

Die Gödel'schen Sätze

Serie 0

Terme & Formeln

Musterlösung

0. Es sei F_1 ein 1-stelliges, F_2 ein 2-stelliges, und F_3 ein 3-stelliges Funktionssymbol. Weiter sei R_2 ein 2-stelliges Relationssymbol, c sei ein Konstantensymbol, und x, y, z seien Variablen.
- (a) Welche der folgenden Zeichenketten sind Terme, welche Formeln, und welche Zeichenketten sind syntaktisch inkorrekt?
- $F_3x F_3y F_3z F_2x F_1zzcc$
 - $\neg\neg\neg\exists x\neg((y = F_3x F_1y) \vee (x = x))$
 - $\forall x\neg(c = x) \vee \exists c(c = x)$
 - $\neg\neg\forall y R_2 F_3 F_2 F_1 c x x x x \vee \forall y(x = c)$
 - $\forall x\neg\exists x\forall x\neg(F_2y F_3x F_1cz = c \wedge \exists x R_2zy)$
 - $\forall x\neg\forall x\exists x(\neg R_2 F_1xx \vee \neg(F_2 F_3 F_2 F_2 x x x x = y))$
- (b) Wie sind die obigen, syntaktisch korrekten, Terme und Formeln aufgebaut?

Lösung:

- (a)
- Term $F_3(x, F_3(y, F_3(z, F_2(x, F_1(z))), z), c), c$
 - inkorrekt (Das Funktionssymbol F_3 erhält nur 2 Argumente.)
 - inkorrekt (Der Quantor \exists steht vor dem Konstantensymbol c .)
 - Formel $\neg\neg\forall y R_2(F_3(F_2(F_1(c), x), x, x), x) \vee \forall y(x = c))$
 - Formel $\forall x\neg\exists x\forall x\neg(F_2(y, F_3(x, F_1(c), z)) = c \wedge \exists x R_2(z, y))$
 - inkorrekt (Die erste Instanz des Funktionssymbols F_2 erhält nur 1 Argument.)
- (b) Mit (T0) sind x, y , und z Terme. Mit (T1) ist c ein Term. Nun können wir wiederholt (T2) anwenden.
Die Terme in den Formeln werden wiederum analog gebildet. Mit (F0) sind $F_2y F_3x F_1cz = c$ und $x = c$ Formeln. Mit (F1) sind $R_2 F_3 F_2 F_1 c x x x x$ und $R_2 z y$ Formeln. Nun können wir wiederholt (F2), (F3) bzw. (F4) anwenden.
1. Bei der folgenden Zeichenkette (mit F_2, R_2, c wie in Aufgabe 0) fehlen die Klammern:

$$\forall z\forall x\neg F_2xx = y \wedge \forall y\neg R_2zc \vee y = x \wedge \forall x R_1 F_2cx$$

- (a) Setze auf zwei verschiedene Arten Klammern in die Zeichenkette, und zwar so, dass zwei Formeln φ & ψ entstehen bei denen die Menge der *freien* Variablen unterschiedlich sind.
Definition: Eine Variable heisst *frei* in einer Formel, wenn sie nicht im Wirkungsbereich eines Quantors ist; wobei eine Variable in einer Formel sowohl *frei* als auch *gebunden* vorkommen kann.

- (b) Schreibe diese beiden Formeln φ & ψ in polnischer Notation.

Beispiel-Lösung:

- (a) Zum Beispiel:

$$\varphi := ((\forall z \forall x \neg F_2 x x = y) \wedge (\forall y (\neg R_2 z c \vee y = x))) \wedge (\forall x R_1 F_2 c x)$$

$$\psi := \forall z \forall x ((\neg F_2 x x = y \wedge \forall y \neg R_2 z c) \vee y = x) \wedge \forall x R_1 F_2 c x$$

Dann kommt x frei in φ vor, aber nicht in ψ .

- (b) Es gilt:

$$\varphi \equiv \wedge \wedge \forall z \forall x \neg = F_2 x x y \forall y \vee \neg R_2 z c = y x \forall x R_1 F_2 c x$$

$$\psi \equiv \forall z \forall x \wedge \vee \wedge \neg = F_2 x x y \forall y \neg R_2 z c = y x \forall x R_1 F_2 c x$$

2. Finde eine Signatur der folgenden Theorien bzw. algebraischen Strukturen.

- (a) Ringtheorie
- (b) Boole'sche Algebren
- (c) Vektorräume

Beispiel-Lösung:

- (a) Zum Beispiel $\{+, \cdot\}$, beides zweistellige Funktionssymbole. (Die Existenz der Konstanten 0 und 1 kann durch Axiome garantiert werden.)
- (b) Zum Beispiel $\{\text{nand}\}$ oder $\{\text{nor}\}$, jeweils ein zweistelliges Funktionssymbol.
- (c) Zum Beispiel $\{V, R_+, R_\circ\}$, ein einstelliges und zwei dreistellige Relationssymbole, wie folgt definiert:
 - i. Die Relation $V(a)$ ist genau dann erfüllt, wenn a ein Vektor ist. Ansonsten ist a ein Körperelement/Skalar.
 - ii. Die Relation $R_+(a, b, c)$ ist genau dann erfüllt, wenn a, b und c entweder alles Skalare oder alles Vektoren sind und c die Summe von a und b ist.
 - iii. Die Relation $R_\circ(a, b, c)$ ist genau dann erfüllt, wenn a, b und c entweder alles Skalare oder a ein Skalar, hingegen b und c Vektoren sind und c das Produkt von a und b ist.