

28. Zeige mit Aufgabe 23.(b), dass die Theorie der dichten linearen Ordnungen vollständig ist; d.h. für alle \mathcal{L}_{DLO} -Sätze σ gilt:

$$\text{entweder } \text{DLO} \vdash \sigma \quad \text{oder} \quad \text{DLO} \vdash \neg\sigma$$

Bemerkung:

Wir nehmen $\text{Con}(\text{DLO})$ an.

Beweis:

Angenommen, es gäbe einen \mathcal{L}_{DLO} -Satz σ mit

$$\text{DLO} \not\vdash \sigma \quad \text{und} \quad \text{DLO} \not\vdash \neg\sigma.$$

Dann existierten abzählbare Modelle $\mathbf{M} \models \text{DLO} + \neg\sigma$ und $\mathbf{N} \models \text{DLO} + \sigma$. Da $\mathbf{M} \models \neg\sigma$, während $\mathbf{N} \models \sigma$, wären \mathbf{M} und \mathbf{N} nicht elementar äquivalent, also insbesondere nicht isomorph. Dies wäre jedoch ein Widerspruch zu Aufgabe 23.(b).

Ausserdem folgt aus $\text{Con}(\text{DLO})$, dass nicht sowohl $\text{DLO} \vdash \sigma$ als auch $\text{DLO} \vdash \neg\sigma$ gelten kann.

29. Sei S eine unendliche Menge und sei $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(S)$ ein Ultrafilter welcher alle co-endlichen Teilmengen von S enthält.

Zeige, dass \mathcal{U} keine endlichen Mengen enthält.

Beweis:

Angenommen, \mathcal{U} enthielte die endliche Menge x . Dann ist $S \setminus x \in \mathcal{U}$ nach Voraussetzung und $\emptyset = x \cap (S \setminus x) \in \mathcal{U}$ nach Filtereigenschaft. Dies wäre allerdings ein Widerspruch zur Definition eines Filters.

30. Sei S eine Menge und sei $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(S)$ ein Ultrafilter.

- (a) Zeige: Enthält \mathcal{U} eine endliche Menge, so ist \mathcal{U} ein Hauptultrafilter.
(b) Zeige, dass für alle Mengen $x, y \in \mathcal{P}(S)$ mit $y \subseteq x \in \mathcal{U}$ gilt:

$$\text{entweder } y \in \mathcal{U} \quad \text{oder} \quad (x \setminus y) \in \mathcal{U}$$

Beweis:

- (b) Entweder $y \in \mathcal{U}$ und es folgt $(x \setminus y) \notin \mathcal{U}$ analog zur vorherigen Aufgabe.
 Oder $y \notin \mathcal{U}$, dann folgt $(S \setminus y) \in \mathcal{U}$, da \mathcal{U} ein Ultrafilter ist. Also gilt auch $(x \setminus y) = x \cap (S \setminus y) \in \mathcal{U}$ wegen der Durchschnittseigenschaft von Filtern.
- (a) Sei $x \in \mathcal{U}$ endlich. Entweder $|x| = 1$ oder es existiert y mit $\emptyset \subsetneq y \subsetneq x$ und somit auch $\emptyset \subsetneq (x \setminus y) \subsetneq x$. Dann gilt nach (b), dass entweder $y \in \mathcal{U}$ oder $(x \setminus y) \in \mathcal{U}$. Es gibt also $x_1 \subsetneq x$ mit $x_1 \in \mathcal{U}$.
 Nach endlich vielen Schritten erhalten wir $x_n \in \mathcal{U}$ mit $|x_n| = 1$. Dieses x_n erzeugt \mathcal{U} .

31. Sei S eine nicht-leere Menge. Auf $\mathcal{P}(S)$ definieren wir zwei binäre Operationen wie folgt:

$$x \cdot y := x \cap y \quad \text{und} \quad x + y := (x \setminus y) \cup (y \setminus x)$$

- (a) Zeige, dass $(\mathcal{P}(S), +, \cdot)$ ein kommutativer Ring ist.
- (b) Welche Menge ist die 0, und welche Menge ist die 1 im Ring $(\mathcal{P}(S), +, \cdot)$?
- (c) Wie lassen sich Ideale im Ring $(\mathcal{P}(S), +, \cdot)$ charakterisieren?
- (d) Ein Ideal I in einem Ring R heisst *Primideal*, falls für alle $r, s \in R$ mit $r \cdot s \in I$ gilt $r \in I$ oder $s \in I$.
 Wie sehen Primideale aus im Ring $(\mathcal{P}(S), +, \cdot)$?
- (e) Sei $I \subseteq \mathcal{P}(S)$ ein Primideal im Ring $(\mathcal{P}(S), +, \cdot)$ mit $S \notin I$.
 Zeige, dass $\mathcal{U} = \{x \subseteq S : (S \setminus x) \in I\}$ ein Ultrafilter über S ist.

Beweis:

- (a) Sei \mathbb{F}_2 der Körper mit zwei Elementen. Schreibe Δ und \cap für die Operationen auf $\mathcal{P}(S)$. Dann ist $(\mathcal{P}(S), \Delta, \cap)$ isomorph zum direkten Produkt $(\mathbb{F}_2^S, +, \cdot)$.

Betrachte

$$\begin{aligned} j: \mathcal{P}(S) &\longrightarrow \mathbb{F}_2^S & \mathbb{1}_A: S &\longrightarrow \mathbb{F}_2 \\ A &\longmapsto \mathbb{1}_A & s &\longmapsto \mathbb{1}_A(s) = \begin{cases} 1 & s \in A \\ 0 & s \notin A. \end{cases} \end{aligned}$$

Mit Wertetafeln lässt sich nun zeigen, dass $\mathbb{1}_{A \Delta B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B$ und $\mathbb{1}_{A \cap B} = \mathbb{1}_A \cdot \mathbb{1}_B$ allgemein gilt. Somit ist j ein Homomorphismus. Die Zuordnung $\mathbb{F}_2^S \ni f \mapsto f^{-1}(\{1\}) \in \mathcal{P}(S)$ definiert die Umkehrfunktion von j . Somit ist j sogar ein Isomorphismus.

- (b) Durch Anwendung von j^{-1} (oder direkt in $\mathcal{P}(S)$) lässt sich sehen, dass \emptyset die 0 und S die 1 ist.
- (c) Ein (algebraisches) Ideal $I \subseteq \mathcal{P}(S)$ ist entweder ganz $\mathcal{P}(S)$ oder ein (mengen-theoretisches) Ideal, d. h. I ist nicht trivial ($\emptyset \neq I \neq \mathcal{P}(S)$) und es gilt:

$$\forall A, B \in I: \forall D \subseteq A: (A \cup B \in I \quad \text{sowie} \quad D \in I). \quad (1)$$

Der Fall $I = \mathcal{P}(S)$ ist klar. Sei also $I \neq \mathcal{P}(S)$. Für ein algebraisches Ideal gilt $I \neq \emptyset$ und:

$$\forall A, B \in I: \forall C \in \mathcal{P}(S): (A \Delta B \in I \text{ sowie } C \cap A \in I). \quad (2)$$

Nun sind (1) und (2) äquivalent, denn einerseits gilt

$$A \Delta B \subseteq A \cup B \text{ sowie } C \cap A \subseteq A,$$

und andererseits

$$A \cup B = A \Delta B \Delta (A \cap B) \text{ sowie } D = D \cap A,$$

für alle Mengen quantifiziert wie in (1) und (2).

- (d) Wir zeigen, dass ein Primideal $I \subseteq \mathcal{P}(S)$ entweder ganz $\mathcal{P}(S)$ ist oder ein maximales (Mengen-)Ideal. Der Fall $I = \mathcal{P}(S)$ ist klar. Wir wissen also bereits, dass I ein (Mengen-)Ideal ist. Weiter gilt für beliebige $A \subseteq S$, dass

$$A \cap (S \setminus A) = \emptyset \in I,$$

und somit ist entweder $A \in I$ oder $S \setminus A \in I$.

Ist I umgekehrt ein maximales (Mengen-)Ideal, $A, B \subseteq S$ beliebig mit $A \cap B \in I$. Dann gilt entweder $A \in I$ oder $(S \setminus A) \in I$ und somit

$$B \subseteq S \cap (B \cup (S \setminus A)) = (A \cap B) \cup (S \setminus A) \in I,$$

also $B \in I$.

- (e) Mithilfe von (c) lassen sich aus den Idealeigenschaften von I die Filtereigenschaften von \mathcal{U} zeigen. Mit (d) folgt aus der Maximalität des Ideals die Maximalität des Filters.