}^2|} = 2^{|\mathbb{N}|} = 2^{\aleph_0}$$

Für die andere Richtung betrachte zwei verschiedene Teilmengen P, Q von $\mathbb{P}$. Da sich a_P und a_Q an allen bis auf endlich vielen Stellen unterscheiden, gilt $c_P \neq c_Q$. Also:

$$|\mathbb{N}^\star| \geq |\{c_P \mid P \subseteq \mathbb{P}\}| = |\mathscr{P}(\mathbb{P})| = |\mathscr{P}(\mathbb{N})| = 2^{\aleph_0}$$

38. Beschreibe die Ordnungsstruktur des Modells aus Aufgabe 37.

Zeige dazu, dass zwischen zwei Zahlen aus dem Bereich von $\mathbb{N}^\star$ entweder endlich viele oder überabzählbar viele Zahlen liegen.

Lösung:

Seien $\overline{i_0}$ und $\overline{i_1}$ in $\mathbb{N}^\star$. Ohne Einschränkung sei $\overline{i_0} < \overline{i_1}$. Wir identifizieren wiederum den Anfangsabschnitt von $\mathbb{N}^\star$ mit $\mathbb{N}$. Dann liegt $\overline{d} = \overline{i_1} - \overline{i_0}$ entweder in $\mathbb{N}$ oder in $\mathbb{N}^\star \setminus \mathbb{N}$.

Im ersten Fall liegen endlich viele Zahlen zwischen $\overline{i_0}$ und $\overline{i_1}$. Sei also $\overline{d} \in \mathbb{N}^\star \setminus \mathbb{N}$ und seien $i_0, i_1, d \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ Repräsentanten. Für $r \in (0,1)$ betrachte $i_r := i_0 + \lceil r \cdot d \rceil$.

Wir möchten nun das Folgende zeigen:

$$\forall r, s \in (0,1) \colon\; r < s \Rightarrow \overline{i_r} < \overline{i_s}$$

Da $\overline{d}$ in $\mathbb{N}^\star \setminus \mathbb{N}$ liegt, gibt es für r und s wie oben ein $D \in \mathscr{U}$ so, dass die Teilfolge $d|_D$ gegen unendlich divergiert. Insbesondere:

$$\exists k \in D \colon\; \forall l \in D \colon\; l > k \Rightarrow d(l) > \frac{1}{s - r}$$

Das heisst $\forall k \in D_{>l} \colon\; i_r < i_s$, also $\overline{i_r} < \overline{i_s}$.

Daraus folgt auch, was zu zeigen war.

39. Zeige, dass das Modell aus Aufgabe 37 folgende Eigenschaft hat.

Ist $\langle a_n^\star : n \in \mathbb{N}\rangle$ eine Folge von Zahlen in $\mathbb{N}^\star$ (nicht notwendigerweise Zahlen aus $\mathbb{N}$), so gibt es in $\mathbb{N}^\star$ eine Zahl $c^\star$ für die gilt:

$$\forall n \in \mathbb{N}(c^\star > a_n^\star)$$

Lösung:

Sei c_n ein Repräsentant von $a_n^\star$ und sei

$$c_\omega \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}, n \mapsto \max\{c_i(n)\}_{i=0}^n + 1.$$

Dann gilt für $c^\star := \overline{c_\omega}$:

$$\forall n \in \mathbb{N}(c^\star > a_n^\star)$$