

Die Gödel'schen Sätze

Serie 4

Modelle & formale Beweise

Musterlösung

18. Beweise formal die folgende Tautologie:

$$\vdash \exists x\varphi \rightarrow \neg\forall x\neg\varphi$$

Hinweise: Mit L_{10} haben wir $\forall x\neg\varphi \rightarrow \neg\varphi$. Ferner wurde in Aufgabe 6.(c) gezeigt:

$$\vdash (\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow (\psi \rightarrow \neg\varphi)$$

Lösung:

Wir verwenden einige Resultate aus Aufgabe 6, um den Beweis etwas abzukürzen:

$$L_{10} \quad \forall x\neg\varphi \rightarrow \neg\varphi$$

$$6.(b) \quad (\forall x\neg\varphi \rightarrow \neg\varphi) \rightarrow (\neg\neg\varphi \rightarrow \neg\forall x\neg\varphi)$$

$$MP \quad \neg\neg\varphi \rightarrow \neg\forall x\neg\varphi$$

$$6.(d) \quad \varphi \rightarrow \neg\neg\varphi$$

$$6.(a) \quad \varphi \rightarrow \neg\forall x\neg\varphi$$

$$(\forall) \quad \forall x(\varphi \rightarrow \neg\forall x\neg\varphi)$$

$$L_{13} \quad \forall x(\varphi \rightarrow \neg\forall x\neg\varphi) \rightarrow (\exists x\varphi \rightarrow \neg\forall x\neg\varphi)$$

$$MP \quad \exists x\varphi \rightarrow \neg\forall x\neg\varphi$$

19. Die \mathcal{L} -Formeln φ_{11} und φ_{13} seien Instantiierungen der logischen Axiome L_{11} bzw. L_{13} . Weiter sei \mathbf{M} ein Modell einer \mathcal{L} -Theorie.

Zeige, dass gilt:

$$\mathbf{M} \models \varphi_{11} \quad \text{und} \quad \mathbf{M} \models \varphi_{13}$$

Lösung:

Sei A der Bereich von \mathbf{M} , j eine beliebige Variablen-Belegung und $\mathbf{I} = (\mathbf{M}, j)$ die entsprechende \mathcal{L} -Interpretation.

Nach geeigneten Umformungen bleibt für $\mathbf{M} \models \varphi_{11}$ zu zeigen, dass gilt:

$$\text{IF } \mathbf{I} \models \varphi(\tau) \text{ THEN THERE EXISTS } a \text{ IN } A: \mathbf{I} \frac{a}{\nu} \models \varphi(\nu).$$

Dies lässt sich erreichen, indem wir $a = \mathbf{I}(\tau)$ wählen.

Die Umformung in der zweiten Teilaufgabe ist aufwendiger, aber nicht schwieriger.

20. Sei \mathcal{L} eine abzählbare Signatur und \mathbb{T} eine Menge von \mathcal{L} -Sätzen. Für jede konsistente Menge $\Phi \subseteq \mathbb{T}$ von \mathcal{L} -Sätzen sei \mathbf{M}_Φ ein Modell für Φ , also $\mathbf{M}_\Phi \models \Phi$. Ferner sei

$$\Sigma := \{ \mathbf{M}_\Phi : \Phi \subseteq \mathbb{T} \text{ und } \text{Con}(\Phi) \}$$

und für jeden \mathcal{L} -Satz φ sei

$$X_\varphi := \{ \mathbf{M} \in \Sigma : \mathbf{M} \models \varphi \}.$$

- Zeige, dass die Mengen X_φ die Basis einer Topologie auf Σ bilden.
- Zeige, dass jede Menge X_φ abgeschlossen ist.
- Zeige mit dem Kompaktheitssatz, dass jede offene Überdeckung von Σ eine endliche Teilüberdeckung enthält (*d.h.* der topologische Raum Σ ist kompakt).

Beweis:

- Zwei Dinge sind zu zeigen:

- Die X_φ überdecken ganz Σ .
- Für beliebige X_φ, X_χ sowie beliebiges $\mathbf{M} \in X_\varphi \cap X_\chi$ gibt es X_ρ so, dass $\mathbf{M} \in X_\rho$.

Die erste Aussage folgt aus $X_\varphi \cup X_{\neg\varphi} = \Sigma$ für einen beliebigen \mathcal{L} -Satz φ . Die zweite Aussage folgt aus $X_\varphi \cap X_\chi = X_{\varphi \wedge \chi}$.

- Es gilt für einen beliebigen \mathcal{L} -Satz φ :

$$X_\varphi = \Sigma \setminus X_{\neg\varphi}$$

- Sei $\bigcup_{i \in I} A_i = \Sigma$ eine beliebige offene Überdeckung. Wir führen einen Widerspruchsbeweis: Angenommen, es gibt keine endliche Teilmenge $J \subseteq I$ so, dass $\bigcup_{j \in J} A_j = \Sigma$.

$$\forall J \subseteq I \text{ endlich: } \bigcup_{j \in J} A_j \neq \Sigma \tag{1}$$

$$\forall J \subseteq I \text{ endlich: } \bigcap_{j \in J} \Sigma \setminus A_j \neq \emptyset$$

Da die $\Sigma \setminus A_j$ abgeschlossen sind und da die X_φ auch eine Basis der abgeschlossenen Mengen bilden, gibt es eine Menge von \mathcal{L} -Sätzen Φ_j so, dass $\Sigma \setminus A_j = \bigcap_{\varphi \in \Phi_j} X_\varphi$. Sei $\Phi = \bigcup_{i \in I} \Phi_i$. Dann folgt aus (1) insbesondere:

$$\forall \Phi' \subseteq \Phi \text{ endlich: } \bigcap_{\varphi \in \Phi'} X_\varphi \neq \emptyset$$

$$\forall \Phi' \subseteq \Phi \text{ endlich: } \exists \mathbf{M}' \in \bigcap_{\varphi \in \Phi'} X_\varphi$$

$$\forall \Phi' \subseteq \Phi \text{ endlich: } \exists \mathbf{M}' \models \Phi'$$

Daraus folgt aber, mit dem semantischen Kompaktheitssatz, dass es ein Modell \mathbf{M} für Φ gibt. Dies bedeutet wiederum, dass $\bigcap_{i \in I} \Sigma \setminus A_i = \bigcap_{\varphi \in \Phi} X_\varphi \neq \emptyset$, im Widerspruch zu $\bigcup_{i \in I} A_i = \Sigma$.

21. Sei $\mathcal{L} = \{\mathbf{e}, \circ\}$ die Sprache der Gruppentheorie. Die \mathcal{L} -Theorie T bestehe aus folgenden drei \mathcal{L} -Sätzen:

- $\forall x \forall y \forall z (x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z)$
- $\forall x (\mathbf{e} \circ x = x)$
- $\forall x \exists y (x \circ y = \mathbf{e})$

Zeige: $\mathsf{T} \not\models \forall x (x \circ \mathbf{e} = x) \vee \forall x \exists y (y \circ x = \mathbf{e})$

Lösung:

Betrachte ein Modell \mathbf{M} mit Bereich $\{a, b\}$ und:

$$\begin{array}{c|cc} \circ & a & b \\ \hline a & a & b \\ b & a & b \end{array}$$

Dann haben wir $\mathbf{e}^{\mathbf{M}} = a$ und alle Axiome sind erfüllt. Ausserdem gilt

$$b \circ a = a \wedge \forall y (y \circ b = b),$$

was zu zeigen war.