Die Gödel'schen Sätze

Serie 11

Definitionen

Musterlösung

41. Zeige, dass gilt:

$$\mathsf{PA} \vdash \operatorname{coprime}(x, y) \leftrightarrow \forall z < \mathrm{s}x(z \mid x \wedge z \mid y \to z = 1)$$

Lösung:
Gemäss Vorlesung bezeichnen wir mit $\operatorname{coprime}(x, y)$, dass gilt:

$$\forall w\,(x \mid yw \to x \mid w)$$

'$\rightarrow$' Kontraposition:

$$\exists\, z \leq x\,(z \mid x \wedge z \mid y \wedge z \neq 1) \;\to\; \exists\, m, n\,(mz = x \wedge nz = y \wedge m < x \wedge n < y),$$

woraus folgt, dass $x \mid ym \wedge x \nmid m$, also $\neg \operatorname{coprime}(x, y)$.

'$\leftarrow$' Kontraposition:

$$\exists\, w \in \mathbb{N}\,(x \mid yw \wedge x \nmid w) \;\to\; \exists\, p \in \mathbb{P}\,(p \mid x \wedge p \mid y \wedge p \nmid w)$$

und natürlich gilt $p \leq x$, also folgt $\exists\, z = p \leq x\,(z \mid x \wedge z \mid y \wedge z \neq 1)$.

42. Sei $\psi_2(y)$ die $\mathscr{L}_{\mathsf{PA}}$-Formel

$$\psi_2(y) \equiv y = \mathrm{ss}0\,.$$

Zeige mit Hilfe der logischen Axiomen und den Tautologien, dass gilt:

$$\mathsf{PA} \vdash \exists y\big(\psi_2(y) \wedge \big(\forall x(\psi_2(x) \to x = y)\big)$$

Das heisst: $\mathsf{PA} \vdash \exists! y\, \psi_2(y)$.

Beweis:

L_{14}	$\psi_2(\mathrm{ss}0) \;\equiv\; (\mathrm{ss}0 = \mathrm{ss}0)$
(A.1)	$\psi_2(x) \to \psi_2(x) \;\equiv\; \psi_2(x) \to (x = \mathrm{ss}0)$
$(\forall)$	$\forall x\big(\psi_2(x) \to (x = \mathrm{ss}0)\big)$
L_5 + MP + MP	$\psi_2(\mathrm{ss}0) \wedge \forall x\big(\psi_2(x) \to (x = \mathrm{ss}0)\big)$
L_{11} + MP	$\exists y\big(\psi_2(y) \wedge \forall x\big(\psi_2(x) \to (x = y)\big)\big)$

43. Wir erweitern die Sprache der Peano Arithmetik durch Hinzufügen der Konstantensymbole "1" & "2" welche wie folgt definiert sind:

$$1 := \mathtt{s0} \qquad \text{und} \qquad 2 := \mathtt{ss0}$$

Transformiere den Satz

$$1 + 1 = 2$$

in die Sprache der Peano Arithmetik.

Lösung:

Definiere ψ_2 wie oben und ψ_1 analog. Dann erhalten wir:

$$\exists w_1 \exists w_2 \big(\psi_1(w_1) \wedge \psi_2(w_2) \wedge w_1 + w_1 = w_2 \big)$$

44. Erweitere die Sprache der Peano Arithmetik durch Hinzufügen des 1-stelligen Funktionssymbols "quad(x)" welche als "Quadrieren" definiert ist und transformiere den Satz

$$\neg \exists x \big(\text{quad}(x) = 2 \big)$$

in die Sprache der Peano Arithmetik (wobei die Konstante 2 wie oben definiert ist).

Lösung:

$$\neg \exists x \exists w_2 \big(\psi_2(w_2) \wedge x \cdot x = w_2 \big)$$