Die Gödel'schen Sätze

Serie 9

Nichtstandard-Modelle der Peano Arithmetik

Musterlösung

Im Folgenden bezeichnet $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ die Menge der natürlichen Zahlen und $\mathbb{N}$ das Standard-Modell der Peano Arithmetik mit Bereich $\mathbb{N}$; das heisst $\mathbb{N} = \{\mathbb{N}, 0^{\mathbb{N}}, +^{\mathbb{N}}, \cdot^{\mathbb{N}}\}$.

36. Sei $\mathscr{U} \subseteq \mathscr{P}(\mathbb{N})$ ein Ultrafilter über $\mathbb{N}$ welcher den Fréchet-Filter enthält. Weiter sei $\mathbb{N}^\star$ das Ultraprodukt (*bzw.* die Ultrapotenz) bezüglich $\mathscr{U}$ der $\mathscr{L}_{\mathsf{PA}}$-Struktur $\mathbb{N}$.

(a) Zeige, dass $\mathbb{N}^\star$ ein überabzählbares Modell von PA ist.

(b) Zeige, dass die Modelle $\mathbb{N}^\star$ und $\mathbb{N}$ elementar äquivalent sind.

Beweis:

(a) Angenommen, $\mathbb{N}^\star$ wäre abzählbar. Sei $\mathbb{N}^\star = \{\overline{a_i}\}_{i \in \mathbb{N}}$ eine Abzählung. Für jedes $i \in \mathbb{N}$ sei $a_i \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ein Repräsentant von $\overline{a_i}$ und definiere

$$a_\omega \colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}, n \longmapsto \max\{a_i(n)\}_{i=0}^{n} + 1.$$

Dann gälte $\overline{a_\omega} \in \mathbb{N}^\star$ nach Konstruktion, aber für alle $\overline{a} \in \mathbb{N}^\star$ hätten wir $\overline{a_\omega} > \overline{a}$, insbesondere $\overline{a_\omega} > \overline{a_\omega}$, ein Widerspruch.
Also ist $\mathbb{N}^\star$ überabzählbar.

(b) Nach dem SATZ VON ŁOŚ gilt für jeden $\mathscr{L}_{\mathsf{PA}}$-Satz σ:

$$\mathbb{N}^\star \models \sigma \Leftrightarrow A_\sigma = \{n \in \mathbb{N} \mid \mathbb{N} \models \sigma\} \in \mathscr{U}.$$

Da aber $\mathbb{N}$ nicht von $n \in \mathbb{N}$ abhängt, haben wir $A_\sigma \in \{\varnothing, \mathbb{N}\}$ und $A_\sigma \in \mathscr{U} \Leftrightarrow A_\sigma = \mathbb{N} \Leftrightarrow \mathbb{N} \models \sigma$. Das heisst $\mathbb{N}^\star \models \sigma \Leftrightarrow \mathbb{N} \models \sigma$, was zu beweisen war.

37. Sei $\mathscr{L}_{\mathsf{PA}^*} := \mathscr{L}_{\mathsf{PA}} \cup \{\mathtt{c}\}$ und für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei φ_n der $\mathscr{L}_{\mathsf{PA}^*}$-Satz

$$\underbrace{\mathtt{s} \ldots \mathtt{s}}_{n\text{-mal}} 0 < \mathtt{c}\,.$$

Weiter sei $\mathsf{PA}^* := \mathsf{PA} \cup \{\varphi_n : n \in \mathbb{N}\}$.

(a) Zeige, dass die $\mathscr{L}_{\mathsf{PA}^*}$-Theorie PA^* konsistent ist.

(b) Da die Signatur $\mathscr{L}_{\mathsf{PA}^*}$ abzählbar ist, hat PA^* ein abzählbares Modell $\mathbb{N}^*$.
Beschreibe die Ordnungsstruktur dieses Modells $\mathbb{N}^*$.

Beweis:

(a) Sei $\mathsf{T}^* \subseteq \mathsf{PA}^*$ eine endliche Teiltheorie. Sei $m := \max\{n \in \mathbb{N} \mid \varphi_n \in \mathsf{T}^*\}$. Dann ist $\mathbb{N} \models \mathsf{T}^*$ für $c^{\mathbb{N}} = m + 1$, beispielsweise. Da T^* beliebig war, haben wir $\mathrm{Con}(\mathsf{PA}) \Rightarrow \mathrm{Con}(\mathsf{PA}^*)$.

(b) Wir zeigen, dass $\mathbb{N}^*$ dieselbe Ordnungstruktur besitzt wie $\mathbb{N} \sqcup \bigsqcup_{q\in\mathbb{Q}} \mathbb{Z}$. Dazu identifizieren wir den Bereich von $\mathbb{N}$ mit dem Anfangsabschnitt von $\mathbb{N}^*$.
Für $m \in \mathbb{N}^* \setminus \mathbb{N}$ gibt es sm, ssm, $sssm$ usw. und da $m \neq 0$, besitzt es einen Vorgänger, da $m \neq 1$, besitzt dieser wiederum einen Vorgänger usw. Entsprechend befindet sich m in einer Kopie von $\mathbb{Z}$.
Seien nun $m, n \in \mathbb{N}^* \setminus \mathbb{N}$ so, dass $\exists d(m + d = n)$. Wenn $d \in \mathbb{N}$, dann befinden sich m und n in derselben Kopie von $\mathbb{Z}$. Wenn nicht, dann befindet sich $\lceil \frac{m+n}{2} \rceil$ in einer Kopie von $\mathbb{Z}$, die zwischen dem $\mathbb{Z}$ von m und dem $\mathbb{Z}$ von n liegt.
Mithilfe von $\lceil \frac{m}{2} \rceil$ und $2n$ können wir analog zeigen, dass die Kopien von $\mathbb{Z}$ dicht linear angeordnet sind – wegen der Abzählbarkeit von $\mathbb{N}^*$ also wie $\mathbb{Q}$.

38. Seien $\mathscr{L}_{\mathsf{PA}^*}$ und PA^* wie in Aufgabe 37. Zu PA^* fügen wir nun alle $\mathscr{L}_{\mathsf{PA}}$-Sätze σ hinzu, für die gilt: $\mathbb{N} \models \sigma$. Die so erhaltene Theorie sei PA^{**}

(a) Zeige, dass die $\mathscr{L}_{\mathsf{PA}^*}$-Theorie PA^{**} konsistent ist.

(b) Sei $\mathbb{N}^{**}$ ein abzählbares Modell von PA^{**}.
Sind die Modelle $\mathbb{N}^{**}$ und $\mathbb{N}$ als Modelle von PA isomorph oder zumindest elementar äquivalent?

Beweis:

(a) Analog zur vorherigen Aufgabe ist $\mathbb{N}$ ein Modell für jede endliche Teiltheorie von PA^{**}, woraus dessen Konsistenz folgt.

(b) Die Modelle können nicht isomorph sein, da sie nicht-isomorphe Ordnungstypen haben.
Sie sind allerdings elementar äquivalent, denn es gilt

$$\mathbb{N} \models \sigma \Rightarrow \sigma \in \mathsf{PA}^{**} \Rightarrow \mathbb{N}^{**} \models \sigma$$

und

$$\mathbb{N} \not\models \sigma \Rightarrow \mathbb{N} \models \neg\sigma \Rightarrow \mathbb{N}^{**} \models \neg\sigma \Rightarrow \mathbb{N}^{**} \not\models \sigma.$$

39. Zeige, dass es überabzählbar viele paarweise nicht-isomorphe abzählbare Modelle von PA gibt, welche alle elementar äquivalent zu $\mathbb{N}$ sind.

Beweis:

Sei $\mathbb{P} \subseteq \mathbb{N}$ die Menge aller (Standard-)Primzahlen. Für jedes $p \in \mathbb{P}$ sei ψ_p der $\mathscr{L}_{\mathsf{PA}^*}$-Satz $p|\mathtt{c}$. Für jede Teilmenge $P \subseteq \mathbb{P}$ setze

$$\mathsf{PA}^*_P := \mathsf{PA}^* \cup \{\psi_p \mid p \in \mathbb{P}\} \cup \{\neg\psi_p \mid p \notin \mathbb{P}\},$$

sei $\mathsf{PA}^{**}_P := \mathsf{PA}^*_P \cup \mathsf{PA}^{**}$ und sei $\mathbb{N}^{**}_P \models \mathsf{PA}^{**}_P$ ein abzählbares Modell. Dann gilt insbesondere $\mathbb{N}^{**}_P \models \mathsf{PA}$.

Gewisse dieser Modelle können isomorph zueinander sein. (Alle sind nach Konstruktion elementar äquivalent zu $\mathbb{N}$.)

Allerdings gibt es überabzählbar viele Isomorphieklassen. Sind nämlich $M_1, M_2 \in \{\mathbb{N}^{**}_P \mid P \subseteq \mathbb{P}\}$ isomorph, aber verschieden, so gilt für einen Isomorphismus

$$f\colon M_1 \longrightarrow M_2,$$

dass $f(c^{M_1}) \neq c^{M_2}$. Da alle betrachteten Modelle abzählbar sind, kann ein einzelnes also nur zu abzählbar vielen anderen Modellen isomorph sein.

Somit erhalten wir überabzählbar viele nicht-isomorphe Modelle von PA, die elementar äquivalent zu $\mathbb{N}$ sind.