Die Gödel'schen Sätze

Serie 8

Zum Auswahlaxiom

Musterlösung

32. Zeige, dass das Auswahlaxiom äquivalent ist zu folgenden Aussagen:

(a) Cartesische Produkte nicht-leerer Mengen sind nicht leer.

(b) Zu jeder Äquivalenzrelation existiert ein Repräsentantensystem.

(c)* Jeder Ring besitzt eine Quadratwurzelfunktion.

Beweis:

(a) Sei $\mathscr{F}$ eine Familie nicht-leerer Mengen.

Angenommen, es gibt eine Auswahlfunktion f auf $\mathscr{F}$. Dann ist $\langle f(x)\rangle_{x\in\mathscr{F}}$ ein Element im Cartesischen Produkt der Mengen in $\mathscr{F}$. Somit ist dieses nicht leer.

Angenommen, das Cartesische Produkte der Mengen in $\mathscr{F}$ ist nicht leer. Sei $\langle y_x\rangle_{x\in\mathscr{F}}$ ein Element darin. Dann definiert $f(x) = y_x$ eine Auswahlfunktion auf $\mathscr{F}$.

(b) Sei X eine Menge und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X. Dann ist die Menge der Äquivalenzklassen $\mathscr{F} := \{c \subseteq X \mid \exists y \in X \colon \forall z \in c \colon y \sim z\}$ eine Familie nicht-leerer Mengen.

Angenommen, es gibt eine Auswahlfunktion f auf $\mathscr{F}$, dann ist $\mathscr{R} := \{f(c) \mid c \in \mathscr{F}\}$ ein Repräsentantensystem von $\sim$.

Sei $\mathscr{F}$ eine Familie nicht-leerer Mengen, die ohne Einschränkung paarweise disjunkt sind. Für alle $y, z \in \bigcup\mathscr{F}$ definieren wir

$$y \sim z :\Longleftrightarrow \exists x \in \mathscr{F} : y, z \in x$$

Dann ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathscr{F}$.

Angenommen, es gibt ein Repräsentantensystem $\mathscr{R}$ von $\sim$. Dann enthält für jede Menge $x \in \mathscr{F}$ der Durschnitt $x \cap \mathscr{R}$ genau ein Element y_x und $f(x) = y_x$ definiert eine Auswahlfunktion auf $\mathscr{F}$.

(c) Eine Quadratwurzelfunktion ordnet jedem quadratischen Element eines Rings eine seiner Wurzeln zu. Mit dem Auswahlaxiom können wir die Existenz einer solchen Funktion garantieren.

Für die umgekehrte Implikation sei $\mathscr{F}$ eine Familie nicht-leerer Mengen. Wir beginnen unsere Konstruktion mit einem Polynomring über $\mathbb{Z}$, der alle Mengen aus $\mathscr{F}$ und deren Elemente als Variabeln enthält. Wir wollen erreichen, dass eine Menge $x \in \mathscr{F}$ genau alle Elemente $y \in x$ als Wurzeln besitzt. Dafür teilen wir den Polynomring durch ein Ideal, das alle Terme der Form $y^2 - x$ für $y \in x\mathscr{F}$ enthält.

Weitere Details finden sich in Forms of Choice in Ring Theory.

*nicht Prüfungsstoff

33. Eine Familie $\mathscr{G}$ von Mengen hat *endlichen Charakter* falls gilt: Eine Menge X ist in $\mathscr{G}$ genau dann wenn jede endliche Teilmenge von X in $\mathscr{G}$ ist.

Das **Teichmüller Prinzip** besagt, dass jede nicht-leere Familie mit endlichem Charakter bezüglich Inklusion eine maximale Menge besitzt.

Zeige, mit Hilfe der Äquivalenz des Auswahlaxioms und des Wohlordnungsprinzips, dass das Teichmüller Prinzip äquivalent ist zum Auswahlaxiom.

Beweis:

Angenommen, das Teichmüllerprinzip gilt.

Sei $\mathscr{F}$ eine Familie nicht-leerer Mengen. Sei $\mathscr{G}$ die Familie der partiellen Auswahlfunktionen auf $\mathscr{F}$. Dann ist $\mathscr{G}$ nicht leer, denn es enthält auf jeden Fall die endlichen partiellen Auswahlfunktionen auf $\mathscr{F}$. Ausserdem hat $\mathscr{G}$ endlichen Charakter, denn eine Funktion ist genau dann eine partielle Auswahlfunktion, wenn all ihre Einschränkungen auf einen endlichen Definitionsbereich partielle Auswahlfunktionenen sind. Nach dem Teichmüllerprinzip besitzt also $\mathscr{G}$ bezüglich Inklusion ein maximales Element f. Dabei muss es sich um eine (totale) Auswahlfunktion auf $\mathscr{F}$ handeln, was zu zeigen war.

Angenommen, das Wohlordnungsprinzip gilt. Daraus können wir das Kuratowski-Zorn-Lemma folgern: Jede induktiv geordnete Familie besitzt ein maximales Element.

Sei $\mathscr{G}$ eine nicht-leere Familie mit endlichem Charakter. Dann ist $\mathscr{G}$ induktiv geordnet bezüglich Inklusion. Einerseits ist $\mathscr{G}$ partiell geordnet und anderseits besitzt jede Kette $C \subseteq \mathscr{G}$ eine obere Schranke, zum Beispiel $\bigcup C$. Nach dem Kuratowski-Zorn-Lemma besitzt also $\mathscr{G}$ ein maximales Element, was zu zeigen war.

34. Zeige mit dem Teichmüller Prinzip, dass jeder Vektorraum eine Basis besitzt.

Beweis:

Sei V ein Vektorraum und sei

$$\mathscr{G} := \{X \subseteq V \mid X \text{ ist linear unabhängig.}\}.$$

Dann hat $\mathscr{G}$ endlichen Charakter. Nach dem Teichmüllerprinzip enthält $\mathscr{G}$ also eine maximale Menge B bezüglich Inklusion. Nach Definition von $\mathscr{G}$ ist B linear unabhängig und wegen Maximalität ist B erzeugend. (Wäre B nicht erzeugend, liesse es sich zu einer grösseren linear unabhängigen Menge erweitern.) Somit ist B eine Basis von V.

35. Zeige mit dem Teichmüller Prinzip, dass sich jeder Filter über S zu einem Ultrafilter über S erweitern lässt.

Beweis: Sei $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{P}(S)$ ein Filter über S und sei $\mathscr{G}$ die Familie aller Mengen $X \subseteq \mathscr{P}(S) \setminus \mathscr{F}$, sodass für jede endliche Teilmenge $\{u_0, \ldots, u_n\} \subseteq X \cup \mathscr{F}$ gilt

$$\bigcap \{u_0, \ldots, u_n\} \neq \emptyset \,.$$

Dann hat $\mathscr{G}$ endlichen Charakter und das maximale Element von $\mathscr{G}$ ist ein Ultrafilter über S.